

I. Úvod.

Obsah a význam fyziky

fysis (gréck.) - príroda
materiá - všetko čo jestvuje, objektívne, nezávislé od nášho
vedomia. (je o mím odvrátení).

1, látka (zem, slnko, molekuly, atómy ...)

2, pole (gravitačné p., elektrické p., magn. p., elektr. m.)
m. - je v neustálom pohybe (základná, neoddeliteľná
vlastnosť. Fyzika štud. najprírodné formy poh.

predmet. fyz. :

1, mechanický pohyb

2, tepelný

3, javy elektrické a magnetické

4, atómová a mol. výstavba látok

5, atómové deje

6, vlastnosti elementárnych častíc

súvislosť prírodných

súvislosť fyz. - chem. vied.

fyz. študuje javy - príkl. na podstatu
fyzikálna chémia. látky meraní.

Význam fyziky : technika
priemysel
spoločnosť.

1, Faraday : elektromagn. indukcia.
(el. gen. ; mot. ; transf. ...)

2, Fotoelektr. jav (Stolebov - 1889.)
(televízia. ...)

3, Mikroskop ; ďalekohľad

4, Maxwell - Hertz : elektr. vlny.
(Popov - rádiotelegraf.)

5, Termojukl. reakcie

spätný vplyv techniky
na fyziku. (elektronické počítače.

Metódy fyziky

Základná úloha: hľadať a overovať zákony a ich vz. súvis. v fyz. dejoch.

Fyzikálne deje, javy.

Fyz. objekty: makrofyzikálne (- sú prístupné priam. pozorovaniu)
mikrofyzikálne (- časti m. iónovými mikrosk.)
ich existenciu možno dokázať: atómy, ióny...

1. Pozorovanie } faktá } zákony (hypotézy } teória)
2. Experiment } faktá }

Zákony: vzájomný súvis medzi faktami.

Pre vysvetlenie príčin navádzajú sa hypotézy.
(predpoklady, modely....)

Na overenie nových predpokl. (hypotéz) javov sa rob. exper.

Pojmy,

Fyz. veličiny

1. dĺžka
2. hmotnosť
3. čas
4. teplota
- ...

F. v. možno merať (koľkokrát je väčšia od jednotky merania)

meraná veličina = $a \times j$ jednotka

F. jednotky majú urč. meno (m., s., ...)
Výsledok merania je pomenované číslo.

Rozličná kvalita, rôzna veľkosť (2A; 5A)

Rozn. " " " (2kg; 5A)

Kvalita fyz. vel. je určená roznosť jej jednotky

Fyz. veličina je jednotka kvality a kvality.

Ak del., alebo násobíme fyz. vel. rovného druhu - vzniká nová fyz. veličina. ($\frac{12m}{3s} = 4m/s$)

jednotka fyzikálnej veličiny.

Sústava fyz. jednotiek.

Základné jednotky

Súbor základných a odvodených jednotiek — sústava jednotiek

načr. súst.	základné f. vel.	jednotky
1. CGS	dĺžka, hmotnosť, čas.	cm g s
2. MKSA	dĺžka, hm., čas, el. prúd.	m kg s A
3. technická s.	dĺžka, čas, sila	m s kp

1960 - Paríž : Systeme International d'Unités

1962 - vyhlásená náhonom.

(druholné jednotky - ČSN :)

Základné jednotky s. SI

1. j. dĺžky - meter [1m]
2. j. hmotnosti - kilogram [1kg]
3. j. času - sekunda [1s]
4. j. el. prúdu - ampér [1A]
5. j. teplotn. rozd. - teplot. stupň [1deg] ($^{\circ}\text{K}$; $^{\circ}\text{C}$)
6. j. osvetlenia - kandela [1cd]

1m. vzdialenosť 2 ryhov na lyži n. [Pt 1r] $\frac{1}{4000000}$ časť par. poludník
Mudrinár. úrad pre merenia - v Paríži.

m - je dĺžka rovnajúca sa násobku 1650763,73 vlnovej
dĺžky žiarenia (kryptonu 86 vo vakuu pri prechode medzi
energ. hladinami $2p_{10}$ $5d_5$

1kg. - hmotnosť mudrinár. prototypu kg. - uloži v. MúMV. Geneva
(1dm³ H₂O - 4°C)

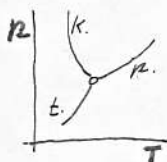
1s. - $\frac{1}{86400}$ stredného slnečného dňa

1s. - 31 556 925,9749 časť tropického roka 1900. i. 12h.
efemeridového času.

tropický rok - doba medzi 2. jarn.

A. - je ustálený proud, který po přičlenění 2. délky
 ve vákuu ulož; ve vzd. 1m, rovnoběžn. ved.
 vyvolává na 1m dlouhý vedení sílu $2 \cdot 10^{-7} \text{ kgm s}^{-2} [\text{N}]$

Teplotný stupň je 273,16 díl teplotního rozdílu mezi
 abs. nulou a teplotou táního bodu vody, měřený
 v termodynamické teplotné stupnici.



cd - je svítivost povrchu $1/6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ absolutně černého
 tělesa při teplotě tuhnutí Pt na tl. 760 torr.
 $(1,09225 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2)$

V astron.; spektroskopii norma dovoluje aj jiné jednotky.

Odvodění (druhotné) f. v. - ich jednotky

$$v = \frac{s}{t} [v] = 1 \text{ m s}^{-1}$$

$$a = \frac{v}{t} [a] = 1 \text{ m s}^{-2}$$

$$F = m \cdot a [F] = 1 \text{ kg m s}^{-2}$$

1. jednotky hlavní (základní, odvození) - čistá syst. SI
2. Vedlejší - nepatří do SI (z prakt. příčin si zrovň.)
3. Násočky a díly základ., hlavních, vedl. jednotek.

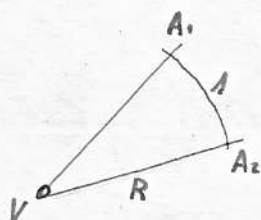
Pr.:	objem	hl. j.	n. j.
		1 m^3	1 l
	síla	$1 \text{ kg m s}^{-2} = 1 \text{ N}$	$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$
	tlak	1 N m^{-2}	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N m}^{-2}$
			kp m^{-2}
	práce	$1 \text{ N m} = 1 \text{ J}$	$\text{kp m} = 9,81 \text{ J}$
			Wh

Nábočky ráhl.; hl.; vedl. jednoliek.

	predpona	značka	x 12, v. jednotka	príkl.
nas. j.	tera	T	10^{12}	Tm
	giga	G	10^9	GΩ
	mega	M	10^6	MW
	kilo	k	10^3	kV
			10^{-3}	mA
ciast. j.	mili	m		μC
	mikro	μ	10^{-6}	μF
	nano	n	10^{-9}	nF
	piko	p	10^{-12}	pF
	femto	f	10^{-15}	fC
	atto	a	10^{-18}	αmV
	hecto	h	10^2	
	deka	da	10^1	
	deci	d	10^{-1}	
	cento	c	10^{-2}	

Jednotky dĺžky: m. 1 km 1 km 1 m. 1 m = $9,46 \cdot 10^{15}$ m
 cm dm mm μm nm pm $1 \text{ Å} = 10^{-10}$ m
 $1 \text{ X} = 10^{-13}$ m (vzdialenosť medzi iónmi NaCl ~ 200 X)

Jednotky uhlov: radián - uhol pre kt. pomer príslušný dĺžky: kružnice oblúka, opis. r. vrchola uhla, polomeru oblúka v sa rovná jednotke.



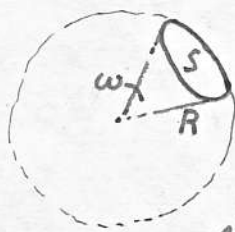
$$\frac{A}{R} = 1 \sim \text{radián [rad.]}$$

vedľajšie jednotky: grad = $\frac{\pi}{200}$ rad.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad | \quad 1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$$

priestorový uhol:

steradian - sr - je priest. uhol, pre ktorý pomer veľkosti plochy vytkutej priol. kužeľom na povrchu gule, ktorá má vrchol v strede g. - S; $S/R^2 = 1$



$$\frac{S}{R^2} = 1$$

vedl. jedn.: srab - sr = 4π sr.

II. Základy vektorového počtu

Pojem vektoru.

Skaláry - jednorozměrné urč. svojou veľkosťou (čas, teplota, objem...)

Vektory - okrem sv. veľkosti sú charakt. aj sv. smerom.
(sila, rýchlosť...)

Označovanie vektorov: $\vec{a}; \vec{v}; \vec{f}; \vec{r};$

Ilustrovanie: orientovanými úsečkami: 

$$v = |\vec{v}| = 3 \quad \dots$$

Vektory $\vec{a}; \vec{b}$ - sú rovné ak sú rovné ich absolútne hodnoty; a majú rovnaký smer.

Protivektorom $-\vec{a}$ roz. vektor: abs. hodn. rovnaká, smer opačný.

Skalárny násobok vektora so sk. veľičinou:

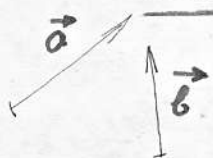
$$\lambda \cdot \vec{a}$$

1, $\lambda > 0 \rightarrow \lambda \vec{a}$ má rovn. smer $\vec{a}$

2, $\lambda < 0 \rightarrow \lambda \vec{a}$ má opačn. $\vec{a}$

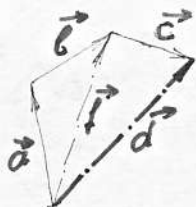
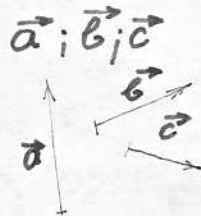
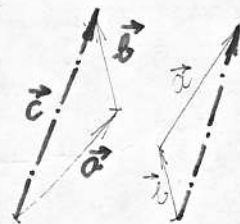
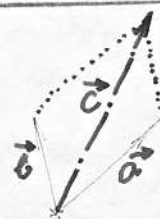
[absolútna hodnota vektora]

Súčet a rozdiel vektorov

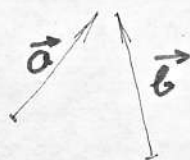


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

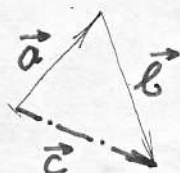
platí zákon kommut.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{f} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$\vec{d} = \vec{f} + \vec{c}$$



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}' \quad / -\vec{b} = \vec{b}'$$



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Jednotkový vektor -

vektor, ktorého abs. hodnota sa rovná jednotke.

Označovanie j.v. : $\vec{p}; \vec{r}; \vec{f}; \vec{a}_0; \vec{b}_0$

padajúce do osí súradníc : $\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}$
x y z

Vektor možno napísať :

$$\vec{a} = a \cdot \vec{r}_i$$

pr. : $\vec{f} = f \cdot \vec{r}; \quad \vec{v} = v \cdot \vec{r}$

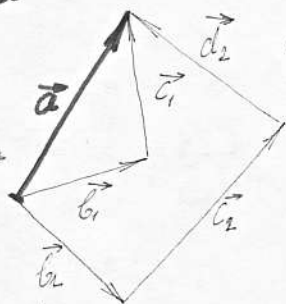
V priestore každému smeru zodpovedá urč. jedn. vektor



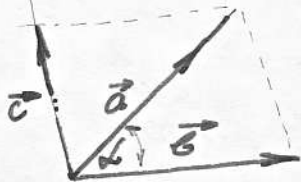
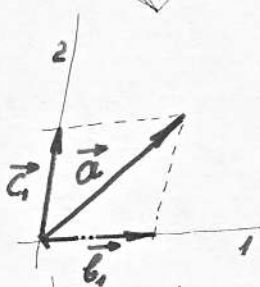
$$\vec{v} = v \cdot \vec{P} \\ \vec{f} = f \cdot \vec{P} \quad | \vec{P} - \text{jedn. vektor.}$$

Rozklad vektora na zložky

$\vec{a}$

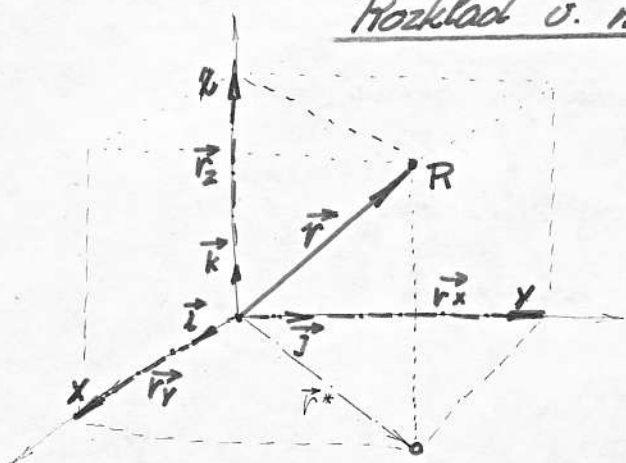


$$\vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{c}_1 = \vec{b}_2 + \vec{c}_2 + \vec{d}_2$$



jednoznačný rozklad (udaní smer, ...)

Rozklad v. na zl. ; spad. do smeru súr. osi.



$\vec{r}^*$ - priemet $\vec{r}$ do roviny x, y

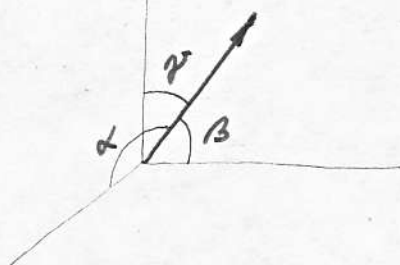
$\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z$ - složky v. $\vec{r}$
(jednoznačné!)

$\vec{r}$ - je telesovou uhlopriečkou kvadra

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}^* + \vec{r}_z \\ \vec{r}^* &= \vec{r}_x + \vec{r}_y \end{aligned} \right\} \vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z \quad |$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_x &= r_x \cdot \vec{i} \\ \vec{r}_y &= r_y \cdot \vec{j} \\ \vec{r}_z &= r_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \right\} \vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

Smerové kosiny.



$$\cos \alpha = \frac{r_x}{r}$$

$$\cos \beta = \frac{r_y}{r}$$

$$\cos \gamma = \frac{r_z}{r}$$

$$| r = |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{r_x^2}{r^2} + \frac{r_y^2}{r^2} + \frac{r_z^2}{r^2} = \frac{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$$

Násobenie dvoch vektorov.

Skalárny a vektorový súčin dv. vektorov.

- 1) Sk. súčin $\vec{a}; \vec{b}$ - roz. skal. veličinu, ktorá sa rovná súčinu ich abs. hodnôt a kosinu uhla nimi zovretými.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \angle$$

Dôsledky s.s. vektorov.

$$1.) \text{ ak } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi = 0$$

$$2.) \vec{a} \parallel \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 0^\circ = a \cdot b$$

$$3.) \vec{a} \parallel \vec{a} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

Z def. skalár. súčinu vyplýva, že platí:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Pre sk. súč. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$	$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$	$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$
$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$	$\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$

Platí zákon distributívny:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \angle$$

$$\cos \angle = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a \cdot b}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

Určíme uhol medzi vektormi:

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

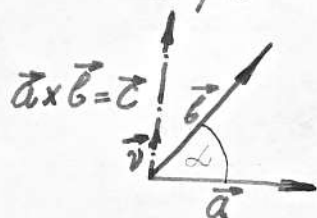
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 2 - 8 = -9$$

$$\cos \angle = \frac{-9}{\sqrt{1+1+16} \sqrt{1+4+4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \angle = 135^\circ$$

$$\frac{-9}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{-9}{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \angle = 135^\circ$$

b. Vektorový súčin dvoch vektorov -

$\vec{a}; \vec{b}$ - ležia v jednej rovine



- je vektor ktorý:

- 1.) je kolmý na rovinu $\vec{a}; \vec{b}$
- 2.) je orientovaný tak, že vektory $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ - tvoria pravotoč. súr. s.
- 3.) jeho hodnot (abs.)

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

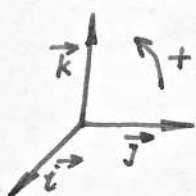
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin L$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \sin L \cdot \vec{v} \quad | \vec{v} - \text{jednotk. vektor.}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

V. Súčiny jednotk. vektorov pod. do osí súr. syst.



$$\vec{i} \times \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

dôsledky: 1.) $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$

2.) $\vec{a} \parallel \vec{b} \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

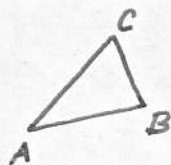
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Geometr. význam vektorového součtu



$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

abs. hodn. vekt. součinu dvou vektorů =
= plochou rovnoběžníka se stranami
daných 2 vektorů.

Vekt. ; skal. součin.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Geom. význam míchaného součtu.



Determinant sa číselne rovná objemu
rovnoběžnostěna vytvořené (hrana!) z da-
ných vektorů.

Ložený vekt. součin: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$
troch vektorů.

Diferenciální operace s vektory

Velikost v , ako aj skalárny môžu sa meniť
podľa iné sk. veličiny. - Vektorová funkcia.

$$\vec{a} = \vec{a}(u) \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

u, t - sk. argument

ak $\vec{r}$ je funkciou u : $\vec{r} = \vec{r}(u)$

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u + \Delta u) - \vec{r}(u)}{\Delta u}$$

- výsledok je vektor

$$1.) \text{ nech } \begin{aligned} s &= s(u) \\ \vec{r} &= \vec{r}(u) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{du}(s \cdot \vec{r}) = \frac{ds}{du} \cdot \vec{r} + s \frac{d\vec{r}}{du}$$

$$2.) \begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}(t) \\ \vec{b} &= \vec{b}(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

deriv. vektorového súčinu.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \quad - \text{výsledok vektor.}$$

III Mechanika

je časť fyz. - študuje mech. pohyby. M. pohyb - zmena polohy jedného telesa vzhladom na 2. teleso. Najjednoduchší pohyb. M.p. je relatívny. 2. teleso považujeme za nepohybľý. (napr. : pohyb v dopravných prostriedkoch.)

hmotný bod - teleso, ktorého rozmery môžeme zanedbať s porovnaním s rozm. pohybom.

1. kinematika - sa zaoberá opisom m. pohybov.
2. dynamika - vyšetruje aj príčiny vzniku poh.

Galileo Galilei

Isaac Newton 1687 (Matematické náklady prírodovedy)

Euler

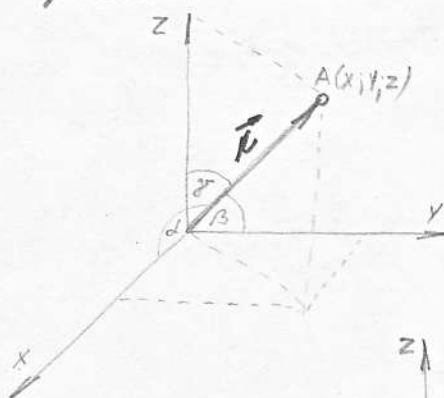
Newtonova (klasická) mechanika platí len pre malé rýchlosti (s porovn. k rýchl. svetla)

Einsteinova teória relativity.

poloha hmot. bodu v priestore

Kinematika hmotného bodu.

polohu hmotného bodu urč. pom. souřadnic.



1, $A(x; y; z)$

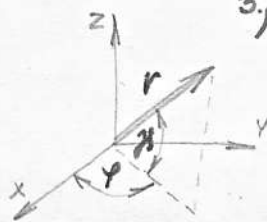
2, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

$\vec{r} \sim$ polohový vektor

$\vec{r}$ je určený 3-ma veličinami

3, Sférické souřadnice : $r; \vartheta; \varphi$



$x = r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi$

$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$

$z = r \cdot \sin \vartheta$

pri meck. pohybe poloha km. bodu sa mení (časom)

$x = x(t)$

$y = y(t)$

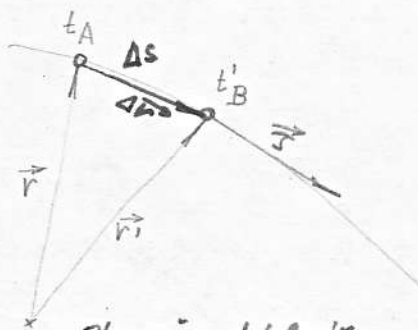
$z = z(t)$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$

- pohybové rovnice km. b.
(rovn. dráhy pohybu)

Súbor vs. polôch, ktoré postupne zaujíma km. bod
naz. dráhou pohybu.

Územny pohyb km. b. charakterizuje veličina: rýchlosť.
- " - rýchlosti - " - " - zrychlenie.



$\Delta t = t' - t$

$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r} \rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$

$\left. \begin{array}{l} \Delta t = t' - t \\ \vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r} \rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r} \end{array} \right\} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_s$
stredná rýchlosť

$\Delta t \rightarrow 0$

- okamžitá rýchlosť v danom bode

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

Okamž. rýchlosť.

Směr rychlosti je daný dotyčnicou : $\vec{v} = v \cdot \vec{T}$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_s$ - stredná rýchlosť

$\Delta t \rightarrow 0$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$

$|d\vec{r}| = ds$

$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = v$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} =$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Smerové uhly: $\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

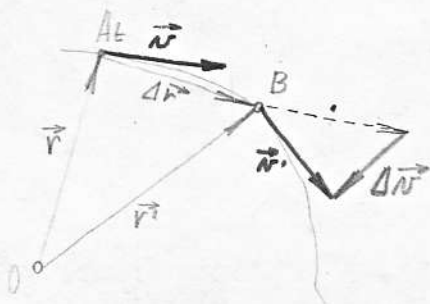
rozměr rychlosti:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\text{jednotka délky}}{\text{jedn. času}} = \frac{1m}{1s} = 1m \cdot s^{-1}$$

$$[v] = 1m \cdot s^{-1}$$

$$1cm/s$$

$$1km/s$$



$$\Delta t; \Delta \vec{v}$$

$$\Delta t = t' - t$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta t = t' - t \\ \Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} \end{array} \right\} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_s - \text{střední zrychlení}$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} - \text{rychlení okamžité}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

} souřadnice zrychlení

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Smernové uhly:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{a}$$

Jednotka zrýchl.:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\text{jedn. zrýchl.} = \frac{\text{jedn. rýchl.}}{\text{jedn. času}} = \frac{1 \text{ m s}^{-1}}{\text{s}} = 1 \text{ m s}^{-2}$$

$$[a]_{SI} = 1 \text{ m s}^{-2}$$

$$1 \text{ cm s}^{-2}$$

Riektové jednoduché typy priamoč. pohybov.

a. Priamočiary pohyb rovnomerný

dráha pohybu – priamka

zrýchlenie – nulové

vektor rýchlosti sa rovná konstante

Záv. dráhy na čase.

$$a=0 \rightarrow v = \text{konst.}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = v \cdot dt \quad | \int$$

$$s = \int v dt$$

$$s = v \cdot t + s_0$$

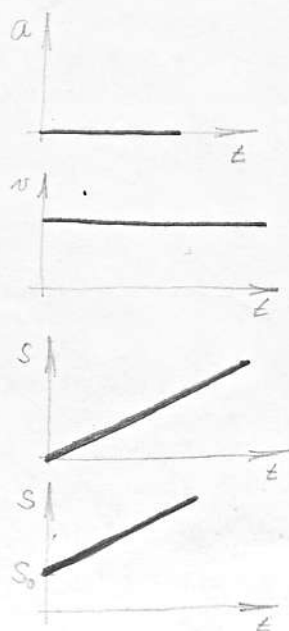
$$t=0 \rightarrow s_0 = 0$$

$$s = v \cdot t$$

$$1. \quad a=0$$

$$2. \quad v = \text{konst.}$$

$$3. \quad s = v \cdot t + s_0$$



6, Rovnomerne zrýchlený priamoč. pohyb.

$$\vec{a} = \text{konšt.} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a = \text{konšt.} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

1, závisl. rýchlosti na čase:

$$dv = a \cdot dt$$

$$v = \int a \cdot dt$$

$$v = at + v_0 \quad | \quad v_0 - \text{počiatočná rýchlosť}$$

2, závisl. dráhy na čase

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v \cdot dt$$

$$s = \int v \cdot dt = \int (at + v_0) dt$$

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0$$

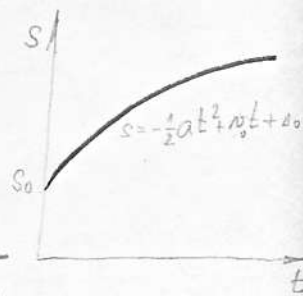
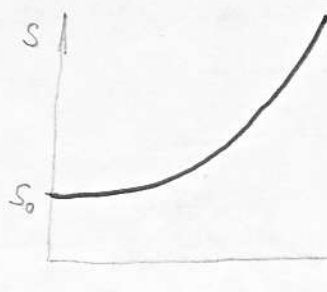
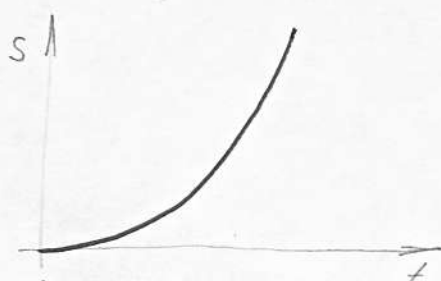
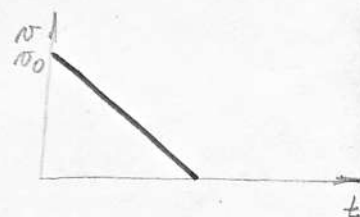
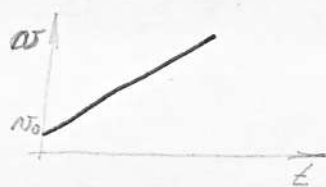
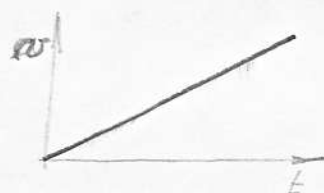
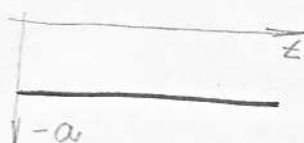
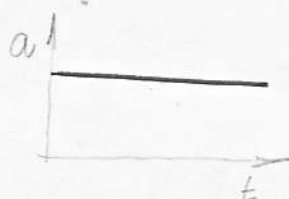
$$a = \text{konšt.}$$

$$v = at + v_0$$

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0$$

Zrýchlenie môže byť kladné — p. zrýchlený a
 záporné — p. spomalený $-a$

$$\left. \begin{matrix} v_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = \text{konšt} \\ v = a \cdot t \\ s = \frac{1}{2} at^2 \end{matrix}$$



Typické prípady: Volný pád: $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ $v = gt$ $s = \frac{1}{2} gt^2$
 Vrch vislý nadol $a = g$ $v = v_0 + gt$ $s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$
 nahor $a = g$ $v = v_0 - gt$ $s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$

c. Obecný pohyb přímočarý

$a \neq \text{konst.}$

$$a = a(t) \quad a = k \cdot t$$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a \cdot dt$$

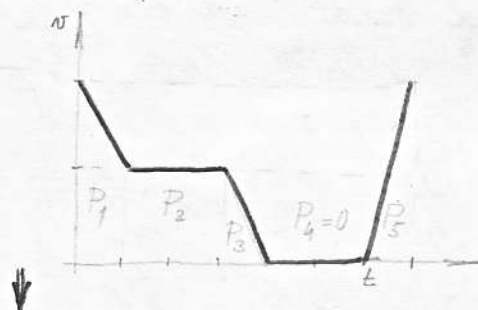
$$v = \int a dt = \int k t \cdot dt = \frac{1}{2} k t^2 + v_0$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v dt$$

$$s = \int v dt = \int \left(\frac{1}{2} k t^2 + v_0 \right) dt$$

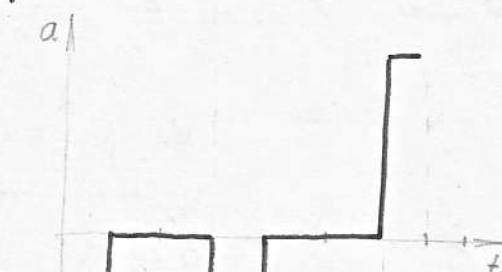
$$s = \frac{1}{6} k t^3 + v_0 t + s_0$$

Je daná závisl. rychlosti na čase. Treba zistiť priebeh dráhy a zrychlenia podľa času.

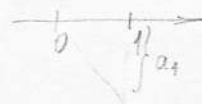


$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



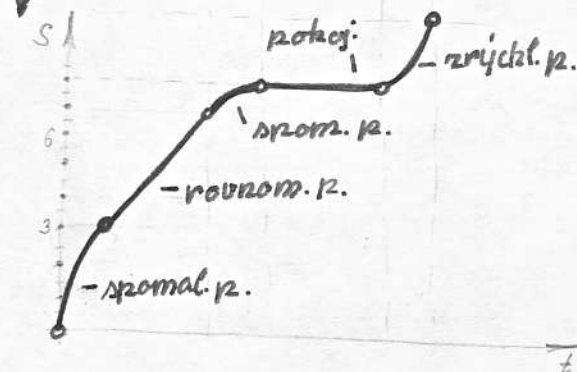
$$\Delta t = 1 \rightarrow a = \Delta v$$



$s = ?$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow s = \int v \cdot dt$$

$$P = \int v \cdot dt$$



$$x_1 = P_1 = 1.2 + \frac{1.2}{2} = 3 [m]$$

$$x_2 = P_2 = 2 \cdot 2 = 4 [m]$$

$$x_3 = P_3 = 1$$

$$x_4 = P_4 = 0$$

$$x_5 = P_5 = \frac{1 \cdot 1}{2} = 2$$

Krivočiary pohyb km. b.

- pohyb pri ktorom dráka pohybu je krivá čiara.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v \cdot \vec{e}$$

smer rýchlosti sa neustále mení.

Môže byť:

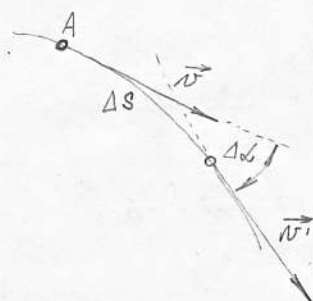
$|\vec{v}| = \text{konšt}$ - rovnomerný p.

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Kriv. p. možno rozložiť na 3 súčasne prebieh. priamočiare pohyby v smere pravouhl. súradníc.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Zrýchlenie je vždy rôzne od nulý; hoci aj rýchlosť je konštantná.



$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = C_s \quad - \text{stredná krivosť}$$

$$\Delta s \rightarrow 0 \quad C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

$d\varphi$ - elementárny uhol

ds - element. dráka

R - polomer krivosti

$$R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$ds = R \cdot d\varphi$$

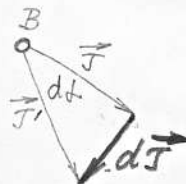
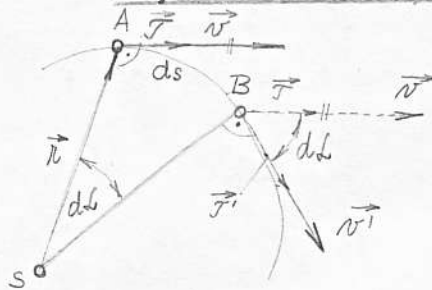
Pre krakovú dráku: $C = \text{konšt.}$

$R = \text{konšt.}$

$$s = R \cdot \varphi$$

φ - stredový uhol.

Zrýchlenie kr. pohybu.



$$\vec{v} = v \cdot \vec{T}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (v \cdot \vec{T}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot v$$

$$v \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = v \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = v^2 \frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$dL = |d\vec{T}| \quad ds = r \cdot dL$$

$$\frac{|d\vec{T}|}{ds} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{cases} \vec{T}^2 = 1 \\ 2 \cdot \vec{T} \cdot d\vec{T} = 0 \\ \vec{T} \cdot d\vec{T} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{T} \perp d\vec{T}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{r} \vec{\rho}$$

ozn. jedn. vektor:

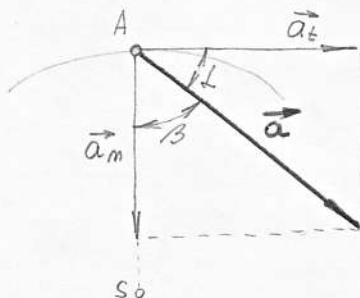


$$d\vec{T} = -\vec{\rho} \cdot ds$$

$$\vec{a} = v^2 \frac{d\vec{T}}{ds} = -v^2 \frac{1}{r} \vec{\rho}$$

dostredivé, normálové zrýchľ.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} - \frac{v^2}{r} \cdot \vec{\rho} = \vec{a}_m - \vec{a}_t = -\frac{v^2}{r} + \frac{dv}{dt}$$



$$\lg \beta = \frac{a_m}{a_t}$$

$$\lg \beta = \frac{a_t}{a_m}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_m^2}$$

a_t - spôsobuje zmenu veľkosti rýchľ.
 a_m - " " " smeru rýchlosti.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} \quad v = \text{konst.} \Rightarrow a = 0 \quad - \text{priamočiary pohyb.}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} \quad v = \text{konst.} \Rightarrow a \neq 0 \quad - \text{krivoč. pohyb.}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_m$$

$$\frac{dv}{dt} \vec{T} - \frac{v^2}{r} \vec{\rho} \quad a_m = \frac{v^2}{r}; \quad a_t = 0$$

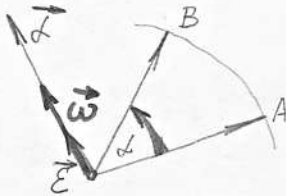
$$a = a_m$$

Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie.

Vo fyz. a teoretických úvahách zavádzame pojem vektora uhla - jeho absol. hodn. = veľkosť uhla.

Smer je kolmý na rovinu urč. ramenami uhla

Smeruje na tú stranu skade sa vytv. uhla smeruje proti pohybu hod. ručičiek.



Časová zmena uhla $\sim$ uhlová rýchlosť

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad [s^{-1}]$$

Zmena uhl. rýchlosti p. času $\sim$ uhl. zrýchlenie

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad [s^{-2}]$$

$\vec{r}$ - jednotkový vektor : $\vec{L} = L \cdot \vec{r}$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dL}{dt} \cdot \vec{r} = \omega \vec{r}$$

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{r} = \epsilon \cdot \vec{r}$$

Pohyb po kružnici

v - obvodová r.

ω - úhlová r

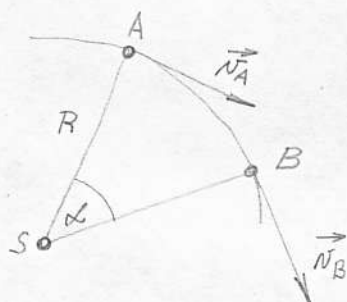
...

a.) Rovnomerný pohyb po kružnici

$$v = \text{konšt.}$$

$$s = R \cdot \varphi$$

$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow v = R \cdot \omega \sim \text{obvodová rýchlosť}$$



$$v = \text{konšt.} = \frac{ds}{dt} \rightarrow s = v \cdot t \quad \left. \vphantom{\frac{ds}{dt}} \right\} v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{T}$$

Perioda: $T \sim$ čas pokiaľ km. b. urazi' dráhu po kružnici raz

frekvencia: počet obbehov km. b. za jednotku času:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \quad \left. \vphantom{\frac{2\pi}{T}} \right\} \begin{array}{l} v = 2\pi r \cdot n \\ n \sim \text{frekvencia} \\ v = \omega \cdot r \end{array}$$

$$v = \text{konšt.} \rightarrow \omega = \text{konšt.} \rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \left. \vphantom{\vec{a}_t} \right\} \text{Pre } v = \text{konšt. } a_t = 0$$

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \omega^2 \sim \text{dostredivé zrychlenie}$$

Rovnomerne zrýchlený (sp.) pohyb po kružnici.

$$a = \text{konšt.}$$

$$\varepsilon = \text{konšt.} \begin{cases} + & (\text{zrýchlený p.}) \\ - & (\text{spomalený p.}) \end{cases}$$

$$\pm \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \pm \varepsilon dt$$

$$\omega = \pm \int \varepsilon dt = \pm \varepsilon t + \omega_0$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt$$

$$\varphi = \int \omega dt = \int (\pm \varepsilon t + \omega_0) dt = \pm \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

$$S = R \cdot \varphi = R(\pm \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0)$$

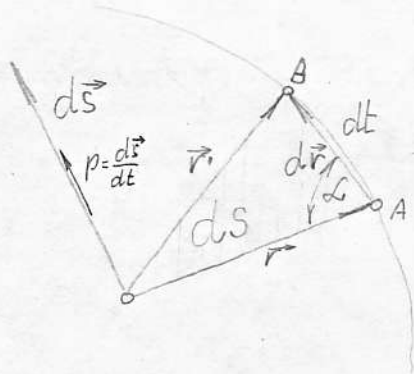
$$v = R \cdot \omega = R(\pm \varepsilon t + \omega_0)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon \quad \sim \text{konšt.}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \omega^2 = R(\pm \varepsilon t + \omega_0)^2 \sim \text{konšt.}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Plošná rýchlosť; plošné zrýchlenie.



$$\vec{r}_1 = \vec{r} + d\vec{r}$$

Ploška dS priradiť vektor $d\vec{S}$.

- 1, $d\vec{S}$ je $\perp$ na plošku dS
- 2, je orient. tie vektory $\vec{r}$ $\vec{r} + d\vec{r}$ tvoria pravotoč. trojicu
- 3, abs. hodnota $d\vec{S}$ je rovná plošky

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r})$$

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot dr \cdot \sin \alpha$$

Časová zmena element. plošky $\frac{d\vec{S}}{dt}$; opísané rot. vektorom za element. čas - definuje plošnú rýchlosť.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \quad /v - \text{okamžitá rýchlosť.}$$

Moment rýchlosti:

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = \frac{1}{2} r \cdot v \cdot \sin \alpha$$

$$| \text{ ak } \vec{v} \perp \vec{r} \Rightarrow L = \frac{1}{2} r \cdot v \quad | \quad v = \omega \cdot r$$

$$L = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

Jednotka plošnej rýchlosti: $[m^2 s^{-1}]$

Časová zmena plošnej rýchlosti:

$$\vec{q} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt})$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{a})$$

Moment zrýchlenia:

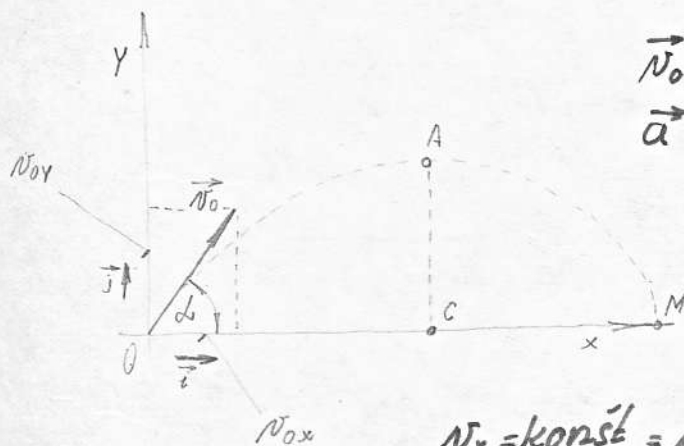
$$(\vec{r} \times \vec{a})$$

$$q = \frac{1}{2} r \cdot a \cdot \sin \beta$$

$$\text{Rozmer pl. zrýchl.: } [q]_{SI} = [m^2 s^{-2}]$$

$$\vec{N} = N_x \vec{i} + N_y \vec{j} + N_z \vec{k}$$

Šikmý vrh



$$\vec{N}_0 = N_{0x} \vec{i} + N_{0y} \vec{j} + N_{0z} \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \frac{dv_x}{dt} & \downarrow \frac{dv_y}{dt} \\ \theta & -g \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} N_{0x} &= N_0 \cdot \cos \alpha \\ N_{0y} &= N_0 \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

určiť tvar dráhy
max. výstup
dĺžku doletu
čas doletu

$$N_x = \text{konšt.} = N_{0x} = N_0 \cos \alpha$$

$$dN_y = -g dt \rightarrow N_y = -gt + N_{0y} = -gt + N_0 \sin \alpha$$

$$N_z = 0$$

$$N_x = \frac{dx}{dt} = N_0 \cos \alpha \xrightarrow{\text{Int.}} x = N_0 t \cos \alpha$$

$$N_y = \frac{dy}{dt} = -gt + N_0 \sin \alpha \xrightarrow{\text{Int.}} y = -\frac{1}{2} g t^2 + N_0 t \sin \alpha$$

} súradnice
km. bodu

a.) Rovnica dráhy :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \cdot \sin \alpha =$$
$$= (\tan \alpha) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

$$y = ax - bx^2$$

Dráha pohybu u šikmého vrhu je parabolická.
Os paraboly je rovnoběžná s osou y .

b.) Dĺžka vrhu. — $y = 0$

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 = 0$$

$$x \left(\tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Downarrow x_2 = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Maximálna vzdialenosť: $\sin 2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha_{\max} = 45^\circ$

$$\text{Ak } \alpha = 45^\circ \rightarrow x = d = \frac{v_0^2}{g}$$

c.) Maximálna výška. $(x_0; y_0)$

$$x_0 = \frac{d}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad / - \text{ dráha je parab. !}$$

$\downarrow$ dosadíme do rovn. dráhy.

$$y_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{2 \cdot v_0^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2g} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \cdot 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{g^2 \cdot 4}$$

$$y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

d., čas dosiahnutí max. výšky:

$$\text{v bode max.} : v_y = \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

e., doba letu:

$$t_0 = 2t_A = \frac{2 \cdot v_0 \sin \alpha}{g}$$

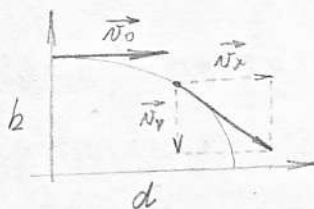
Odvodené vzťahy platia v vzduchoprázdne.

Vzduch pôsobí na teleso odporom: max. hodnoty sa menšia.



Vodorovný vrh -

teleso vrháme poč. rýchľ. v_0 v smere vodorovne, vo výške h nad rovinou.



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + \frac{v_z \vec{k}}{\theta}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

int.

$$v_x = \text{konst} = v_0$$

int.

$$v_y = -gt$$

int.

$$x = v_0 t$$

int.

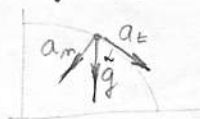
$$y = -\frac{gt^2}{2} + h$$

Rovnica dráky (eliminujeme čas)

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2} + h \quad - \text{ rovnica paraboly}$$

Dĺžka vr.: $y=0 = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2} + h \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow x=d = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Zrýchlenie:



$$a_m = a \sin \alpha$$

$$a_m = g \sin \alpha$$

$$a_z = a \cos \alpha$$

$$a_z = g \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{v_y}{v}$$

$$\sin \alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Dynamika

Newtonove pohybové zákony.

Výšet. príčiny pohybu hm. bodu:

Vzájomné pôsobenie telies.

Zaklady dynamiky vyjadril v 1678 Newton.

1. z. - 1. pohybový zákon (z. netrvačnosti)

Každé teleso netrvá v stave kludu (priamoč. rovnomern. pohybe) kým není nútené vonkajšimi vplyvami tento stav meniť.

Zrýchlenie sa prejav. účinkou sily.

2. z. - zákon sily

Zrýchl., ktoré určíť sila hm. bodu udeľuje, je úmerne pôsobiacej sile - a má jej smer.

Ak rovnako veľké sily pôsobia na iné telesá, zrýchl. na budú rovnaké.

Zotrvačné vlastnosti - kvantitatívne charakt. fyz. veličinou: hmotnosťou (m).

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{---} \quad [\text{kg ms}^{-2} = \text{IN}]$$

$\vec{F} = k \cdot m \cdot \vec{a}$; ak veličiny sú vyjadr. v 1. sústave; $k=1$

V sústave: CGS: $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \cdot 1 \text{ cm s}^{-2}$

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg ms}^{-2} = 10^3 \text{ g} \cdot 10^2 \text{ cm s}^{-2} = 10^5 \text{ dyn}$$

Tiaž (váha) - G

$$G = m \cdot g$$

je sila, ktorá pôsobí na teleso na povrchu Zeme, udeľuje mu zrýchlenie voľného pádu.

$$1 \text{ kp} = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

Na váhach určujeme hmotnosť.

3. 10.

- Ak hm. bod pôsobí na hm. b. m_2 silou f_1 ; potom aj hm. bod. m_2 pôsobí na m_1 silou f_2 ;

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

Sily ktoré na seba pôsobia sú rovnako veľké ale opačné. (raketová technika)

Sily p. na hmotný bod (teleso) možno (roz-)kladať:

$$\vec{f} = \begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \vec{f}_1; \vec{f}_2; \dots \vec{f}_n \\ \vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_n \\ \parallel \\ f_1/m \quad f_2/m \quad f_n/m \end{matrix} \left| \vec{a}_r = \sum_{s=1}^n \vec{a}_s \right| f = a \cdot m$$

$$\vec{a}_r = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^n \vec{f}_s \quad \sum_{s=1}^n \vec{f}_s = \vec{f}_r$$

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{f}_r}{m} \rightarrow \vec{f}_r = m \cdot \vec{a}_r$$

Rajšie používané: rozklad sily do súradníc osí prav. s.:

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \quad f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{f_x}{f} \quad \cos \beta = \frac{f_y}{f} \quad \cos \gamma = \frac{f_z}{f}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \vec{f} = m a_x \vec{i} + m a_y \vec{j} + m a_z \vec{k}$$

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a} \left\{ \begin{array}{lll} f_x = m a_x & f_y = m a_y & f_z = m a_z \\ f_x = m \frac{dv_x}{dt} & f_y = m \frac{dv_y}{dt} & f_z = m \frac{dv_z}{dt} \\ f_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} & f_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} & f_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pohybové rovn.} \\ \text{hm. bodu} \\ \text{(skalárne)} \end{array}$$

a.) Rovnom. priamoč. pohyb.

$$a = 0 \quad f = 0$$

b.) " zrychlený "

$$a = k. \quad f = m \cdot a = \text{konšt.}$$

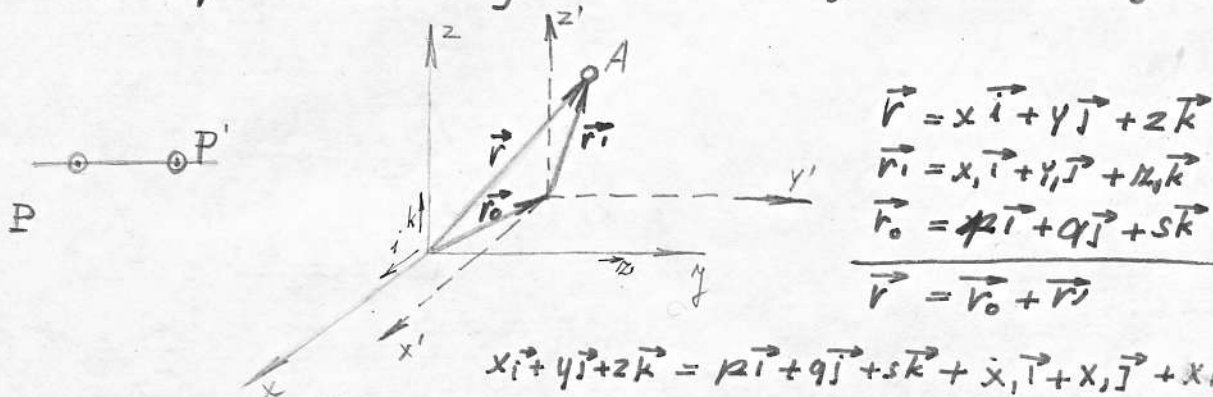
c.) " kruhový "

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{e} - \frac{v^2}{r} \vec{\rho} \quad | a_t = 0$$

$$\vec{a} = a_n = -\frac{v^2}{r} \vec{\rho}$$

$$\vec{f} = -\frac{m \cdot v^2}{r} \vec{\rho} \quad f = \frac{m v^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2$$

Princíp relativity Newtonovej mechaniky



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

Forma prechodu od jednej sústavy do druhej.
Transformačnej vzťah.

Pri pohybu

x, y, z, x', y', z' sú f. času.

ak sa poh. aj vtážna sústava;

x, y, z, x', y', z' sú tiež f. času.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v} \quad (\text{pozri pohľad na } x, y, z)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{v}_0 - \text{poh. čiarkov. súst.} \\ \vec{v}_1 - \text{" hmotn. bodu.} \end{array} \right.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{a}_0 - \text{zrychl. k } x, y, z \\ \vec{a}_1 - \text{" km. b. k } x, y, z \end{array} \right.$$

a.) Nech súst. x', y', z' sa pohyb. rovnomerne priamočiaro.

$$\vec{v}_0 = \text{konšt.} \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

$$\vec{a}_0 = 0 \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_1$$

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_1$$

$$f = f_1$$

ak vtážna s. sa poh. rovnomerne priamočiaro.
pohybom - platia Newtonove zákony.

Sústavy sú inerciálne (lat. - netravnosť)

Hmotný bod možno vzťahovať na vs. ľake sústavy.
Všetke inerc. sústavy sú v mechanike rovnocenné.

b, $x'; y'; z'$ sa pohybuje rovnom. zrýchleným pohybom.

$$a_0 \neq 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \quad ; \quad \vec{a}_1 = \vec{a} - \vec{a}_0$$

$$m\vec{a} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}_1 \quad ; \quad m\vec{a}_1 = m\vec{a} - m\vec{a}_0$$

$$\underline{f = f_0 + f'} \quad \underline{f' = f - f_0}$$

$$f' \neq ma$$

pribúda ešte zotrvačná sila: $\vec{f}_0 = m\vec{a}_0$

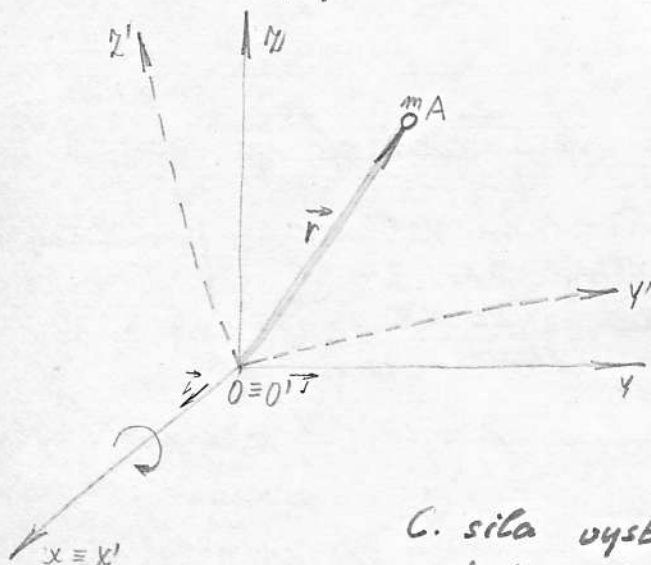
Take súst. sú neinerciálne. (Rozbiehajúce sa teleso)

Teleso sa snaží zachovať svoj pôvodný stav.

Vzniknú zotrvačné sily.



c, $x'; y'; z'$ sa otáča vzhl. na x, y, z ; konšt. uhl. rýchlosťou
V $x'; y'; z'$ sa pohybuje km. bod s rýchl.: $\vec{v}'$



$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{r}' &= x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} (x, y, z) &- f(t) \\ (x', y', z') &- f'(t) \\ (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) &- f(t) \\ (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') &- f'(t) \end{aligned} \right.$$

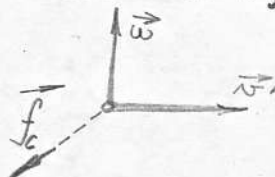
$$\vec{f}' = \vec{f} + \vec{f}_0 + \vec{f}_c$$

$$\text{note, s. } m\vec{r} \cdot \omega^2 \quad \text{Coriolisova} \quad -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

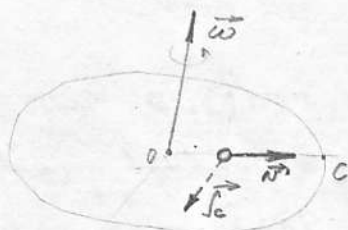
ná úr. pozorovateľom P'

c. sila vystupuje len ak v otáč. sa sústave
pohybuje km. bod s rýchl. $\vec{v}' \neq 0$

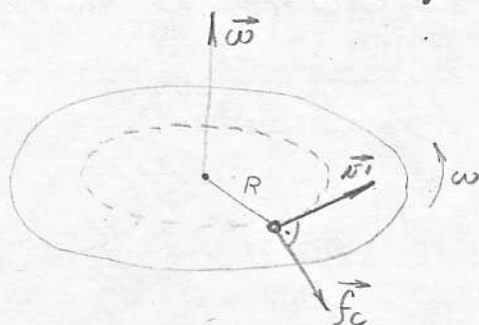
$$\vec{f}_c = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega})$$



Rech km. b. sa poh. v smere polomeru s rýchl. $\vec{v}'$ na
kruhovej doske, ktorá sa otáča konšt. uhl. rýchl. vzhl. nosu $\perp$.



Hm. 6. koná' kruh. pohyb s rychl. $\vec{v}$ po kruh. doske obáčají-
cej sa konst. uhl. rychl. $\vec{\omega}$



$$v' ; \omega \dots v_r = R \cdot \omega$$

$$P: N = N_r + N'$$

$$f_{\text{dost.}} = \frac{m}{R} (v_r + v')^2$$

$$f_{\text{dost.}} = \frac{m v_r^2}{R} + \frac{m v'^2}{R} + \frac{2 m v_r \cdot v'}{R}$$

$\frac{\text{síla gds. ot. kruh. d.}}{\text{odstredivá síla}} \quad \frac{\text{rifpolára's } v'}{2 m v_r \omega = f_c}$

Coriol. s. závisí od hmotn. otáč. sa telesa (a od $\vec{v}$; $\vec{\omega}$)

Pohyb na povrchu zemskom.

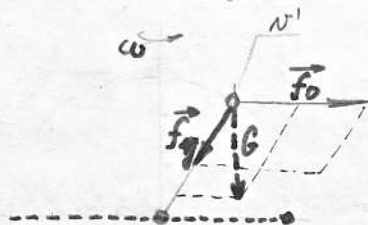
- 1.) Z... obieha okolo Slrika $R_s = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$ } revolučný pohyb
- 2.) otáčanie okolo vl. osi. $N = 29,8 \text{ km s}^{-1}$ } rotácia.

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = \frac{2\pi}{86400} \text{ s}^{-1}$$

Pohyb Z na určitý čas možno pokladať za priamočiarij.
($a_m = 0,0058 \text{ m s}^{-2}$)

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

Z možno pokl. za inerc. sústavu. (vzhl. na 1. pohyb)



$$\vec{f}_o = m \vec{r} \omega^2 \sim \text{odstrediv. s.}$$

$$\vec{f}_g \sim \text{gravit.}$$

$$\vec{f}_c = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

N' (pohyb hm. b. na povr. Z)

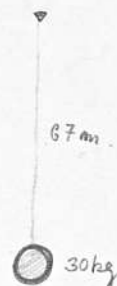
$$f_o = m \cdot \omega^2 \cdot R \cos \varphi = m \left(\frac{2\pi}{86400} \right)^2 \cdot 6378 \cdot 10^3 \text{ /ak } \varphi = 0$$

$$= m \cdot 0,0036 \text{ m s}^{-2}$$

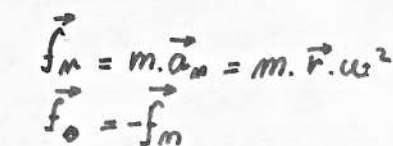
$$G = m \cdot g = m \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

$$f_o \approx \frac{1}{3} \% G$$

Z povrchu $\equiv$ inerc. súst.



1851. Foucault. - clôkaz otač. sa zeme:
Fouc. kyvadlo:



$$\vec{f}_k = m \vec{a}_k$$

$$f_m = m \cdot \vec{a}_m = m \vec{r} \cdot \omega^2$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_t + a_n \cdot m \\ m \cdot \vec{a} &= m \vec{a}_t + m \vec{a}_n \\ \vec{f} &= \vec{f}_t + \vec{f}_n\end{aligned}$$

1046

200

1. časový účinok sily (podľa času, noktal'sila násobi)
2. dráhový — (— dráhy noktovej " ")

61

$$d\vec{J} = \vec{f} \cdot dt$$

1 dt element. čas, za kory sila f pòsobi

Element. učinok sily : $d\vec{J}$ naz. sa impuls.

ak $\vec{f} = \int \vec{f} \cdot dt$ / $f = \text{konšt.}$

$$\vec{J} = f \cdot \int dt = \vec{J}t \rightarrow J = f \cdot t$$

S.I.: $IN.s = kg.m.s^{-2}.s = kg.m.s^{-1}$

$$\vec{J} = \int \vec{f} \cdot d\vec{t} = \int m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{t} = \int m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{t} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \cdot d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = H_2 - H_1 = \Delta H$$

$$\vec{H} = m\vec{v} \sim \text{hybnost}$$

Impulz sily sa rovná zmena hybnosti hmotného bodu za ten čas,
dokedy má sila na hm. bod uplyv. $H = m \cdot v$

$$H = m \cdot v$$

Jednotka hybnosti v SI: $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

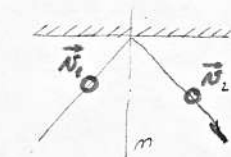
Príklad formulácia druhého pohybového zákona:

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad \sim \text{časová zmena hybnosti}$$

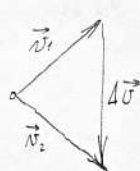
Sila f ; pôsobíaca na hm. bod sa rovná časovej zmene
hybnosti hmotného bodu.

Príklad: Lopta hmotnosti $m=0,2$ narazila na stenu pod uhlom $\alpha=60^\circ$ a bez strat rýchlosti sa od steny odrazila pod rovnakým uhlom. Vypoč. strednú hodnotu sily f na ňu pôsobiacu ak rýchlosť lopty bola $v=5 \text{ m/s}$. Náraz trval $t=0,05 \text{ s}$.

$$\begin{aligned} m &= 0,2 \text{ kg} \\ \alpha &= 60^\circ \\ v &= 5 \text{ m/s} \\ t &= 0,05 \text{ s} \\ f &=? \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \Delta\vec{v} &= \vec{v}_2 \\ \Delta\vec{v} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| &= 2v \cos \alpha \end{aligned}$$



$$\vec{J} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad ; \quad \vec{J} = \vec{f}t$$

$$J = m(v_2 - v_1)$$

$$ft = m(v_2 - v_1) \Rightarrow f = \frac{m(v_2 - v_1)}{t}$$

$$f = \frac{m \cdot 2v \cos \alpha}{t}$$

$$f = \frac{0,2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0,5}{0,05} = 20 \text{ N}$$

Práca a výkon

Pre hodnotu späťového účinku zavádzame novú f . veličinu - prácu.
Sila vykoná prácu; ak sa jej pôsobisko pohybuje.

$$A = \int \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

1. $f = \text{konšt.}$

$$A = \int f ds \rightarrow A = \vec{f} \cdot \vec{s} \cdot \cos \alpha$$

$\sim$ skalárna veličina.



2. $\alpha = \text{konšt.}$

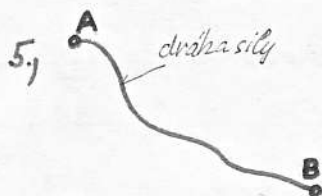
$$\vec{f} \parallel \vec{s} \Rightarrow A = f \cdot s$$

3. $\vec{f} \perp \vec{s}$

$$\vec{f} \perp \vec{s} \Rightarrow A = 0$$

4. $\vec{f} \neq \text{konšt.}$

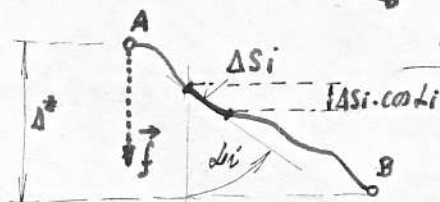
$$A = \int \vec{f} \cdot d\vec{s}$$



$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$A = \int (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$



$$A^* = \sum_{i=1}^n \Delta s_i \cos \alpha_i$$

$$\Delta A_i = \vec{f} \cdot \Delta \vec{s}_i \quad | \quad f = \text{konšt.}$$

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n f \cdot \Delta s_i \cdot \cos \alpha_i = f \sum_{i=1}^n \Delta s_i \cos \alpha_i$$

Jednotka práce: v SI. $1 \text{ Joule} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-2}$
 1 Joule - vykoná síla 1 N na 1 m dráhy.

v technike: $1 \text{ kpm} = 9,81 \text{ Nm} = 9,81 \text{ J}$

v CGS: $1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn} \cdot 1 \text{ cm}$.

$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 10^5 \cdot 10^2 \text{ cm dyn} = 10^7 \text{ dyn cm} = 10^7 \text{ erg}$.

$1 \text{ kpm} = 9,81 \text{ Nm} = 9,81 \text{ J} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg}$.

Výkon:

okamžitý výkon: $N = \frac{dA}{dt}$

Výkon představuje práci vykonanou za jednotku času. Ak sa práca rovnomerne zväčšuje s časom; potom výkon $N = \frac{A}{t}$ (stredný výkon)

$N = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = f \cdot v \cdot \cos \alpha$ ~ skáľarový súčin



ak: $\alpha = 0$ $\vec{f} \parallel \vec{v}$

$$N = f \cdot v$$

Jednotka výkonu: $N = \frac{A}{t}$

1) v SI.: $1 \text{ Wat} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}}$

2) v techn. $\text{kpm} \cdot \text{s}^{-1}$ | $\frac{1 \text{ kpm}}{1 \text{ s}} = \frac{9,81 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 9,81 \text{ W}$

3) CGS: $1 \text{ erg} \cdot 1 \text{ s}^{-1} = \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$

$1 \text{ k (kôň)} = 75 \text{ kpm/s} = 75 \cdot 9,81 \text{ W} = 736,7 \text{ W} \approx \frac{3}{4} \text{ kW}$

$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$

$1 \text{ HP} = 745,7 \text{ W} \quad 746 \text{ W} \quad 746 \text{ W} \quad 746 \text{ W}$

$dA = \int N dt$; keď $N = \text{konšt.}$, potom $A = N \int dt = Nt$ $A = N \cdot t$

Jednotka práce: $1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$

$3600 \text{ J} = 1 \text{ Wh} = 1 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 1 \text{ Wh}$

$3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s}$

Práca ktorú sa nazýva príkonnosť stroja za jednotku času sa nazýva príkonnosť N_0

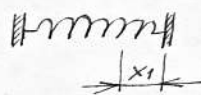
Práca vykonaná strojom za jednotku času je výkon: N

Pomer výkonu ku príkonu def. novú fyz. veličinu:

Účinnosť stroja: $\eta = \frac{N}{N_0} = \frac{\text{výkon}}{\text{príkonnosť}}$

Aká práca sa vykoná pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o 5cm, ak na jej stlačenie o 1cm treba silu $f_1 = 3000 \text{ kN}$; ak síla je úmerná stlačeniu pružiny.

$$\begin{aligned} x_0 &= 5 \text{ cm} \\ x_1 &= 1 \text{ cm} \\ f &= 3000 \text{ kN} \\ A &= ? \end{aligned}$$



$$A = \int \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$f = kx \rightarrow k = \frac{f_1}{x_1} = \frac{3000 \text{ kN}}{10^{-2} \text{ m}}$$

$$A = \int \vec{f} \cdot d\vec{x}$$

$$\begin{aligned} \vec{f} \parallel \vec{x} \Rightarrow A &= \int \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int f \cdot dx = \int kx \cdot dx = k \int_0^5 x \cdot dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{1}{2} k (5 \cdot 10^{-2})^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{10^{-2}} (5 \cdot 10^{-2})^2 \\ A &= 375 \text{ kJm} \end{aligned}$$

Pojem energie; zákon zachovania premeny energie.

I. stav } zmena jedného stavu do druhého charakteri-
II. stav } zuje f. veličina - energia.

I.	II.	
E_I	1, I. $\rightarrow$ II.	$\Delta E = E_{II} - E_I = A$
$\Delta E = E_{II} - E_I$	2, II. $\rightarrow$ I.	$E'_I - E_{II} = A'$
$\Delta E \sim A$		$A = -A' \sim \text{čo do veľkosti}$
$\Delta E = kA$	$E_{II} \quad E_I$	$E_I = E'_I$
$k=1 \quad \Delta E = A$		

Energia v izolovanej sústave zostáva konštantná pri všetkých dejoch, pokiaľ energia môže sa zmeniť z jednej formy do druhej; ale veľkosť ostáva konštantná. To je zákon zachovania energie.

Energia mechanickej sústavy

1. Energ. kinetická (pohybová)
2. E. potenciálna (polohová)

1. Dostaneme ak výp. prácu, ktorú je potrebné vykonať pri prechode telesa z pohybového stavu v_1 do p.s. v_2

$$A = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 \\ \vec{v} d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v} = 2v dv \\ 2\vec{v} \cdot d\vec{v} = 2v dv \end{array} \right.$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 \sim \text{pohybová energia} \quad v \neq 0$$

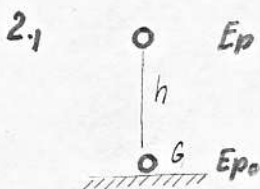
Práca je rozdiel kinetickej energie.

Veta o kin. energii

Práca vonk. sil pôsobiacich na pohyb sa km. bod rovná sa prírastku kin. energie km. bodu.

Pr. $m = 500 \text{ kg}$ } auto. Akou silou treba brzdiť; aby sa zastavil na dráhe $s = 20 \text{ m}$
 $v_0 = 72 \text{ km/h}$

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2 \\ A = f \cdot s \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \cdot s = -\frac{1}{2} m v_0^2 \\ f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m v_0^2}{s} = -\frac{50 \cdot 400}{40} = -5000 \text{ N} \end{array}$$



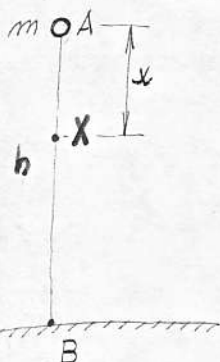
2. $A = G \cdot h$ - práca (pri zdvihn. tel.)
 sa spotrebuje na zvýšenie p. energie tel. (vzhľadom na povr. zemského.)

$$A = E_p - E_{p0} \quad - \text{ak en. rot. telesa } E_{p0} = 0:$$

$$E_p = A = G \cdot h = m \cdot g \cdot h \sim \text{potenc. energia.}$$

Teleso po dopade na povr. zeme vykoná prácu (rot. energ.)

Zákon zachovania a premeny mech. energ.



$$E_{kA} = 0 \quad (v=0) \quad E_{pA} = m \cdot g \cdot h \quad \left\{ E_{mA} = E_{kA} + E_{pA} = mgh \right.$$

Ak tel. z výšky h dop. do bodu B; v mom. dopadu $E_p = 0$ ($h = 0$). $E_{kB} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2$

$$E_{kB} = \frac{1}{2} m \cdot 2h \cdot g = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{mB} = E_{kB} + E_{pB} = m \cdot g \cdot h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = g \cdot t \\ h = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ v = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \end{array} \right.$$

$$E_{px} = m \cdot g \cdot (h - x) = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot x$$

$$E_{kx} = \frac{1}{2} m (v_x)^2 = \frac{1}{2} m (2gx) = m \cdot g \cdot x$$

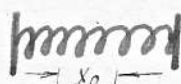
$$\left\{ E_x = E_{kx} + E_{px} = mgh \right.$$

Súčet rot. a kin. energie sa rovná $m \cdot g \cdot h$

(hybrid)

Pre izolovanú mech. sústavu celková mech. energia; ktorá je daná súčtom $E_k + E_p$; nastáva konšt.
Úbytok kin. energ. vedie k rastu pot. energ. a naopak.

Pot. energ. napnutej (stl.) pružiny.



$f = k \cdot x$ k - konšt. úmernosti. Je závislá na elastických vlastnostiach pruž.

Práca A ; ktorú vyk. vonkajšie sily pri stlač. pruž.

$$A = \int_0^{x_0} f \cdot dx = \int_0^{x_0} kx \cdot dx = \frac{1}{2} k x_0^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{zvyší p. energ.} \\ \text{danej pružiny.} \end{array} \right)$$

$$A = E_p - E_{p_0} \quad \left| \begin{array}{l} E_p - \text{p.e. napnutej pruž.} \\ \text{(stlač. } \sigma \text{ } x_0 \text{ od rovnov.)} \\ E_{p_0} - \text{p.e. nenapnutej pr.} \end{array} \right.$$

$$E_p = A = \frac{1}{2} k x^2 \quad \sim \text{energ. pružiny.}$$

Gravitačné pole.

Newtonov gravitačný zákon. (gravitačné sily)

Keplerove zákony - opisujú pohyb planét.

1. Pl. sa poh. po elipsach. Spol. ohnisko je Slnko.
2. Plochy opísané sprievodicom za rovnaké doby sú rovnaké. (plošná rýchlosť: $p = \frac{ds}{dt} = \text{konšt.}$)

$$3. T^2 = c \cdot a^3 \quad \left| \begin{array}{l} T - \text{obežná doba} \\ a - \text{veľká poloos} \\ c - \text{konšt. (závisí na vl. Slnka)} \end{array} \right.$$

Ústrednosť elypt. dráh je pomerne malá: $\epsilon_2 = 0,0167$



$$v = \text{konšt} \rightarrow a_t = 0 \rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$(K.2) \quad f = m \cdot a = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$(K.3) \quad = (m \cdot 4\pi^2 r) : c \cdot r^3 = \frac{4\pi^2 m \cdot c^{-1}}{K} \cdot r^{-2}$$

$$= K \cdot m \cdot \frac{1}{r^2}$$

Je sila, akou pôsobí slnko na planétu.

(ale aj pl. pôsobí na slnko: $f' = K' \cdot M \cdot \frac{1}{r^2}$)

$K' = \text{konšt}$ (závisí od vlastn. plan.)

Podľa 3. New. z.: $f = f' \rightarrow K \cdot m = K' \cdot M$

Všeobecná gravitačná konšt. $\frac{K}{M} = \frac{K'}{m} = \dots = \text{konšt.} = k = 6,67 \cdot 10^{-11}$

$$k = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Pomocou Zorzných váh to určil v r. 1788 Cavendish.

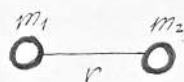
$$K = k \cdot M$$

$$K' = k \cdot m$$

$$f = \frac{k \cdot m \cdot M}{r^2}$$

$$f' = \frac{k \cdot m \cdot M}{r^2}$$

(sila priťahovania sa planét.)



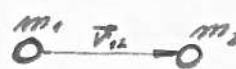
Newt. grav. z.

2 hm. body o hmotnosti m_1 a m_2 ; ktoré sú vo vzd. r pôsobia na seba grav. silou: f .

$$f = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

(platí len pre hmotné body; príp. pre homogénne guľové telesá)

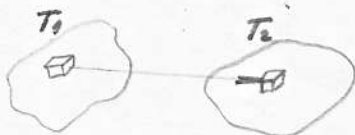
Vektorový tvar gr. zákona:



$$\vec{f}_{12} = -k \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}_{12}$$

pozn.: $|\vec{r}_{12}| = r$

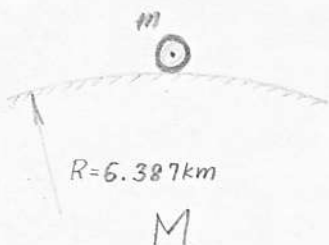
Urc. grav. sily pri telies:



$$d\vec{f} = -k \frac{dm_1 \cdot dm_2}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{f} = -k \iint_{T_1 T_2} \frac{dm_1 \cdot dm_2}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Grav. silové sp. telies je spôsobené existenciou gravit. polá (forma matérie)



$$f_0 = k \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \quad - \text{grav. z.}$$

$$f_0 = m \cdot g_0 \quad - \text{pohybový zákon}$$

$$g_0 = k \frac{M}{R^2} \quad / \quad \begin{array}{l} M \text{ hmotnosť Zeme} \\ R \text{ polomer Z.} \end{array}$$

Zrýchlenie voľného pádu na póloch je väčšie ako na ekv.

Zmena grav. sily v závislosti o výške:



$$f = k \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}$$

$$f_0 = k \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

$$\frac{f}{f_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow f = f_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

25. III. 1969.

Napr. pre $h = 6.400 \text{ m}$ $f = 0,998 f_0$ (0,2%)

V okolí hm. telies ex. silové pôsobenie - grav. pole.

V popisu grav. p. je výhodné zaviesť:

1. Intenzitu grav. pola
2. Potenciál " "

① m - vylv. gr. pole; na skusný hm. bod pôsobí (m')
grav. sila $\vec{f}$; pomer: $\frac{\vec{f}}{m'} = \vec{E}$ ~ intenz. gr. p.
Int. gr. p. je vektor. veličina.

Ak $m' = 1 \Rightarrow \vec{E} = \vec{f}$

1° Intenz. gr. p. od jediného hm. bodu.



$$\vec{f} = -k \frac{m' \cdot M}{r^2} \cdot \vec{r}$$

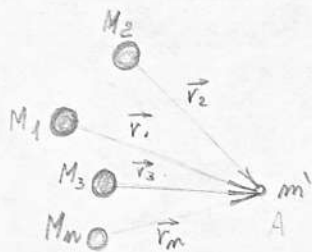
$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{m'} = -k \cdot \frac{M}{r^2} \vec{r} \quad \sim \text{int. grav. pola v mieste daného}$$

$$\vec{E} = -k \frac{M}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

$$E = k \frac{M}{r^2}$$

2° Int. gr. p. - sústavy hm. bodov.

20



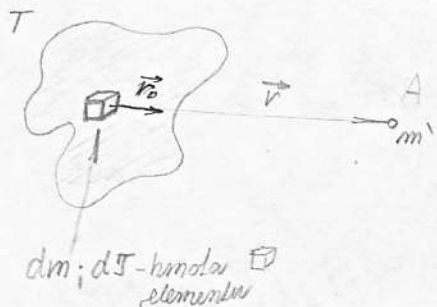
$$\left. \begin{aligned} \vec{f}_1 &= -k \frac{M_1 m'}{r_1^2} \cdot \vec{r}_1 \\ \vec{f}_2 &= -k \frac{M_2 m'}{r_2^2} \cdot \vec{r}_2 \\ &\vdots \\ \vec{f}_n &= -k \frac{M_n m'}{r_n^2} \cdot \vec{r}_n \end{aligned} \right\} \vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \dots + \vec{f}_n$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{m'} = \frac{\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots + \vec{f}_n}{m'} = \frac{\vec{f}_1}{m'} + \frac{\vec{f}_2}{m'} + \dots + \frac{\vec{f}_n}{m'} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = -k \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i^2} \cdot \vec{r}_i$$

Int. gr. polá - sústavy hm. b. na rovnú súčtu intenzit.

3° Int. gr. p. - telesa s nepravidelným hm. rozložením.



$$d\vec{E} = \frac{d\vec{f}}{m'} \quad d\vec{f} = -k \frac{dm m'}{r^2} \cdot \vec{r}$$

$$d\vec{E} = -k \frac{dm}{r^2} \cdot \vec{r} \quad / \quad \vec{r} = r \vec{r}_0$$

$$d\vec{E} = -k \frac{dm}{r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad \sim \text{int. grav. p. od elementu.}$$

$$E = \int -k \frac{dm}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = -k \int \frac{\rho \cdot dT}{r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad / \quad \rho - \text{hustota } T, dT - \text{elem. hm.}$$

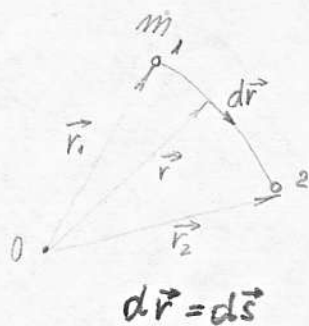
Jednotka int. grav. polá: $E = \frac{f}{m}$

$$[E]_{SI} = \frac{1N}{1kg} = \frac{1kgms^{-2}}{1kg} = ms^{-2}$$

Ak grav. sily premiestnia hm. b. z polohy 1 do p.2; vykonajú prácu.

polá
láre $\vec{r}$

Práca grav. polá.



$$A = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int k \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$= -k \cdot M \cdot m \cdot \int \frac{dr}{r^2}$$

$$= -k M m \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -k M m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$A = -k M m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} \\ E_{p1} &= -k \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_1} \\ E_{p2} &= -k \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot d\vec{r} &= \text{skal. súčin} \\ \vec{r} \cdot \vec{r} &= r^2 \\ \vec{r} \cdot d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \vec{r} &= 2r dr \\ \downarrow \\ \vec{r} \cdot d\vec{r} &= r \cdot dr \end{aligned}$$

Potenc. energia grav. polá : $E_p = -k M m \cdot \frac{1}{r}$

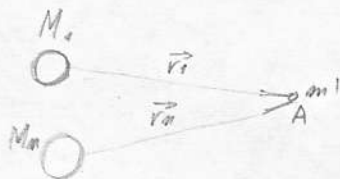
Potenciál grav. polá : $V = \frac{E_p}{m}$

1° Pot. gr. p. - jediného km. bodu.



$$V_A = \frac{E_p}{m'} = -k \cdot \frac{M}{r}$$

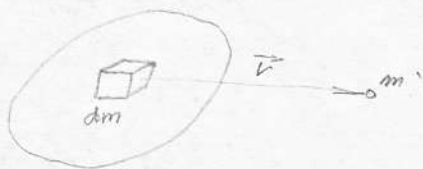
2° Pot. od sústavy km. bodov.



$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = -k \sum_{i=1}^n M_i \frac{1}{r_i}$$

3° Pot. od telesa s pravid. rozlož. hmotnosti



$$dV = -k dm \frac{1}{r}$$

$$V = -k \int \frac{dm}{r} = -k \int \frac{\rho \cdot dT}{r}$$

Jednotka potenciálu : $V = \frac{E_p}{m} = \frac{J}{m} = \frac{kg m^2 s^{-2}}{kg} = 1 m^2 s^{-2}$

$$[V]_{SI} = 1 m^2 s^{-2} \quad [V]_{techn} = \frac{kg m}{dag}$$

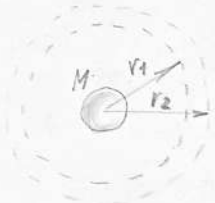
Súvis medzi intenz. a potenciálom.

$$dA = -dE_p \quad dA = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p \quad / \cdot \frac{1}{m}$$

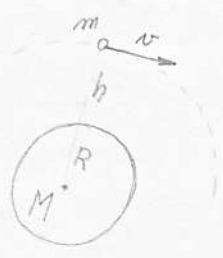
$$\frac{\vec{f}}{m} \cdot d\vec{r} = -\frac{dE_p}{m} \quad \left| \frac{\vec{f}}{m} = \vec{E} \quad \frac{E_p}{m} = V \right.$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$



Plochy s rovnakým potenciálom:
ekvipotenciálne plochy (hladiny)

Prvá a druhá kozmická rýchlosť



1. kozm. rýchlosť - ktorú treba telesu na povrchu zemskom vo vodorov. smereu odovet, aby sa pohyb. po kruhovej dráhe.

$$\left. \begin{array}{l} a.) \text{ gravit. sila: } f_g = k \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \\ b.) \text{ dostr. s.: } f_d = m \frac{v^2}{(R+h)} \end{array} \right\} f_g = f_d$$

$$\Downarrow$$

$$N_I^2 = k \cdot \frac{M}{R+h} \quad \text{ak } h \ll R$$

$$N_I^2 = k \frac{M}{R} \quad / \cdot \frac{1}{R}$$

Na povrchu zeme $f_o = k \frac{Mm}{R^2}$

$$\left. \begin{array}{l} f_o = gm \\ f_o = k \frac{Mm}{R^2} \end{array} \right\} g = k \frac{M}{R^2} \quad \frac{N_I^2}{R} = k \frac{M}{R^2} = g$$

$$N_I = \sqrt{g \cdot R} \quad \left| \begin{array}{l} g = 9,81 \text{ m/s}^2 \\ R = 6378 \cdot 10^6 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$N_I = \sqrt{\dots} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

prvá kozmická rýchlosť: $N_I = 7,9 \text{ km/s}$

telesá vyst. s v_I sú umelé družice zeme.

Druhá kozmická rýchlosť.



Teleso vystr. z povrchu zemského zvrstle s v_{II} už sa na p.z. nevráti.

$$E_k + E_p = \text{konšt.}$$

$$a.) \quad v_{\infty} = 0 \rightarrow \underbrace{E_k = 0 ; E_p = 0}_{E_k + E_p = 0}$$

$$b.) \quad \text{Na pov. zemskom: } E_k + E_p = 0$$

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2} m v_{II}^2 \\ E_p = -k \frac{mM}{r} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m v_{II}^2 - k \frac{mM}{r} = 0$$

$$2k m M = m v_{II}^2 r$$

$$v_{II}^2 = 2kM \cdot \frac{1}{r}$$

$$/ g = k \frac{M}{R^2}$$

$$v_{II} = \sqrt{2gR}$$

$$v_{II} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6378 \cdot 10^3} = 11,2 \text{ km/s}$$

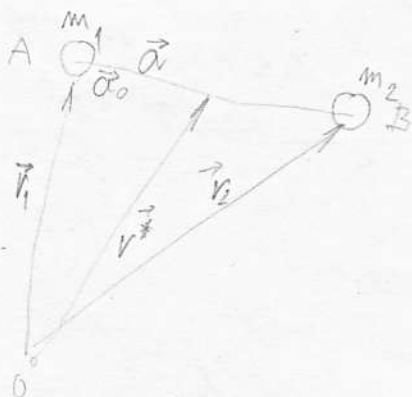
Tretia kozm. rýchľ. - aby sa teleso dostalo z príťažlivosti slnka. $v_{III} = 42,1 \text{ km/s}$

$$v_{zeme} = 29,8 \text{ km/s}$$

$$\Delta v = v_{III} - v_z = 12,3 \text{ km/s}$$

Δv - tlačilo by; keby neboli grav. sily spôs. zemoú.
(v skutočnosti $v_{III} = 16,7 \text{ km/s}$ ~ v smere pohybu Zeme)

Co.



$$\vec{v}^* = \vec{v}_1 + \vec{a} = \vec{v}_1 + a \cdot \vec{a}_0 \quad | \quad a : AB = m_2 / (m_1 + m_2)$$

$$\vec{v}^* = \vec{v}_1 + \frac{AB \cdot m_2}{m_2 + m_1} \cdot \vec{a}_0$$

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2 + \vec{v}_2 m_2 - \vec{v}_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Dynamika sústavy hm. bodov; alebo teles A

Teleso: súbor atómov, molekúl, iónov. - hmotných bodov; ktoré sú vo malej vzdial. od seba; a na ktoré pôs. veľké sily:



$\vec{f}_i \dots$ vnútorné
 $\vec{F}_i \dots$ vonkajšie

$$\left. \begin{array}{l} \vec{f}_i \dots \text{vnútorné} \\ \vec{F}_i \dots \text{vonkajšie} \end{array} \right\} m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^m m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^m \vec{f}_i + \sum_{i=1}^m \vec{F}_i \quad \vec{a}_i - \text{zrýchlenie hm. bodu } m_i$$

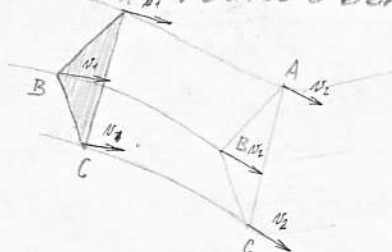
$$/ \sum \vec{f}_i = 0 \sim \text{zákon akcie a reakcie}$$

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i \sim \text{pohybová rovnica pre teleso v obecnom vyjadrení.}$$

Rozoznávame 3 nákl. pohyby telesa:

- 1, postupný (translačný) pohyb
- 2, otáčivý (rotáčny)
- 3, zložitý - ktorý možno rozkl. na 1, a 2,

Postupný pohyb: vs. body telesa opisujú rovnaké dráhy a majú rovnaké rýchlosti (zrýchl.). Každá rovina v telese je pri pohybe rovnobežná s pôvodnou polohou.



ak zrýchl. každého hm. bodu je rovnaké: $\vec{a}_i = \vec{a}$



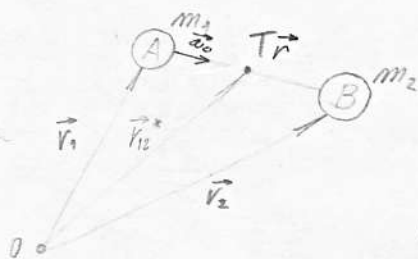
$$\vec{a} \cdot \sum m_i = \sum \vec{F}_i \quad / \sum m_i = m \text{ hmotnosť telesa}$$

pohybová rovnica:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$/ \sum \vec{F}_i = \vec{F} \text{ celková sila}$$

Hmotný stred (ťažisko) telesa.



T - delí spojnicu telies v pomere obrátenej ich hmotnosti

$$AT : TB = m_2 : m_1$$

$$\text{alebo } AT : (AB) = m_2 : (m_1 + m_2)$$

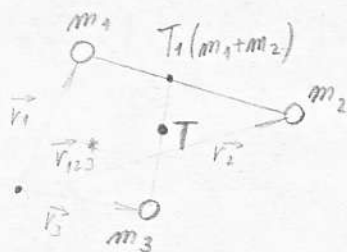
$$\vec{r} = r \cdot \vec{a}_0$$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{AB}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_{12}^* = \vec{r}_1 + \vec{a} \\ \vec{r}_{12}^* = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = AT = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot AB = \\ = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot AB \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{AB} \end{array}$$

$$\vec{r}_{12}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_1 \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_1}{m} \quad \vec{r}$$

$$\vec{r}_{12}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$



$$\vec{r}_{123}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Táž. sústavy hm. bodov:

$$\vec{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \left| \sum_{i=1}^n m_i = m \right.$$

Súradnice ťažiska:

$$x^* = \frac{\sum m_i x_i}{m} \quad y^* = \frac{\sum m_i y_i}{m} \quad z^* = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

Určenie polohy ťaž. telesa so spojito rozlož. hmotnosťou:

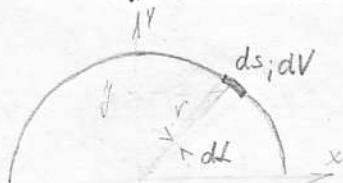
$$\vec{r}^* = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \quad / \text{ak } \rho = \text{konšt} \Rightarrow dm = \rho dV$$

$$\vec{r}^* = \frac{\int \vec{r} \cdot \rho \cdot dV}{m} \quad \sim m = \int dm$$

Súradnice:

$$x^* = \frac{\int x dm}{\int dm} \quad y^* = \frac{\int y dm}{\int dm} \quad z^* = \frac{\int z dm}{\int dm} \quad \left| \int dm = m \right.$$

Pr.: vyp. polohu ťažiska do polkruhu ohnuteho drôtu s hm. M ; polomer r .



$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ y^* &= \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int y \rho \cdot dV}{M} = \frac{\int r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{M}{\pi r} \cdot r \cdot d\varphi}{M} \\ &= \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{r}{\pi} [-\cos \varphi]_0^\pi \\ &= \frac{r}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2r}{\pi} = y^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{polomer: } r &\rightarrow dV = ds \cdot r = r \cdot d\varphi \cdot r \\ \text{hmota: } \rho &= \frac{M}{\pi r} \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Poloha ťažiska sústavy hm. bodov:

$$\vec{r}^* = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$



Určenie ťažiska.

$$m \cdot \vec{r}^* = \sum m_i \vec{r}_i \quad / \text{nder.}$$

$$\frac{m d\vec{r}^*}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}^*}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

$$m \cdot \vec{a}^* = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_i$$

Pre postupný pohyb:

$$\vec{a}_i = \vec{a}^* \quad \left| \quad \sum m_i = m \quad \right| \quad m \cdot \vec{a}^* = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Veta o pohybe ťažiska:

Ťaž. sústavy hm. bodov (v. telesa) sa pohybuje tak; akoby sa pohyboval hm. bod o hmotnosti telesa; keby naň pôs. sila; rovná vektor. súčtu vš. vonkajších sil.

zložitý pohyb: $\sum \vec{F}_i = \sum m_i \cdot \vec{a}_i$
 $\vec{F} = m \cdot \vec{a}^*$

$$\left| \begin{aligned} \sum \vec{F}_i &= \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \frac{d}{dt} (m_i \cdot \vec{v}_i) \\ &= \sum \frac{d}{dt} \vec{H}_i = \frac{d}{dt} \sum \vec{H}_i \\ \sum \vec{F}_i &= \sum \frac{d\vec{H}_i}{dt} \end{aligned} \right|$$

1. Veta impulzová:

$$\vec{F} \cdot dt = d\vec{H}$$

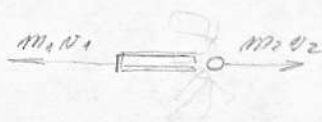
Vekt. súčet vš. vonk. sil. na teleso pôsobiacich sa rovná časovej zmene hybnosti telesa.

V. je rovnocenná s vetou o pohybe ťažiska.

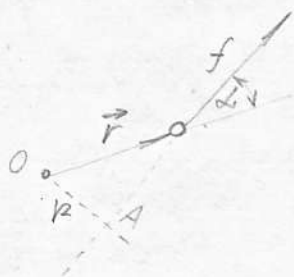
Pre izolovanú sústavu $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0$; $\Rightarrow \frac{d\vec{H}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{H} = \text{konst.}$

Zákon zachovania hybnosti:

Pre iz. súst. hybnosť je konštantná.



$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

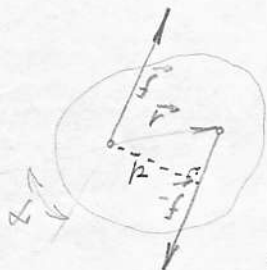


$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{f} \sim \text{moment sily. } D = r \cdot f \cdot \sin \alpha$
 r - priemet vektora do kolmého smeru na silu.
 - rameno sily

$$D = r \cdot f \cdot \sin \alpha = f \cdot r$$

Jednotka momentu sily: $[D]_{SI} = 1N \cdot 1m = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

$$[D]_{tech} = 1kp \cdot m$$



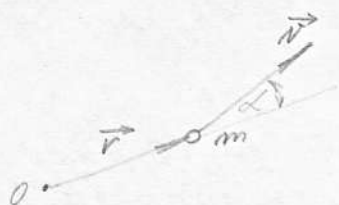
Dvojica sil.

Dvojicu sil nie je možné nahradiť jedinou silou.

Ma' na teleso otáčavý účinok

Moment dvojice sil: $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{f} \quad D = r \cdot f \cdot \sin \alpha \quad \left| \quad r \cdot \sin \alpha = r \right|$
 r - rameno dvojice sil.

Moment hybnosti



$$\vec{G} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

$$G = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha$$

- charakt. pohybový stav

Súvis medzi $\vec{D}$ a $\vec{G}$:

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})$$

II. Veta
impulzová.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \\ &= \underbrace{\vec{v} \times m \vec{v}}_0 + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) \end{aligned} \right\}$$

(lebo $\vec{v} \parallel m \vec{v}$ a $\sin 0^\circ = 0$)

$$\vec{D} = \dots = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$\vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

Mom. sily = časová zmena
mom. hybnosti

Platí aj pre sústavu ťm. bodov:

$$\vec{D} = \sum \vec{D}_i \quad \vec{G} = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

Vekt. súčet momentov vs. vonk. sil na teleso pôsobiacich sa rovná celkovej zmene momentu hybnosti telesa.

Pre izol. sústavu. $\vec{D} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{G}}{dt} = 0 \Rightarrow G = \text{konšt.}$

Zákon zachovania momentu:

Pre iz. s. moment hybn. telesa je konštantný.

$$1, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

$$2, \quad \vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

} pohybové rovnice
túkeho telesa.

ak $v=0$; $a=0$; $F=0$; $D=0$ } Podmienky rovnováhy. t.t.

Princíp (fyzikálny) raketového leta -

riešime na základe zachovania hybnosti:

$$t \dots m \dots \vec{v} \quad \vec{H}_t = m \cdot \vec{v}$$

$$dt \dots dm' \dots d\vec{v} \quad \vec{H}_{t+dt} = (m - dm')(\vec{v} + d\vec{v}) + dm' \cdot \vec{u}$$

$\vec{u}$ - únik paliva



$$m \cdot \vec{v} = (m - dm')(\vec{v} + d\vec{v}) + dm' \cdot \vec{u}$$

$$\begin{cases} m \cdot \vec{v} = m\vec{v} - \vec{u}dm' + m d\vec{v} - \cancel{dm' d\vec{v}} + dm' \cdot \vec{u} \\ dm' = -dm \sim \text{úbytok hmotnosti } v. = \text{únik plynu} \end{cases}$$

$$+ \vec{u} \cdot dm + m \cdot d\vec{v} + \underbrace{dm \cdot d\vec{v}}_{\text{zanedbateľné}} - \underbrace{dm \vec{u}}_{\text{zanedbateľné}} = 0 \rightarrow$$

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{u} dm - \vec{v} \cdot dm$$

$$m \cdot d\vec{v} = dm (\vec{u} - \vec{v})$$

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m} (\vec{u} - \vec{v})$$

relatívna rýchlosť unikania plynu
vzhľadom na raketu.

$$dv \cdot \vec{p} = \frac{dm}{m} \cdot v_r (-\vec{p})$$

$$dv = -\frac{dm}{m} \cdot v_r$$

$$\leftarrow d\vec{v} = \frac{dm}{m} \cdot \vec{N}_r \quad \left| \cdot \frac{m}{dt} \right.$$

$$\frac{m \cdot d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{N}_r$$

$$\vec{f}_r = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{N}_r$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= N \cdot \vec{p} \\ \vec{u} &= -u \cdot \vec{p} \\ \vec{N}_r &= -v_r \cdot \vec{p} \end{aligned}$$

$$N = -N_r \cdot \lg m_0 + C$$

$$t=0; N=N_0; m=m_0$$

$$N_0 = -N_r \cdot \lg m_0 + C \rightarrow C = N_0 + N_r \cdot \lg m_0$$

$$N = -N_r \cdot \ln m + N_0 + N_r \cdot \ln m_0$$

$$t=0; N_0=0$$

$$N = N_r \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

celková hm.

~ rýchlosť pohybu rakety

rýchlosť úniku plynu

hm. r. bez paliva

$$\text{končná rýchlosť: } N_k = v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m_k}$$

hm. r. bez paliva

platí pre istuprívovú raketu.

$$\text{Ciolkovského číslo: } \frac{m_0}{m_k} = Z$$

$$\rightarrow N_k = v_r \cdot \ln Z$$

Kinetická en. tuhého tělesa.



$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

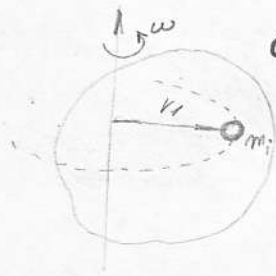
$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

1. Postupný pohyb

$$v_i = v$$

$$E_k = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m v^2$$

2. Otáčavý pohyb okolo pevné osi



$\omega = \text{konst.}$

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad | \quad v_i = r_i \cdot \omega$$

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

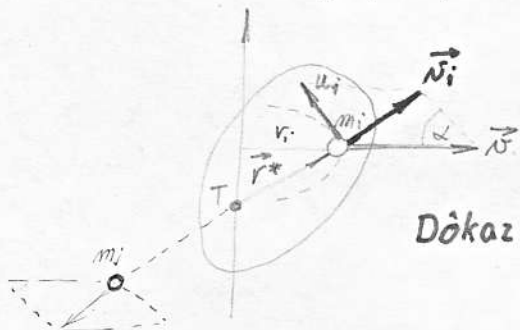
Moment zotrvačnosti tělesa vzhledem na určitou os.:

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J_i = m_i \cdot r_i^2$$

3. Obecný pohyb

- nahradzujeme postupným a otáčavým pohybem.



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

u_i - obvodová rychlost
 $\vec{v}$ - posuvná "

Důkaz: kosin. věta

$$v_i^2 = v^2 + u_i^2 - 2 v u_i \cos \alpha$$

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i v^2 + \frac{1}{2} m_i u_i^2 - m_i v u_i \cos \alpha$$

$$E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i + \frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 - \sum m_i (\vec{v} \cdot \vec{u}_i)$$

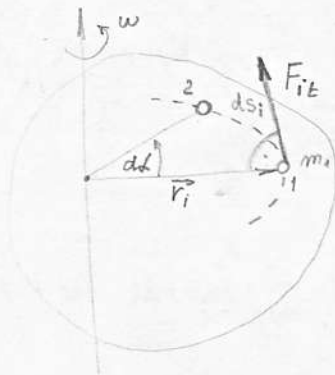
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 - \sum m_i \{ \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i^*) \} =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 - \vec{v} \cdot \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i^*) ;$$

$$\vec{v} \cdot \underbrace{\sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i^*)}_{=0 \text{ (druhá strana ho nul.)}} =$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Pohybová rovnica telesa ; otáčajúce sa okolo pevnnej osi



$$dA = \sum F_i \cdot ds_i$$

$$= \sum F_{it} \cdot r_i \cdot d\varphi$$

$$dA = D \cdot d\varphi$$

$$ds_i = r_i \cdot d\varphi$$

$$F_{it} \cdot r_i = D_i$$

$$dA = dE_k = \frac{1}{2} J \cdot 2\omega \cdot d\omega \quad \left| \quad E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \right.$$

$$D \cdot d\varphi = J \cdot \omega \cdot d\omega \quad \left| \cdot \frac{1}{d\varphi} \right.$$

$$D \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = J \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}$$

$$D \cdot \omega = J \cdot \omega \varepsilon \rightarrow D = J \cdot \varepsilon$$

Moment sily = moment nezrvačnosti \cdot uhlové zrýchlenie.

irektu môžeme odvodiť aj z 2. n. impulzovej :

$$\vec{D} = \frac{d\vec{G}}{dt} \quad \vec{G} = \vec{r} \times \vec{v} m$$

$$D = \frac{dG}{dt} \quad G = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha \quad \left| \alpha = \frac{\pi}{2} \right.$$

$$D = \frac{d}{dt} (r \cdot m \cdot \omega) = \frac{d}{dt} (r \omega^2 m) = \frac{d}{dt} \cdot (J \cdot \omega) = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \cdot \varepsilon$$

$G \sim \text{Ločivosť}$

$$D = J \cdot \varepsilon$$

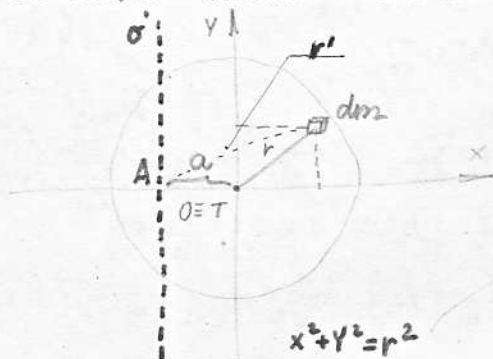
II. netá impulzová
pri ob. pohybe

$$D = \frac{d}{dt} G$$

Moment zotrvačnosti:

Pre telesa so spoj. rozlož. hmotnosťou: $J = \int r^2 dm$

Jednotka mom. zotrvačnosti $N \cdot s^2 = /kgm^2/$



$$J_o = \int r'^2 dm = \int [(a+x)^2 + y^2] dm$$

$$= \int [a^2 + \overset{x^2+y^2}{r^2} + 2ax] dm =$$

$$= \int r^2 dm + \int a^2 dm + \int 2ax dm =$$

$$J_o = mr^2 + ma^2 + 2a \cdot 0 \cdot m$$

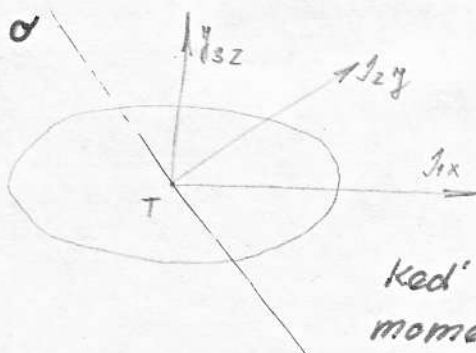
$$x^* = \frac{\int x dm}{m}$$

$$x^* m = \int x dm$$

sym. lož. ; tu $x^* = 0 \rightarrow \int x dm = 0$

$$J_o = mr^2 + ma^2 = J^* + ma^2$$

Steinerova veta: umožňuje výpočet momentu zotrvačnosti vzhľad ku osi neprech. ťažiskom

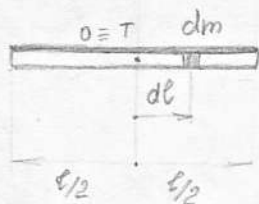


$$J = J_1 \cos^2 \alpha_1 + J_2 \cos^2 \alpha_2 + J_3 \cos^2 \alpha_3$$

Ked' sú známe J_x, J_y, J_z ; vieme si vypočítať moment zotrvačnosti ku ľubov. osi

Pr.

Výp. 1. homog. tyče $l; m$. vzhľadom na os kolmú na smer dĺžky tyče:
a; prech. stredom tyče
b; " konc. bodom tyče.



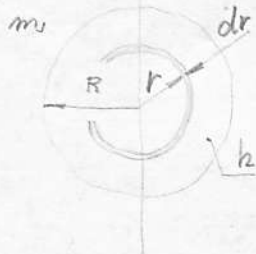
$$J^* = \int x^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} ml^2$$

$$dm = \rho \cdot dV = \frac{m}{l \cdot q} \cdot dl \cdot q$$

$$dm = \frac{m}{l} \cdot dl = \frac{m}{l} dx$$

$$J = J^* + m \cdot a^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2$$

Pr. Vypoč. J homog. kruh. dosky vzhl. na os přech. středem kolmo na rov. dosky. $m; R$



$$J = \int r^2 dm$$

$$dm = \rho \cdot dV = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi R \cdot dr \cdot h = \frac{2m}{R^2} r dr$$

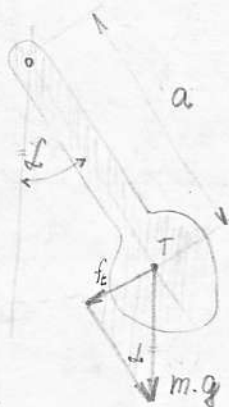
$$J = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

moment vzhl. ku dotyčnici: $J = J^* + m a^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$

Kyvadla - fyzikálne

F.k. - je každé těleso které kývá vpl. vlastní váhy okolo pevné osi nepřech. těžištěm.



$$\begin{cases} D = J \cdot \epsilon \\ D = f \cdot a = G \cdot a \cdot \sin \varphi = -m \cdot g \cdot a \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{f}{G} \rightarrow f = G \cdot \sin \varphi \\ G - \text{opačný účinnok.} \end{array} \right.$$

$$D = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \rightarrow J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{mga}{J} \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \sin \varphi \quad \left| \varphi \ll 50^\circ \rightarrow \sin \varphi \approx \varphi \right.$$

pokřbová rovnice
fyz. kyvadla:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi \sim \text{dif. rovnice}$$



$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

φ_0 - amplitúda

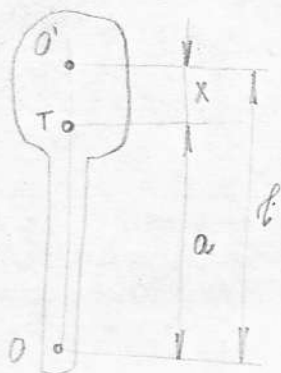
φ - fázoová konšt.

φ - okamž. výchylka

F.k. - tvorí periodický pohyb:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad \sim \text{doba kmitu}$$

$$\text{Doba kyvu: } T = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}}$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{mgx}}$$

$$T = T'$$

$$\frac{J}{a} = \frac{J'}{x}$$

$$J = J^* + ma^2$$

$$J' = J^* + mx^2$$

$$\frac{J^* + ma^2}{a} = \frac{J^* + mx^2}{x}$$

$$J_x^* + ma^2x = J_a^* + max^2$$

$$max^2 - (J^*(ma^2)x + J_a^* = 0$$

$$x_1 = \frac{J^*}{ma} \quad x_2 = a$$

Ex. os O' ; okolo ktorej
kyv. kmitá speriódou
prísl. osi O .

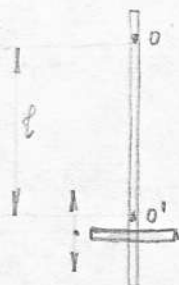
Redukovaná dĺžka
fyz. kyvadla:

$$l = a + \frac{J^*}{ma} = \frac{ma^2 + J^*}{ma} = \frac{J}{ma}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

~ sa využ. pre exper. určenie
optov. zrýchl: $g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l$

Reverzné kyvadlo:



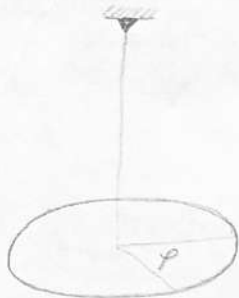
$$T_0 = T_{O'}$$

$$g = (2\pi)^2 T^{-2} \cdot l$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l$$

Torzné kyvadlo.

krúhová doska; upevnená o strede na zvislom vlákne.

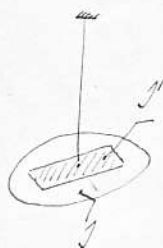


$$\left. \begin{aligned} D &= -D_0 \varphi \\ D &= J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D_0 &\text{ - konšt. (závisí na elast.} \\ &\text{ vlastn. vlákna.)} \\ J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -D_0 \varphi \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -\omega^2 \varphi \sim \text{dif. rovn.} \end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi_0 (\omega t + \varphi) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0 &\text{ - amplitúda} \\ \varphi &\text{ - fázová konšt.} \end{aligned} \right.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D_0}}$$

Určenie momentu zotrvačnosti:

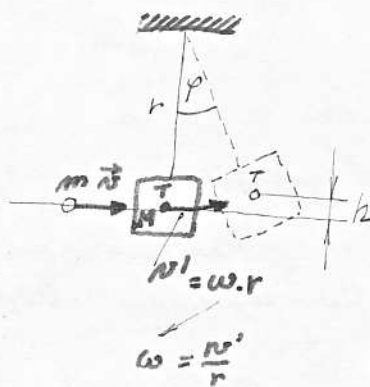


$$\left. \begin{aligned} 1, \quad T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{D_0}} \\ 2, \quad T' &= 2\pi \sqrt{\frac{J' + J_0}{D_0}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{T'^2}{T^2} &= \frac{J' + J_0}{J_0} \Rightarrow J' = J_0 \left(\frac{T'^2}{T^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Balistické kyvadlo.

je fyz. kyo.; horejšia dolná časť je z mäkkého; nepružného mat.

používa sa na meranie rýchlosti strel.



$$\begin{aligned} \vec{G} &= \vec{r} \times m \vec{v} \\ G &= r \cdot m \cdot v \cdot \sin \varphi = r \cdot m \cdot v \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varphi &= 90^\circ \\ \vec{N} &\perp \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= J \cdot \omega = (J_0 + mr^2) \omega \\ J &= J_0 + mr^2 \end{aligned}$$

J_0 - M. robl. balist. kyo.
 mr^2 - mom. robl. strely.

$$m \cdot r \cdot v = J_0 + mr^2$$

$$\omega = \frac{r m v}{J_0 + mr^2}$$

$$v' = \frac{r^2 m v}{J_0 + mr^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ak } J_0 &= Mr^2 : \\ v' &= \frac{m \cdot v}{M + m} \end{aligned} \right\}$$

Balist. kyd. : $m v = (M + m) \cdot v'$

$$v' = \frac{m \cdot v}{M + m}$$

Do akej max. výšky vystúpi balist. kvadrol :
(Použ. z. o zach. E_k)

$$E_k = \frac{1}{2} (m + M) v'^2 \quad E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} (J_0 + m r^2) \omega^2$$

$$E_p = (m + M) \cdot g \cdot h$$

$$E_k = E_p \quad (m + M) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} (m + M) v'^2$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{v'^2}{g} = \frac{m^2 v^2}{2g (M + m)^2}$$

Uhol φ : $\cos \varphi = \frac{r - h}{r}$

Mechanika kvapalín.

1. Úšeobecné vlastnosti kvapalín.

Keďže látky sa označujú veľkou tvarovou; objemovou
stálosťou. - opačne plyny.

Prechod medzi nimi tvorí kvapaliny:

veľká, objemová stálosť
, nijaká, tvarová stálosť

Medz. váh. stálosť : kvapaliny môžu tiecť; označujú
sa tekutiny (plyn + kvap.)

Vyznač. sa dokonalou pružnosťou.

Stlačiteľnosť k_0 : β - koef. stlačiteľnosti

$$\beta = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dp} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dp} / v - \text{pôvodn. objem}$$

dv - elem. zm. Objemu

$C = \frac{1}{\beta} \sim$ modul objemovej pružnosti
piezometrom sa meria.

Pojem ideálnej kvapaliny:

1. dokon. stlačiteľná
2. netritorn. trenia

Tlak: $p = \frac{f}{s}$ | f - kolmo pôsobiaca sila
 s - plocha

Napätie: $\vec{m} = \frac{\vec{f}}{s}$ ~ sila nepôb. kolmo.

Jednotky tlaku:

1. SI $[p]_{SI} = 1 \text{ Nm}^{-2}$

2. techn. atm.: $\text{at} = \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-2}$

3. fyz. atm.: $\text{atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$

3. - je tlak ort. stĺpca $h = 76 \text{ cm}$

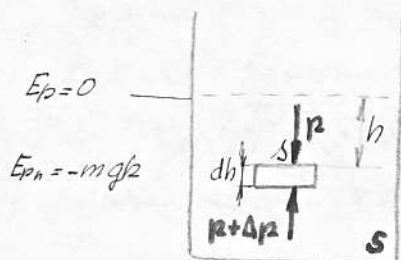
$t = 0^\circ \text{C}$

$1 \text{ atm} = 0,76 \cdot 13,59 \cdot 9,81 =$

4. - tlak Hg stĺpca vo výške 1mm $1 \text{ mm Hg} = \frac{1}{760} \text{ atm} = 1,333 \cdot 10^2 \text{ Nm}^{-2}$

5. $10^5 \text{ Nm}^{-2} = 1 \text{ bar}$

Základná rovnica hydrostatiky



$df \uparrow \downarrow dg$

podmienka rovnováhy: $dG = df$

$$dG = dm \cdot g = s \cdot s \cdot dh \cdot g \quad | \quad dm = s \cdot dV$$

$$df = (p + dp) \cdot s - p \cdot s = s \cdot dp$$

$$s \cdot dp = s \cdot s \cdot dh \cdot g$$

$$dp = s \cdot g \cdot dh = 0 \quad | \quad \text{inil}$$

$$p - s \cdot g \cdot h = \text{konšt}$$

potenciál
element. množstva

$$E_p = -k m \cdot M \cdot \frac{1}{R}$$

$$g = k \frac{M}{R^2}$$

$$E_p = -m \cdot g \cdot R$$

$$V = \frac{E_p}{m} = g \cdot h$$

$$p + s \cdot g \cdot h$$

$$p + s \cdot V = \text{konšt.}$$

Za stavu pokoja v nestlač. kvap. ; je súčet E_p objemovej jednotky ; a tlaku vsade rovnaký.

$$p = \text{konšt} + s \cdot g \cdot h$$

$$p = p_0 + s \cdot g \cdot h$$

hust.

konšt = p_0 (atmosferický tlak)

Pascalov zákon:

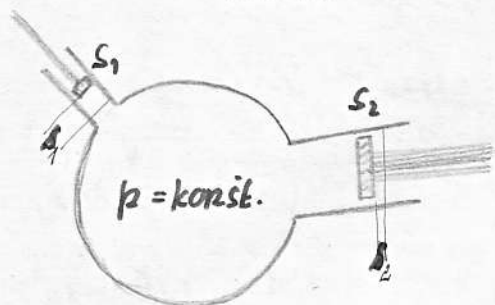
$sgk \sim$ hydrostatický tlak.



$p = \text{konšt}$; (v uzav. nádobe ; sgk - zanedb.)

Dotykajúci tlak pôs. na kvap. v uzav. nádobe pôsobí vo vŕ. smeroch rovnako.

z P. z. vyplýva silový prevod pri hydraulických lisoch:

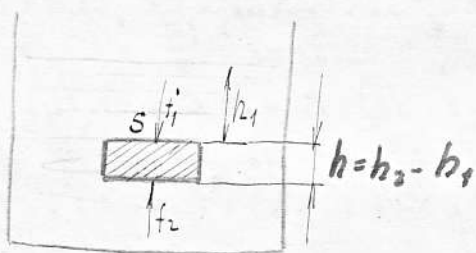


$$\left. \begin{aligned} f_1 &= p S_1 \\ f_2 &= p \cdot S_2 \end{aligned} \right\} \frac{f_1}{f_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 \neq S_2 \\ A_1 &= f_1 S_1 \\ A_2 &= f_2 S_2 \end{aligned} \right\} f_1 S_1 = f_2 S_2 \rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Archimedov zákon.

Určité kv. o hustote ρ sa nach. v nádobe do ktorej je ponorené teleso (valec o zákl. S ; výške h .)



Výsledná kolmá sila orient. nahor - vztlak.

$$f = f_2 - f_1 = h_2 \rho g S - h_1 \rho g S = \rho g S (h_2 - h_1)$$

$$f = \rho \cdot g \cdot S h = \rho \cdot g \cdot V \quad \left| \begin{aligned} \rho \cdot V &= m \\ m \cdot g &= G \end{aligned} \right.$$

$$f = \rho \cdot g \cdot V$$

$$f_2 = p_2 S = h_2 \rho g S$$

$$f_1 = p_1 S = h_1 \rho g S$$

Teleso pon. do kv. je nadláhčované silou, ktorá sa rovná váhe vytl. kvapaliny.

Výsledná sila na do kvap. nam. telesa: $F = G - f$.

$$F = \rho \cdot g \cdot V - \rho \cdot g \cdot V$$

(ρ - hustota telesa)

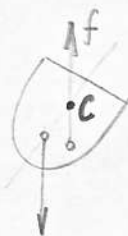
$$F = g \cdot V (\rho - \rho)$$

1, $\rho > \rho$ - teleso klesá na dno

2, $\rho = \rho$ - teleso sa vznáša

3, $\rho < \rho$ - teleso sa čiast. vznáša s kvap.

Poloha metacentra: priu. priamky vztlaku a osi teles.



Pre lode met. 0,5-1m nad T.

Pohyb ideáln. kvapalín.

- sú plozitejš.; ako u pevn. telies. (Časti sa môžu premi-estňovať.) Žiavy vnútorného trenia.

Ideáln. kv. : je nestlačiteľná,
pri pohybe bez vnútorného trenia.

Pohyb vzťahujeme na vzťažnú súst., ktorá je neuviazaná s potrubím. - každá čiastka kv. sa vyznačuje určitou rýchlosťou.



Prúdliaca kv. vytvára pole vektorov rýchlosti.

Znáznorn. v. r. vytvárajú krivky; pričom dotyčn. v. ľubov. miestach majú smer rýchlosti.

prúdnicice - prúdové čiary - znázorňujú (zobr.) vekt. pole

Vstálené (stacion.) prúdenie : rýchł. v jednotlivých miestach časom sa nemení. (prúdn. sú totožné dráhami častíc).

P. - mi môžeme znázorniť aj veľkosť rýchlosti : pomocou hustoty

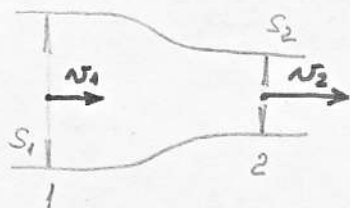
Hustota prúd. čiar : počet pr. prechádz. jednotkovou ploškou; kolmou k smeru prúdenia.



$$v_A = 2v_B$$

Časť kv. ; obmedzená prúdnicami je prúdová trubica.

rovnica kontinuity



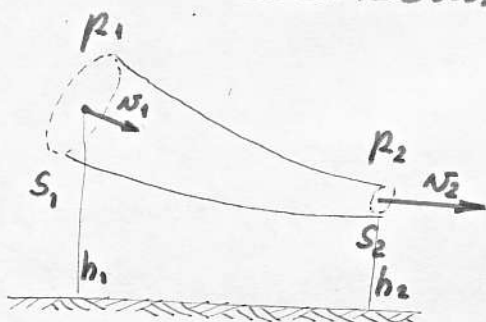
$$\left. \begin{aligned} Q_{1V} &= S_1 v_1 t \\ Q_{2V} &= S_2 v_2 t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} S_1 v_1 t &= S_2 v_2 t \\ S_1 v_1 &= S_2 v_2 \end{aligned}$$

$$S \cdot v = \text{konšt.} \quad (\text{spojitosť toku})$$

$$\text{Hmotové množstvo: } Q_{1m} = \rho S_2 v_2 t$$

$$Q_{1m} = \rho S_1 v_1 t$$

Bernoulliho rovnica



$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

ko. sa pohybuje
s určitou rýchlosťou
tam, čo je
vyvolaná silou

v rôznych miestach trubice sú
rôzne tlaky.

$$p_1 = \frac{f_1}{S_1}; \quad p_2 = \frac{f_2}{S_2}$$

$$\rightarrow f_1 = p_1 S_1; \quad f_2 = p_2 S_2$$

$$\begin{aligned} ds_1 &= v_1 dt \\ ds_2 &= v_2 dt \end{aligned}$$

$$dA = f_1 ds_1 - f_2 ds_2 =$$

$$= p_1 \underbrace{S_1 \cdot v_1 dt}_{dV} - p_2 \underbrace{S_2 v_2 dt}_{dV}$$

$$dA = p_1 dV - p_2 dV$$

$$dE_{k1} = \frac{1}{2} dm v_1^2; \quad dE_{p1} = dm \cdot g \cdot h_1$$

$$dE_{k2} = \frac{1}{2} dm v_2^2; \quad dE_{p2} = dm \cdot g \cdot h_2$$

$$dE = \frac{1}{2} dm v_2^2 + dm g h_2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 - dm g h_1$$

$$dE = dA$$

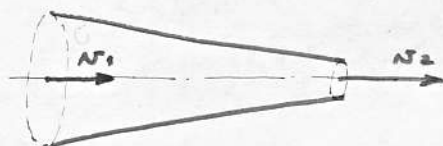
$$\frac{1}{2} dm v_2^2 + dm g h_2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 - dm g h_1 = p_1 dV - p_2 dV \quad / \cdot \frac{1}{dV}$$

$$\frac{dm}{dV} = \rho \quad \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{konšt.}$$

pri ust. prúde ideáln. kvap. je súčet $E_k + E_p$
objemovej jednotky a tlaku všade rovnaký.

B. r. - vyjad. princíp zákona o zach. mech. energ.
v ideáln. kvapaline.



$$h_1 = h_2 = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{konšt.}$$

$$\text{ak } v_1 > v_2 \rightarrow p_1 < p_2$$

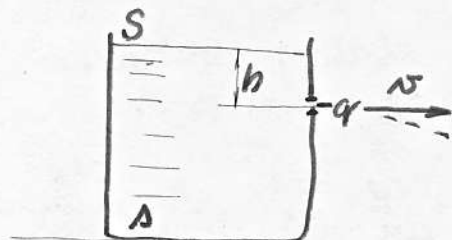
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

úbytok tlaku je rovný prírastku pohybovej energie.

p - hydrostatický tlak

$\frac{1}{2} \rho v^2$ - dynamický tlak.

Určenie výtokovej rýchlosti kvapaliny cez otvor nádrže.



za dt vytečie ... dm a v :

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot q \cdot v \cdot dt$$

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho q v dt \cdot v^2$$

$$dE_p = dm g h = \rho \cdot q \cdot v dt \cdot g \cdot h$$

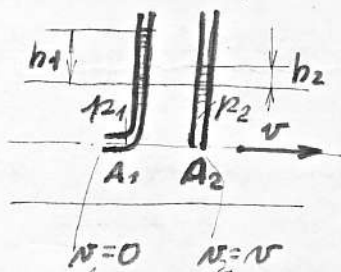
$$dE_k = dE_p \quad \frac{1}{2} \rho q v dt \cdot v^2 = \rho q v dt \cdot g \cdot h$$

Toricelliho vzorec. :

$$v = \sqrt{2gh}$$

Trubica Pitotova a Venturiho -

slúžia na merania rýchlosti prúdenia tekutiny
v potrubiach; princíp založ. na B. r.



$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

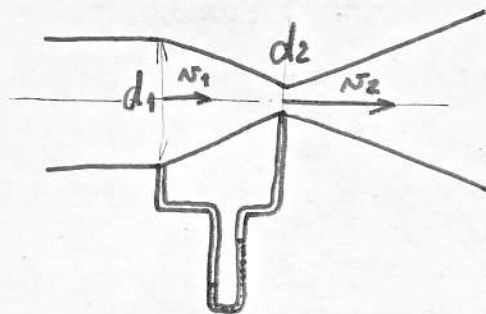
$$p_1 = \rho g h_1$$

$$p_2 = \rho g h_2$$

$$\rho g (h_1 - h_2) = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Venturiho tr.



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

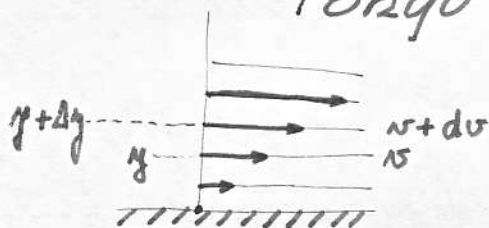
$$\frac{1}{4} \pi d_1^2 v_1 = \frac{1}{4} \pi d_2^2 v_2$$

$$v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 v_1$$

Ak za v_2 dos do B.r. ; dostaneme:

$$v_1 = \frac{d_2^2 \cdot \sqrt{2(p_1 - p_2)}}{\rho(d_1^4 - d_2^4)}$$

Pohyb viskóznjej kvapaliny



Podl' exper. skús. ; 2 susedné vzst. pôsobia na seba tangenc. náprät.

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy}$$

η - koef. vnút. tr. (viskozita)

$$\eta = \frac{\tau \cdot dy}{dv}$$

$\frac{dv}{dy}$ - gradient rých.

τ - tangenc. nápr.

Jednotka nápr. : $[\eta]_{SI} = 1 \text{ Nm}^{-2} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

$$[\eta]_{CGS} = 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1} = 1 \text{ poise (poas)}$$

Viskozita kv. s rastúcou teplotou klesá.

Dôsledkom vnút. trenia kvapaliny vkladú odpor proti pohyb nich telesa.



$$P = 6\pi\eta r v \sim \text{Stokesov odpor.}$$

$F + P = G$ ~ od tohoto okamihu guľ. sa pohyb. $v = \text{konšt.}$

$$\frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \rho \cdot g + 6\pi\eta r v = m \cdot g = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot P \cdot g$$

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 (P - \rho) \cdot g}{\eta}$$

Použ: exper. určenie η .



31
V praxi sa hodnotí visk. v Englerových stupňoch.

Englerov viskozimeter:

meria sa čas; za ktorý určité množstvo kvap. pretečie.

$$T_0 \dots\dots 200 \text{ cm}^3 \text{ H}_2\text{O} \dots\dots 20^\circ\text{C}$$

$$T \dots\dots 200 \text{ cm}^3 \text{ olej} \dots\dots 20^\circ\text{C}$$

$$E = \frac{T}{T_0} \sim \text{vychádza kvap. v Engl. stupňoch.}$$

$$\eta = \frac{\Delta \cdot E}{100} \cdot 7,6 \left[1 - \frac{1}{E^2} \right] \quad \left| \eta - \text{viskozita kvap.} \right.$$

Molekulárna fyzika

Základné pojmy:

Atomová štruktúra látky (Demokritos)

Lomonosov (~18 st.).

Pomerne hmotnosti atómov a molekúl. - vzťahovaná k O_2 .

Atomová hmotnosť: podiel skutočnej hmotnosti atómu a $\frac{1}{16}$ skutočnej hmotnosti atómu kyslíka. (At. hm. $\text{O}_2 = 16$).

Molekulová hmotnosť látky: podiel sk. hm. molekuly látky a $\frac{1}{16}$ hm. atómu kyslíka (mol. hm. $\text{O}_2 = 32$) [$\text{O} = 16$ $\text{H} = 1$]

Gram-atom nejakého prvku je množstvo prvku; ktorého hmotn. vyjad. v g. sa číselne rovná jeho atómovej hmotnosti. - (kilogram-atom.)

Gr. a. látok. prvku obsahuje vždy ten istý počet atómov.

Avogadrovo číslo: $N = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$$N = 6,025 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$$

Gr. mol. - látky: množstvo l.; ktorej hmotnosť vyjad. v g. sa číselne rovná jeho gr. mol. váhy.

Gr. - mol. - látky obsahuje vždy rovnaký počet molekúl.

M... obsahuje ... N molekúl.

hmotnosť 1 molekuly: $m = \frac{M}{N}$