

31
V praxi sa hodnotí visk. v Englerových stupňoch.

Englerov viskozimeter:

meria sa čas; za ktorý určité množstvo kvap. pretečie.

$$T_0 \dots\dots 200 \text{ cm}^3 \text{ H}_2\text{O} \dots\dots 20^\circ\text{C}$$

$$T \dots\dots 200 \text{ cm}^3 \text{ olej} \dots\dots 20^\circ\text{C}$$

$$E = \frac{T}{T_0} \sim \text{viskozita kvap. v Engl. stupňoch.}$$

$$\eta = \frac{\Delta \cdot E}{100} \cdot 7,6 \left[1 - \frac{1}{E^2} \right] \quad | \quad \Delta - \text{hustota kvap.}$$

Molekulárna fyzika

Základné pojmy:

Atomová štruktúra látky (Demokritos)

Lomonosov (~18 st.).

Pomerne hmotnosti atómov a molekul. - vzťahovaná k O_2 .

Atomová hmotnosť: podiel skutočnej hmotnosti atómu a $\frac{1}{16}$ skutočnej hmotnosti atómu kyslíka. (At. hm. $\text{O} = 16$).

Molekulová hmotnosť látky: podiel sk. hm. molekuly látky a $\frac{1}{16}$ hm. atómu kyslíka (mol. hm. $\text{O}_2 = 32$) [$\text{O} = 16$ ($\text{H} = 1$)]

Gram-atom nejakého prvku je množstvo prvku; ktorého hmotn. vyjad. v g. sa číselne rovná jeho atómovej hmotnosti. - (kilogram-atom.)

Gr. a. látov. prvku obsahuje vždy ten istý počet atómov.

Avogadrovo číslo: $N = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$$N = 6,025 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$$

Gr. mol. - látky: množstvo l.; ktorej hmotnosť vyjad. v g. sa číselne rovná jeho gr. mol. váhy.

Gr. - mol. - látky obsahuje vždy rovnaký počet molekúl.

M... obsahuje ... N molekúl.

hmotnosť 1 molekuly: $m = \frac{M}{N}$

pr. 1, vyp. hustota mol. vody:

$$\text{H}_2\text{O} \dots\dots M = 18 \text{ g} \dots\dots N \text{ mol.}$$

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{18}{6,025 \cdot 10^{23}} \text{ mol}^{-1} \text{ g} \cdot \text{mol} = \underline{3 \cdot 10^{-23} \text{ g}} \quad 5,311 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

2, vyp. hmot. mol. kyslíka:

$$m_{\text{O}_2} = \frac{32}{6,025 \cdot 10^{23}} \text{ g} = \underline{5,311 \cdot 10^{-23} \text{ g}}$$

3, počet molekúl pripadajúcich na 1 g (H_2O)

$$18 \text{ g} \dots\dots N = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$4, 1 \text{ cm}^3 \dots 1 \text{ g} \dots\dots \frac{N}{M} = \frac{6,025 \cdot 10^{23}}{18} = \underline{3,35 \cdot 10^{22} \text{ mol.}}$$

$$N_0 = \frac{1}{3,35 \cdot 10^{22}} = \underline{3 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3}$$

$$\text{hrana kocky pre 1 mol. } a = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3} = \underline{3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}}$$

5, veľkosť at. Al.:

$$A = 27$$

$$27 \text{ g} \dots\dots N = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ atóm.}$$

$$\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ g cm}^{-3} = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho}$$

$$V_0 = \frac{A}{\rho} = \frac{27 \text{ g}}{2,7 \text{ g cm}^{-3}} = 10 \text{ cm}^3 \text{ (objem 27 g. Al.)}$$

$$N_0 = \frac{10}{6,025 \cdot 10^{23}} = 1,7 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3 \text{ (objem 1 atómu Al.)}$$

$$a = \sqrt[3]{1,7 \cdot 10^{-23}} = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \text{ (hrana kocky atómu)}$$

$$r = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

6, Vypoč. aká bude dĺžka čiara keby atómy 5 g. Al. hl. boli poukladané tesne vedľa seba do 1 čiary.

$$27 \text{ g} \dots\dots N = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ atóm.}$$

$$5 \text{ g} \dots\dots \frac{5}{27} \cdot 6,025 \cdot 10^{23} = 10^{23} \text{ at.}$$

$$l = 2,6 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{23} \text{ cm} = 2,6 \cdot 10^{15} \text{ cm} = \underline{2,6 \cdot 10^{10} \text{ km.}}$$



$$\text{počet drah} = \frac{2,6 \cdot 10^{10}}{150 \cdot 10^6} = \underline{170}$$

neusporiadaný; od teploty závislý pohyb - tepelný pohyb.
 Charakter t.p. v rôznych skupenstvách je rôzny.
 pevné látky: atómy kmitajú okolo rovnováž. polohy.
 kvapaliny: at. kmit. okolo posúvajúcich sa -"- -"-.
 molekuly plynov: sa poh. neusporiad. pohybom.
 rôzna N ; a smer.
 zražky s inými molekul. menia smer pohybu
 a rýchlosť. Tepelný pohyb mol. kvapalín. bol pozorovaný
 Brownovým pohybom. (anglický botanik 1827)
 [Pelové zrnka vo vode sú v ustávitelnom neprer. pohybe.
 Intenzita pohybu zrn je závislá od teploty. -
 dôsledok tep. poh. molekúl. - Brownov pohyb]

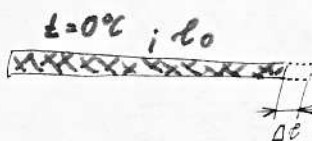
Častice - tvoriace kríže. mriežku látky - kmitajú.
 Pri dodaní tepla intenz. kmitani sa zväčšujú (kyn. energ.)



a, pri malých výchylkách $f_1 = f_2$

b, pri väčš. vých. $f_1 < f_2$

[nesymetrickosť sil príťažl. a odpudzujúc.
 zväčšia sa vzd. medzi rovnovážnymi poloh.]



$$l_t = l_0 + \Delta l$$

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot t$$

$$l_t = l_0 + \alpha l_0 t$$

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t)$$

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\text{Ked' } l_0 = 1; dt = 1^\circ \rightarrow \alpha = dl$$

α - predtž. jednotkovej dĺžky pri ohriatí o 1° .

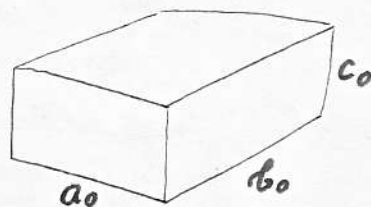
α - koeficient teplotnej roztlačnosti. [$\alpha \sim 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$]

$$\alpha_{Fe} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$$

$$\alpha_{Al} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$$

[aj α je závislé od teploty]

Objemová rozťažnosť:



0°C	a_0	b_0	c_0
$t^\circ\text{C}$	a	b	c

$$a = a_0(1 + \alpha t)$$

$$b = b_0(1 + \alpha t)$$

$$c = c_0(1 + \alpha t)$$

$$V_t = abc = a_0 b_0 c_0 (1 + \alpha t)^3 = V_0 (1 + \alpha t)^3$$

$$V_t = V_0 [1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3]$$

$$V_t = V_0 (1 + 3\alpha t) = V_0 (1 + \beta t)$$

β - koef. objemovej rozťažnosti.

$$\beta = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{dV}{dt}$$

ak $V_0 = 1$; $dt = 1 \dots \dots \beta = dV$

Koef. β sa číselne rovná prírastku jednotkového objemu pri rozšírení o 1°C .

$$\rho = \frac{m}{V} \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} m = \text{konšt.} \\ V - \text{sa mení} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{meri sa aj } \rho$$

$$m; t = 0^\circ\text{C} \dots \dots V_0; \rho_0$$

$$m; t^\circ\text{C} \dots \dots V_t; \rho_t$$

$$m = \rho_0 V_0 = \rho_t V_t = \rho_t V_0 (1 + \beta t)$$

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \beta t} \cdot \frac{1 - \beta t}{1 - \beta t}$$

$$\rho_t = \frac{\rho_0 (1 - \beta t)}{1 - \beta^2 t}$$

Zavislosť hustoty od teploty: $\rho_t = \rho_0 (1 - \beta t)$

Vzťahy platia pre tuhé látky a kvapaliny.

Udáva sa: tuhé látky: α (kladná vždy)
kvapaliny: β (anomália vody!)

H_2O : $0^\circ \xrightarrow{\text{zmenš. obj.}} 4^\circ \xrightarrow{\text{zväčš. obj.}}$

Meranie teploty - teplota.

Teplota: charakterizuje stav telesa (horúci; studený...)

Číselné vyjadrenie. Stupnica teploty:

Celsiova stupnica: bod mrazu $\sim 0^\circ\text{C}$ (rovnovážny stav vody a ľadu)

bod varu $\sim 100^\circ\text{C}$ (rovn. stav vody a nasýtených pár pri 1 atm.)

Kvapalinové teploměry

Hg. teplomer.

a.)
$$\begin{array}{l} 0^\circ\text{C} \dots\dots V_0 \\ 100^\circ\text{C} \dots\dots V_{100} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0^\circ\text{C} \dots\dots V_0 \\ 100^\circ\text{C} \dots\dots V_{100} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{na } 100^\circ\text{C} \dots \text{objem. zmena: } V_{100} - V_0 \\ \text{na } 1^\circ\text{C} \dots\dots - \text{''} - \frac{V_{100} - V_0}{100} \end{array}$$

na t stupňov pripadá zmena objemu: $\frac{V_{100} - V_0}{100} \cdot t$

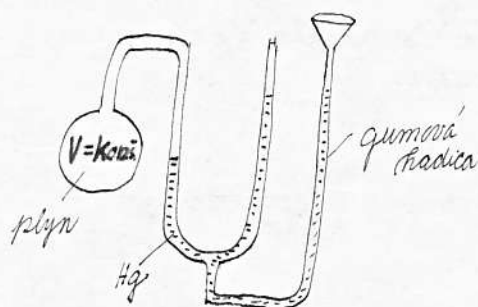
b.)
$$\begin{array}{l} 0^\circ\text{C} \dots\dots V_0 \\ t^\circ\text{C} \dots\dots V_t \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0^\circ\text{C} \dots\dots V_0 \\ t^\circ\text{C} \dots\dots V_t \end{array}} \right\} \text{na } t^\circ \text{ pripadá } V_t - V_0$$

$$V_t - V_0 = \frac{V_{100} - V_0}{100} \cdot t \rightarrow t = \frac{V_t - V_0}{V_{100} - V_0} \cdot 100^\circ\text{C}$$

$$V_t = V_0 + \frac{V_{100} - V_0}{100} \cdot t = V_0 \left(1 + \frac{V_{100} - V_0}{100 V_0} t \right) \quad \left| \quad \frac{V_{100} - V_0}{100 V_0} = \beta_{\text{Hg}} \right.$$

$$V_t = V_0 (1 + \beta t)$$

Vodíkový teplomer.



$$\begin{array}{l} 0^\circ\text{C} \dots\dots p_0 \\ 100^\circ\text{C} \dots\dots p_{100} \end{array}$$

100°C zmena tlaku: $p_{100} - p_0$

$$1^\circ\text{C} \dots\dots \frac{p_{100} - p_0}{100}$$

$$t^\circ\text{C} \dots\dots \frac{p_{100} - p_0}{100} \cdot t$$

$$\begin{array}{l} 0^\circ\text{C} \dots\dots p_0 \\ t^\circ\text{C} \dots\dots p_t \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0^\circ\text{C} \dots\dots p_0 \\ t^\circ\text{C} \dots\dots p_t \end{array}} \right\} \begin{array}{l} p_t - p_0 = \frac{p_{100} - p_0}{100} \cdot t \\ t = \frac{p_t - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100^\circ\text{C} \end{array}$$

$t^\circ\text{C}$ zmena: $p_t - p_0$

$$p_t = p_0 \left(1 + \frac{p_{100} - p_0}{100 \cdot p_0} \cdot t \right) \quad \text{pod. rozťahavosti pri stálom objeme}$$

$$p_t = p_0 (1 + \alpha_p t)$$

$$\alpha = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{p_t - p_0}{p_0 (t - t_0)} = 0,00366099$$

Absolutná nula.

$$p_t = p_0(1 + \gamma t)$$

$$p_t = 0 \quad ; \quad p_0(1 + \gamma t) = 0$$

$$p_0 = p_0 \gamma t$$

$$t = -\frac{1}{\gamma} = -\frac{1}{0,00366} = -273,15^\circ\text{C}$$

Kelvin: meranie teploty od abs. nuly.

Súvis $^\circ\text{K} - ^\circ\text{C}$

$$T = 273,15 + t$$

$$\begin{array}{l} T - ^\circ\text{K} \\ t - ^\circ\text{C} \end{array}$$

Fahrenheitova stupnica ($^\circ\text{F}$)

$$32^\circ\text{F} \dots\dots 0^\circ\text{C}$$

$$212^\circ\text{F} \dots\dots 100^\circ\text{C}$$

$$180^\circ\text{F} = 100^\circ\text{C}$$

Reumerova stupnica ($^\circ\text{R}$)

$$0^\circ\text{C} \dots\dots 0^\circ\text{R}$$

$$100^\circ\text{C} \dots\dots 80^\circ\text{R}$$

$$80^\circ\text{R} = 100^\circ\text{C}$$

Súvis : $C = K - 273,15 = \frac{5}{4}R = \frac{5}{9}F - 32$

Teplo a jeho meranie

$t_1, t_2 \quad t_1 > t_2$ Telesa vyrovnávajú svoje teploty.

Určitá fyz. veličina - teplo prechádza z telesa teplejšieho na chladnejšie.

Zákon zachovania tepla.

(Tepelný fluídum - nesprávna predstava)

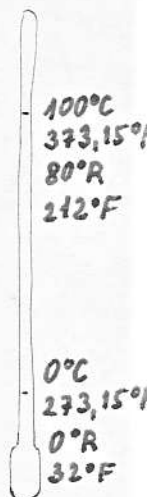
Teplo : 1 z foriem energie.

Jednotka:

kalória: miz. tepla; ktoré je potrebné dodať 1g. chem. čistej vode pri ohriatí z $14,5 - 15,5^\circ\text{C}$

kcal : 1kg voda z $14,5^\circ\text{C}$ na $15,5^\circ\text{C}$

$$1\text{kcal} = 1000\text{cal.}$$



Teplota potrebná na ohřátí tělesa o 1° - tepelná kapacita:

$$C_k = \frac{dQ}{dt}$$

Tepelná kapac. km. jednotky látky:

merné teplo (špecif. t.)

[je potř. dodat látkě jednotkové hmotnosti
při zahřátí o 1°C]

Molekulové teplo : c -

je potřebné na zahr. 1 gr. mol látky o 1°C .

Súvis : $C = M \cdot c$ / M - hmotnosť 1 gr. mol.

látkou m ; c přijíjí svou teplotu : $t_1 \rightarrow t_2$;
prijala tepla : $Q = \int_{t_1}^{t_2} c \cdot m \cdot dt$

$$Q = c \cdot m (t_2 - t_1)$$

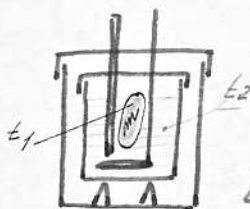
jednotka merného tepla :

$$[c]_{SI} = J \cdot kg^{-1} \cdot deg^{-1}$$

$$[c]_{CGS} = erg \cdot g^{-1} \cdot deg^{-1}$$

$$[c] = cal \cdot g^{-1} \cdot deg^{-1} ; kcal \cdot kg^{-1} \cdot deg^{-1}$$

Na meranie Q ; resp. c sa používa zmiešovací kalorimetr.



Vodná hodnota kalorimetra :

teplo ; ktoré je potř. dodat kalorimetru
s príslušenstvom aby sa tepl. zvýšila o 1°C .

Ak hmotnosť vody : m_1 . . . merné teplo c_1
" kalorim. m_2 - " - kal. c_2
" teplom. m_3 - " - tepl. c_3
" meriacky. m_4 - " - c_4

$$M_{kal} = C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 + C_4 m_4$$

m ; c ; t_1 ; látka prijíjí svoju teplotu z t_1 na t_2 .

$$Q_1 = c \cdot m \cdot (t_1 - t_2)$$

$$Q_2 = M (t_1 - t_2)$$

→

$$c.m.(t_1 - t) = M(t - t_2)$$

$$c = \frac{M(t - t_2)}{m(t_1 - t)}$$

Určenie skup. tepla topenia:

množstvo tepla potrebné k zmeneniu skupenstva (látky rozt. na bod topenia) z pevn. na kvap.

ľad: m ; $t = 0^\circ\text{C}$

$Q_1 = M(t_1 - t)$ - odovzd. kalor.

kalorim.: l_t ; M ; t

$$Q_2 = m.l_t + c.m.t$$

$$M(t_1 - t) = m.l_t + c.m.t$$

$$l_t = \frac{M(t_1 - t) - c.m.t}{m}$$

$$[l_t]_{SI} = \text{J.kg}^{-1}$$

$$[l_t]_{CGS} = \text{erg.g}^{-1}$$

$$[l_t] = \text{cal.g}^{-1}$$

Vlastnosti plynov

Zákony pre ideálne plyny.

(stlačiteľnosť; rozťažnosť) (teplotná neuväčšiteľnosť)

Zákony hydromechan. (Archim.; Pascal. n.) platia aj v aeromechanike.

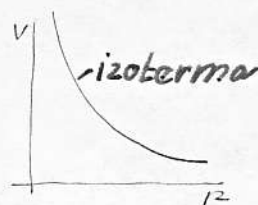
$$\left. \begin{array}{l} \text{Tlak: } p = \frac{F}{S} \\ \text{Objem: } V \\ \text{Teplota: } t \\ \text{hmotn.: } m \end{array} \right\} \text{stavové veličiny.}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = \text{konšt.} \\ t = \text{konšt.} \end{array} \right\} \text{izotermický}$$

Boyle (1660) - Mariotte (1679)

$$pV = \text{konšt.}$$

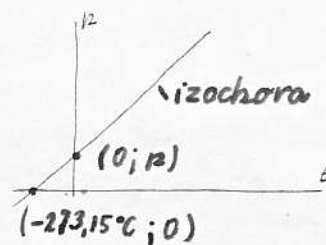
$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \dots$$



2. $m = \text{konst.}$
 $V = \text{konst.}$ } izochorický

Gay-Lussac:

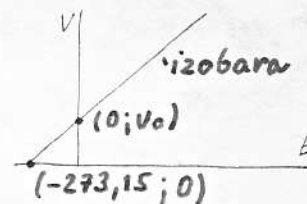
$$p_t = p_0(1 + \gamma_p t)$$



3. $m = \text{konst.}$
 $p = \text{konst.}$ } izobarický

Gay-Lussac:

$$v_t = v_0(1 + \gamma_v t)$$



Koef. plynové rozpínavosti - roztažnosti: $\gamma_v = \gamma_p = \gamma = \frac{1}{273,15} \text{ deg}^{-1}$

1) $p_t = p_0(1 + \gamma t) = p_0(1 + \frac{1}{273} t) = p_0(\frac{273 + t}{273}) = p_0 \cdot \frac{T}{T_0} = p_t$ / lineární závislost.

3) $v_t = v_0(1 + \gamma t) = v_0(1 + \frac{1}{273} t) = v_0(\frac{273 + t}{273}) = v_0 \cdot \frac{T}{T_0} = v_t$

Stavová rovnice plynů

$m = \text{konst.}$

zač. stav.: p_1, V_1, T_1

kon. stav.: p_2, V_2, T_2

1. $T_1 = \text{konst.}$
 $p_1 \rightarrow p_2 \Rightarrow V_1 \rightarrow V_2$ } $p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}$

2. $T_1 \rightarrow T_2$
 $V_1 \rightarrow V_2$
 $p_2 = \text{konst.}$ } $V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \frac{p \cdot V}{T} = \text{konst.}$$

Avogadrovo z.

Mol. nř. plynů zaujímají při rovn. tlaku a teplotě rovnaký objem.

$t = 0^\circ \text{C}$

$T = 273 \text{ deg}$

$p = 1 \text{ atm.}$

$$V_0 = 22,4 \text{ l mol}^{-1}$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = R \sim \text{uřebecná plynová konstanta}$$

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{1 \text{ atm.} \cdot 22,4 \text{ l mol}^{-1}}{273 \text{ deg}} = 0,082 \text{ l atm / mol deg}$$

$$R_{SI} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \cdot 273^{-1} \text{ deg} = 8,31 \text{ J deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$pV = RT \quad \sim 1 \text{ gr. mol.}$$

Stav. rovnica pre n mol.

$$p \cdot V = n R \cdot T$$

$$; \quad p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

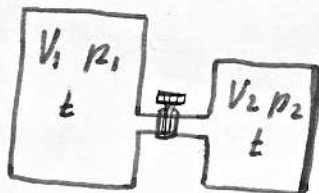
$M \sim 1 \text{ Mol.}$
 $m \sim \text{množstvo plynov.}$

Pri nízkych teplotách a vysokých tlakoch vystupujú väčšie odchyľky.

K ideálnemu plynu sa svojimi vlastnosťami najviac približuje: He; H.

Daltonov zákon parciálnych tlakov. (1802)

V zmesi plynov každý plyn sa chová tak, ako keby sám vyplňoval celý priestor.



$$V_1 + V_2 ; p_1'$$

$$p_1 V_1 = p_1' (V_1 + V_2) = p_1' V \rightarrow p_1' = \frac{p_1 V_1}{V}$$

$$V_1 + V_2 ; p_2'$$

$$p_2 V_2 = p_2' (V_1 + V_2) \rightarrow p_2' = \frac{p_2 V_2}{V}$$

$$p = p_1' + p_2' \quad \sim \text{parciálne tlaky.}$$

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} ; \quad p \cdot V = p_1 V_1 + p_2 V_2 + \dots$$

Výsledný tlak plynnej zmesi sa rovná súčtu parciálnych tlakov.

Kinetická teória plynov.

- teor. pracovanie predstáv o plynach.

Mol. plynov: rôzne smery; rôzne rýchlosti.

Pri zrážkach predpokl. dokonalú pružnosť molekúl.

Mol. pôsobia silou na stenu nádoby.

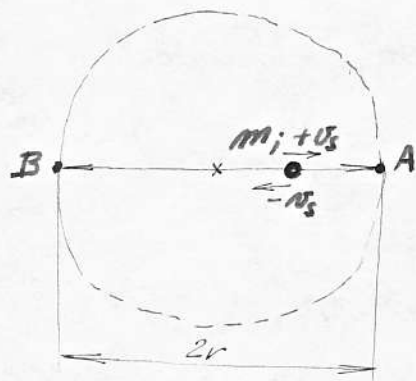
1. Kinetický výklad tlaku plynu.

vech 1 Mol. plynu (N molekul) sa nachádza v nádobe guľ. tvaru.

Predp. : vš. molekuly sa pohyb. rovnakou rýchlosťou:

$$v_s^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} \sim \text{stredná kvadratická rýchlosť}$$

Ak neprirýchladíme na vzájomn. zrážky mol., pohybujú sa po priemeroch - a narážajú; odrazujú sa od steny nádoby.



podľa zák. akc. - reakc. ; mol. pri náraze udelí stene impulz:

$$J_1 = \int f \cdot dt = m v_{A1} - (-m v_{s1}) = 2m v_s$$

$$t = \frac{2r}{v_s} \quad / \text{mol. sa dostane z A do B.}$$

↓

Počet nárazov za 1 sek: $\frac{1}{t} \cdot \frac{N_0}{2r}$

N molekul na 1s $\dots \dots \dots \frac{N \cdot v_s}{t \cdot 2r}$

N mol. na 1s; na 1cm². $\dots \dots \dots \frac{N}{4\pi r^2} \cdot \frac{v_s}{2r}$ - krát

Impulz:

$$J = 2 \cdot m \cdot v_s \cdot \frac{N}{4\pi r^2} \cdot \frac{v_s}{2r} = \frac{m N v_s^2}{4\pi r^3}$$

m - hmotnosť 1 mol.
 N - počet mol. v Mol.

$$J = \frac{M N_0^2}{4\pi r^2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{3} M N_0^2}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{M N_0^2}{V} \sim$$

Ak frekv. nárazov je vysoká - javia sa; ako stála sila.

Pre st. silu: $J = F \cdot t$ // pre $t = 1s$; $J = F$

$p = \frac{F}{S}$ // pre $S = 1cm^2$; $p = F$

$$p = J = \frac{1}{3} \cdot \frac{M \cdot v_s^2}{V} = \frac{1}{3} \frac{m \cdot N \cdot v_s^2}{V}$$

$$p = \frac{1}{3} m \cdot m_0 \cdot v_s^2$$

m_0 - počet molekul v objemovej jednotke

$$p = \frac{1}{3} m_0 \cdot \frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{2}{3} m_0 \cdot \epsilon$$

ϵ - sr. kin. energ. pohyb. molekuly
základný vzťah kin. teor. m.

2.) Kinet. výklad teploty.

$$pV = R \cdot T$$

$$\frac{2}{3} m_0 \epsilon \cdot V = R \cdot T \quad / \quad N \cdot m_0 = N$$

$$\epsilon = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N} \cdot T$$

$$; \quad k = \frac{R}{N} : \text{Boltzmannova konstanta}$$

$$\epsilon = \frac{3}{2} k \cdot T$$

Kin. energ. molekuly závisi len o teplota.

$$k = \frac{8,31 \cdot 2 \text{ deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}}{6,025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{deg}^{-1}$$

3.) Stredná kvadratická rýchlosť.

$$\epsilon = \frac{1}{2} m v_s^2$$

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m v_s^2$$

str. kv. r. závisi len o T

$$v_s = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3 R}{m \cdot N} T} = \sqrt{\frac{3 R \cdot T}{M}} \quad / \quad M - \text{Mol.}$$

4.) Počet molekúl v objemovej jednotke.

$$p = \frac{2}{3} m_0 \epsilon \quad ; \quad \epsilon = \frac{3}{2} k T$$

$$m_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\epsilon} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{k T}$$

$$m_0 = \frac{p}{k \cdot T} \quad \frac{p}{k T}$$

Pre akýkoľvek plyn za norm. tlaku a teploty obsahuje pl. v jednotk. obj. rovnaký počet molekúl

$$p = 1 \text{ atm}$$

$$T = 273 \text{ deg}$$

$$m_0 = \text{po dosadení } 2,68 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

molekúl v 1 m^3

$$m_0 = 2,68 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

Loschmidtova konšt.: $\nearrow$

5. Vnútrošná energia plynov

mol. plynov konajú neuspor. o teplotu závislý pohyb. V_s molekuly:
 $\epsilon = \frac{3}{2} kT$; Pod vnút. energ. pl. rozdeľenie súčet kin. energ. v_s mol.
 V. e. molekúl 1M bude: $U_1 = N \cdot \epsilon = N k T \cdot \frac{3}{2} = N \cdot \frac{3}{2} \frac{R}{N} \cdot T = \frac{3}{2} RT$

V. e. 1M závisí len od teploty.

Ked' 1M dodáme teplo dQ ; $V = \text{konšt.}$ - tým dodané teplo
 zvýši vnút. energiu o dU - zvýši sa teplota plynu o dT :

$$dU = \frac{3}{2} R \cdot dT$$

Molekulové teplo pri stálom objemu: $C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_v = \frac{dU}{dT}$

$$C_v = \frac{3}{2} \frac{R dT}{dT} = \frac{3}{2} R$$

Mol. teplo pri st. objeme je konštantné: $R \approx 2 \text{ cal deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

$$C_v \approx 3 \text{ cal deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Plati len pre 1 atómové pl. molekuly.

Molekule možno priradiť 3 stupne volnosti.

2 at. molekule: $\left. \begin{array}{c} \text{O} \text{---} \text{O} \\ A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2) \end{array} \right\} 5 \text{ stupne volnosti (ak } r = \text{konšt.)}$

3, ... at. molekule: ~ 6 st. volnosti.

počet st. volnosti: $i \rightarrow \epsilon = \frac{i}{2} kT$

Energia pripad. na 1 stupen volnosti:

Ekoipartičný princíp -

na každý stupen volnosti mol. pripadá rovnaká energia $\epsilon_0 = \frac{1}{2} kT$.

Pre plyn s i stupňami volnosti: $\epsilon = \frac{i}{2} kT$

vn. e. na 1 Mol.

$$U_1 = N \frac{i}{2} kT = N \cdot \frac{i}{2} \frac{R}{N} T = \frac{i}{2} RT$$

mol. teplo:

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} \frac{R \cdot dT}{dT} = \frac{i}{2} R$$

1. jednoat. plyn:

$$i = 3 \quad C_v \approx 3 \text{ cal deg}^{-1} \text{ mol}^{-1} \quad (R \approx 2 \text{ cal deg}^{-1} \text{ mol}^{-1})$$

2. 2 at. plyn

$$i = 5 \quad C_v \approx 5 \text{ cal deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

3. 3 at. plyn

$$i = 6 \quad C_v \approx 6 \text{ cal deg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

Zmena strednej hodnoty kin. energie molekúl
ktorého km: m ; keď pri zach. stáleho objemu je dodané teplo

$$\varepsilon = \frac{3}{2} kT \sim \text{en. 1 mol. pre 1 at. plynu.}$$

$$Q = dU \quad U_1 = N\varepsilon = \frac{3}{2} RT \sim \text{en. 1 Mol}$$

$$U = n \cdot N\varepsilon = \frac{m}{M} \cdot \frac{3}{2} RT$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T = \frac{m}{M} \cdot N \cdot \underbrace{\frac{3}{2} k \Delta T}_{\Delta \varepsilon}$$

$$\Delta \varepsilon = \frac{Q \cdot M}{m \cdot N}$$

$$= \frac{m}{M} \cdot N \cdot \Delta \varepsilon = Q$$

Plati pre dokonalé plyny.

Van der Waalova rovnica - stavová rovnica pre sk. plyny.

1. Mol. plynu konajú neusp. pohyb. (ako pružné guľ.)
 2. Vlastný objem mol. je zanedbateľný
 3. Kohézne sily sú tiež zanedbateľné
- } ideálny plyn.

V reáln. plinoch sú odh. v stav. rovnici najmä pri nízk. tepl. a vysokom tlaku.

$$r \approx 10^{-8} \text{ cm}$$

$$V_1 \approx \frac{4}{3} \pi r^3 \approx 4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3 \sim \text{objem 1 mol.}$$

$$V = N \cdot V_1 \sim \text{objem 1 Mol.}$$

$$1 \text{ km}^3 \dots \dots m_0 = 3 \cdot 10^{19} \text{ mol}$$

$$V = 3 \cdot 10^{19} \cdot 4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3 = 12 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^3 = 10^{-4} \text{ m}^3$$

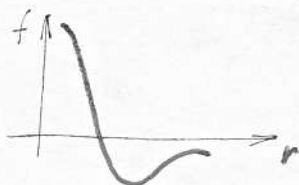
ak na vyšší tlak na 5000 atm. - objem sa zmenší - $V = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3$
molekuly majú na pohyb menší priestor (vlastný objem molekúl!)

a.) Korekciu na vl. objem m. zaviedol Van der Waals.

Mol. pri svojom pohybe majú zmenšený objem o hodnotu, ktorá majú molekuly vlastnými hmotami: $V-b$

b.) Korekcia na vzájomné pôsobenie molekúl (na tlak)

V reáln. pl. nemožno považovať molekuly za pružné guľôčky.



f - sila medzi molekulami
 r - vzd.

Pri menších vzd. r sa uplatňujú príťažlivé sily od blízkeho molekúl. Výsledné silové pôsobenie (symetria!) je nulové.

Inak je v blízkosti steny nádoby. Kohézne sily medzi mol. a stenou nád. sú zanedbateľné. Výslednica smeruje dovnútra.

Tlak na stenu nádoby je menší (než vnnútri) o kohézne tlak.

a.



(a)(b) : $(p + p_i)/(V - b) = R.T$ / $p_i = k \cdot n r_0^2$ $k = \text{konst.}$
 $n_0 = \text{počet mol. v obj. jedn.}$

$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ $p_i = k \frac{N^2}{V^2}$ $n_0 = \frac{N}{V}$
 $p_i = \frac{a}{V^2}$

Pre n gram. mol.

$V_1 \dots$ objem 1 gr. mol.

$V; m$ $(m = \frac{m}{M})$
 $(V = m \cdot V_1)$

$(p + \frac{a}{V_1^2})(V_1 - b) = R.T$

$\left\{ \left(p + \frac{m^2 a}{V^2} \right) \left(\frac{V}{m} - b \right) = R.T \right.$ / n

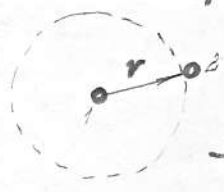
$\left(p + m^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - m \cdot b) = m \cdot R.T$ - V.d.W. rovnica.

Ak objem plynu je pomerne veľký potom korekcie na vlastný objem a na tlak vystupujú ako konštanty; ktoré možno zanedbať. V.d.W. rovn. prejde do stav. rovnice.

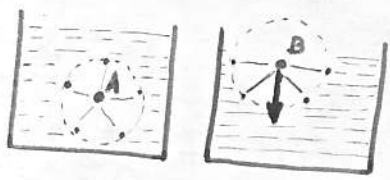
$a; b \sim$ V.d.W. - ove' konštanty
možno ich nájsť v tabuľkách.

Štruktúra a vlastnosti kvapalín. -

mala' stlačiteľnosť; veľká hustota - porovn. s plynmi.
Vz. vzdial. medzi mol. kvapalín sú pomerne malé. Medzi mol. kvap. sa uplatňujú kohézne sily. So zväčš. vzdial. medzi mol. znižuje sa koh. sila.



pri urč. hodnote r neuvaž. prík. sily.
 r - polomer guľovej sféry.
Sféra molekulárneho pôsobenia.



A ... $f = 0$ Povrchová vrstva kv. pôsobí
B ... $f \neq 0$ na ost. vrstvy kv. kolmým
molekulárnym tlakom.

Rádovo 10^4 atmosfér. (podľa teor. úvah)

Tým sa vysv. mala' stlačiteľnosť kvapalín.
Dostať mol. na povrch je ťažké.

Mol. na povrchu sa vyznačujú veľkou pot. energiou.

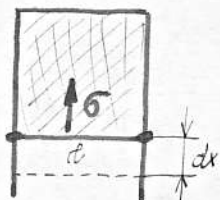
Povrchová energia kvapalín.

V rovnovážnom stave energ. je minimálna $\rightarrow$ min. počet at. na povrchu $\rightarrow$ kv. zaujíma minimálnu plochu, objem.



Povrch kv. sa snaží zaujímať tvar s najmenš. plochou.

Povrchové napätie a kapilárna konštanta.



povrchové napätie : sila pôs. v rovine povrchu na dĺžkovú jednotku, kolmo.

$$f = 2 \cdot \sigma \cdot l$$

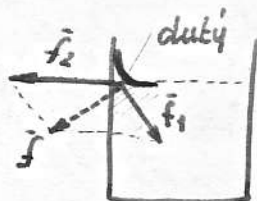
$$dA = f \cdot \Delta x = 2 \sigma \cdot l \cdot \Delta x \rightarrow \sigma = \frac{dA}{2l \cdot \Delta x} \sim \text{práca na jedn. plochu}$$

Kap. konštanta : $\frac{\text{povrchová energia}}{\text{plocha kv.}}$

$$\sigma = \text{J m}^{-2}$$

Kap. konštanta = povrch. napätie.

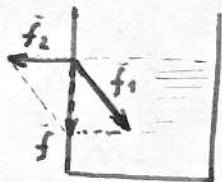
Zjav kv. na rozhraní kv. a stený nádoby



závisí : ako je výsl. sil medzi :
mol. - mol. a mol. - st. nádobou.

Výslednica sil je kolmá na povrch kvapaliny

ak sily súdržnosti (m-m) < (m-st) - tvar je dutý



Kohézne sily : (m-m) = (m-st)

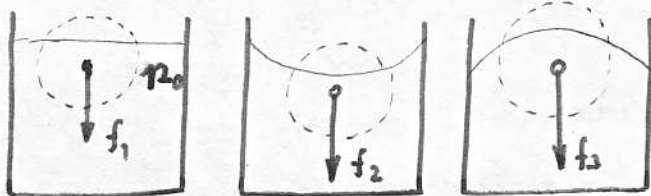


(m-m) > (m-st)

Kapilárne zjavy :

Tlak pod povrchom (zakriveným)

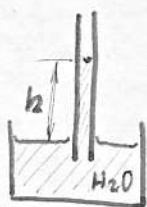
Kap. tlak.



$$p = p_0 \mp \frac{2\sigma}{R}$$

$$p_3 > p_1 > p_2$$

Zjav kapilárnej elevácie a depresie.



- kap. elevácia
kvapalina zmača
steny nádoby.



$$p = p_0 - \frac{2\sigma}{R}$$

V každom mieste musí byť splnená podmienka rovnosti tlakov.
Výstup kvap. vyrovnáva hydrostatický tlak.

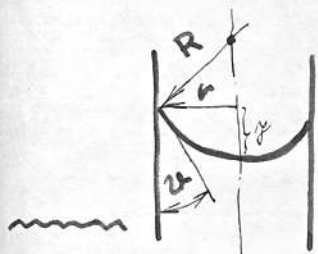
$$p = p_0 - \frac{2\sigma}{R} + hsg$$

$$2\sigma = R \cdot hsg$$

$$\sigma = \frac{1}{2} R \cdot h \cdot s \cdot g$$

/ R polomer
qul. plochy.

23. IV. 1969.



$$\cos \vartheta = \frac{r}{R} \rightarrow r = R \cdot \cos \vartheta$$

$$\vartheta \ll \Rightarrow r \approx R$$

$$\sigma = \frac{1}{2} r \cdot h \cdot s \cdot g$$

$$R^2 = r^2 + (R-y)^2 = r^2 + R^2 - 2Ry + y^2$$

$$2Ry = r^2 + y^2$$

$$R = \frac{r^2 + y^2}{2y} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{1}{2} hsg \cdot \frac{r^2 + y^2}{2y}$$

/ $\vartheta \ll \Rightarrow y \approx r$

$$\sigma = \frac{1}{2} hsg r$$

Meranie kapilárnej konštanty:

1, $\sigma = \frac{1}{2} shgr$



2, pomocou 2 kapilár:

$$\sigma = \frac{1}{2} sgkr$$



$$r_1 < r_2 \quad h_1 - h_2 = \Delta h$$

$$\sigma = \frac{1}{2} sgkr_1 = \frac{1}{2} sgkr_2$$

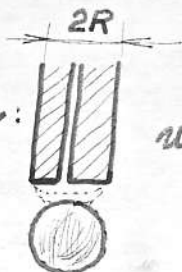
$$h_1 = \frac{2\sigma}{sg r_1}$$

$$h_2 = \frac{2\sigma}{sg r_2}$$

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{sg} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2\sigma}{sg} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

3, kvapková metóda:

Váha kv. prekona
povrchové nap. ktoré
násobi po obvode kapil.



$$\sigma = \frac{1}{2} \Delta h \cdot s \cdot g \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

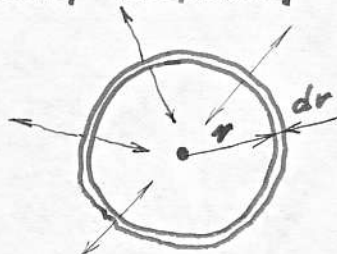
Určime hmotnosť 1 kvapky: $G = m \cdot g$

$$f = 2\pi R \cdot \sigma = G$$

$$mg = 2\pi R \sigma$$

$$\sigma = \frac{m \cdot g}{2\pi R}$$

4. Urč. σ pomocou otrhovania krúžku od klobodiny kvapaliny.



Akr. odtrhávame od kv. rozt. H_2O potom je potrebné pôsobiť silou:

$$F = 2\pi r \cdot 2\sigma$$

Ak máme izu kvapaliny:

$$f' = 2\pi r \cdot 2\sigma'$$

$$f:f' = \sigma:\sigma' \rightarrow \sigma' = \sigma f':f \quad \sigma_{H_2O} \approx 73 \text{ dyn/cm}$$

Vyparovanie kvapalín

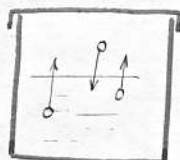
Neusporiadaný pohyb molekúl.

Niekt. molekuly dosiahnu rýchlosť, dostanú sa na povrch kvapaliny. $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Ak sa dostane od prít. sil (jej kin. energ. je značná) povrch. molekúl ~ vyp. Ak teplota kv. zrášťa; zr. aj počet molekúl, ktoré sa dostanú nad povrch kvap.

Rýchlosť vyp. závisí o teplote.

Skupenské teplo vyparovania Q_v - je potrebné dodať jednotk. hmotnosti kvapaliny, aby sa premenila na paru. Opačný pochod - kondenzácia.



Z_1 - počet molekúl ktoré sa dostanú nad povrch
 Z_2 - " " " " nad povrchu du kvapaliny

Zo začiatku: $Z_1 > Z_2$ (počet Z_1 ; aj Z_2 sa zväčšuje)

Pri určitom stave $Z_1 = Z_2$ ~ rovnovážny stav.

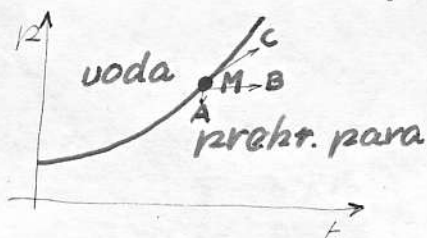
Para za takehoto stavu: nasýtená para.

Nasýtenie (tlak na nád.) je zav. len o teplote; (o objeme nie.)

S väčším objemu väčší sa Z_1 .

Prekriata para: jej nap. je menšie ako nas. nap. riadi sa ~ plynými zákonmi.

Závislosť tlaku od teploty: (nas. p.)



z nas. pary možno dostať prebr. p. :

- 1.) izoterm. zväčš. objemu (znáz. úsečka MA)
- 2.) chráť. za konšt. tlaku (MB)
- 3.) chráť. pri konšt. objeme (MC)

Pri ktorej teplote tlak nas. pár = vonk. tlak ; para sa rozptina.
Vznika nová para $\Rightarrow$ doch. k rýchlemu výpr. aj znútra ku.
Vytvárajú sa bubliny:

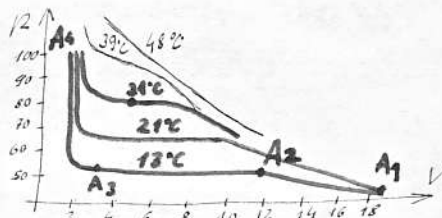
Var: Bod varu - teplota pri kt. kv. vrie.
 $T_{\text{ohn.}} = 100^\circ\text{C}$
nižší tlak - nižší bod varu.

Skvapalňovanie plynu (kondenzácia)

CO_2



závislosť tlaku od objemu pri rôzn. konšt. tepl.:



proces skvap.

smeňšením objemu: Ak tlak sa rovná napr. nasýtených pár. (A_2) vznikajú kvapôčky CO_2 nastáva skvap.

Pri ďalšom zmenš. V ; tlak je konšt. ; kým plyn neprejde do skv. stavu.

pri urči. teplote úsek konšt. tlaku zmizne:

Kritický stav (sodpoved. kr. T ; kr. V ; kr. p .)

V kr. stave zmizne rozdiel medzi 2. fázami.

Ak je vyššia teplota ako krit. tepl. - plyn sa nedať skvap.

Radikritickou teplotou: plyn. } označ.
pod " " : para

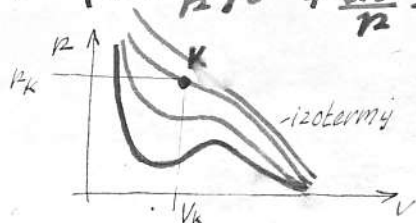
Pri skv. ; plyn treba ochladiť pod kr. teplotu.

Určenie kr. hodnôt V_k ; p_k ; t_k pomocou W.d.W. rovn.

$$(pV^2 + a)(V - b) = RTV^2$$

$$pV^3 + aV - pbV^2 - ab - RTV^2 = 0 \quad / : V^2$$

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)V^2 + \frac{aV}{p} - \frac{ab}{p} = 0 \quad - \text{súvis medzi } p; V$$



porovn. exper. a teor. izotermov: zhodujú sa v tých stavoch ; v ktorých existuje len 1 fáza.

$$\frac{dp}{dV} = 0 \quad \frac{d^2p}{dV} = 0$$

z W.d.W. rovn. : $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

$$\frac{dp}{dV} = -RT(V-b)^{-2} + 2aV^{-3} = 0 \quad (\text{krit. } p; V)$$

$$\frac{RT}{(V_k-b)^2} = \frac{2a}{V_k^3} \quad (1)$$

$$\frac{d^2p}{dV} = 2RT[V-b]^{-3} - 6aV^{-4} = 0$$

$$\frac{RT}{(V_k-b)^3} = \frac{3a}{V_k^4} \quad (2)$$

(1):(2)

$$\underline{V_k = 3b} \xrightarrow{(1)} \frac{RT_k}{4b^2} = \frac{2a}{27b^3} \rightarrow \underline{T_k = \frac{8a}{27Rb}}$$

$$p_k = \frac{RT_k}{V_k-b} - \frac{a}{V_k^2} = \frac{R \cdot 8a}{27Rb \cdot 2b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2} = \underline{\underline{\frac{a}{27b^2} = p_k}}$$

z p_k T_k možno určiť W.d.W. konštanty $a; b$.

$$a = 27b^2 p_k \rightarrow T_k = \frac{8 \cdot 27b^2 p_k}{27Rb} \rightarrow \underline{\underline{b = \frac{RT_k}{8p_k}}}$$

$$\underline{\underline{a = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_k^2}{p_k}}}$$

Štruktúra a vlastnosti pevn. látok

molekuly, ióny, atómy sú pevne väzané. Vykonaávajú len kmitavý pohyb okolo rovnováž. polohy.
Teplotou sa zvyší intenzita pohybu.

Druhy väzieb - látky kryštalické (sym. geom. stavba)
amorfne (polohy at. nie sú presne uspor.

Kr. látky sú anizotropné. Kr. látka v rôznych smeroch
ukazuje rôzne fyz. vlastnosti.

(magnetické, elektrický, ... chem; fyz. vlast.

Amorfne l. sú izotropné : fyz. vl. vo vš. sm. sú rovnaké

Zreteľne viditeľný kryštál ~ monokryštál

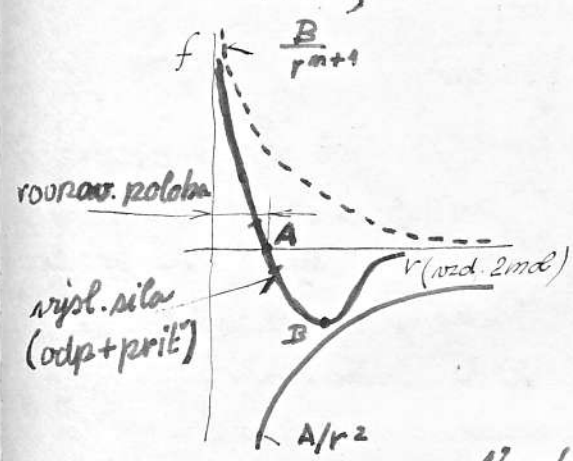
Polikryštalické látky ~ drobné monokr. tvoria jeden kryštál (ocel).

Geom. miesta stao. častí ~ kryst. mriežka. :

1. iónová mriežka - NaCl
2. atomárna " ~ sláv. č. - sú neutrálné at. prvky
3. molekulová "

V kovovej mriežke elektróny (voľne pohyb.) tvoria elektr. plyn.

Sily medzi mol. pevnej látky



$$f = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^{m+1}} \quad [m > 2]$$

A, B závisia od druhu látok.
[odpudivá - , priťahovacia sila]

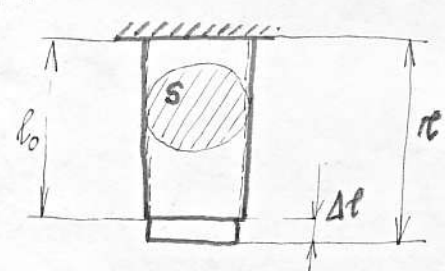
[látky sa bráni proti namáhaniu nátlak]
zmena štruktúry: deformácia (tlakom, ťahom).

V okolí A veľmi dobre sa môže krivka nahradzo-
vať priamkou: Pružné vlastnosti (Hookov z.)

B - hranica (medza) pevnosti
za B - oblasť trvalej deformácie

Hook-ov zákon.

Pr:



$$\Delta l = l - l_0 \quad \text{Predl. je úmerné sile}$$

$$\Delta l = Kf \quad (K \text{ charakt. aj rozmery tyče})$$

$$\Delta l = k \cdot \frac{f}{s} l_0 \quad (k \text{ charakt. na mater.})$$

Relatione predĺženie - predlž. prip.
na jednotku dĺžky: $\frac{\Delta l}{l_0} = k \frac{f}{s}$ $\frac{f}{s} = 6 \text{ - m\u00e1j\u00e1t. norm\u00e1la}$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \epsilon$$

$$\epsilon = k \cdot \sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{k} \cdot \epsilon \quad \frac{1}{k} = E \text{ modul pružnosti ťahu [kp/cm}^2\text{]}$$

$$\sigma = \epsilon \cdot E$$

ocel: $2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$

E - tabulkové hodnoty

Topenie a vypar. pevn. látok.

rovnovážna poloha - kmit. pohyb - intenzita kmitov.

Dodávaním tepla zväčšuje sa amplitúda kmitov.



Topenie - molekuly sa dostávajú do oblasti za obl. pružn. def. (za urč. teploty okamž. vzd. medzi 2 mol. je väčšia ako je hodnota hranič. pevnosti)

Bod topenia - nastáva topenie.

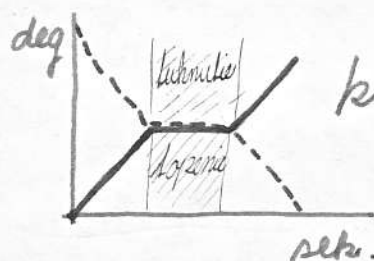
Tuhnutie - opačná vl. než topenie.

Roznake' miz. rôznych látok spotrebujú rovnem. tepla :

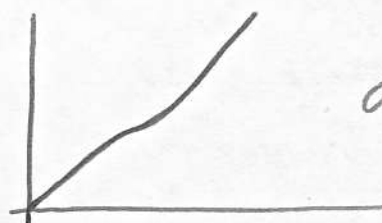
Skup. tepla top. je množstvo tepla, ktoré' je treba dodať jedn. hm. látky aby zmenila svoje skupenstvo na kvapalnú pri konšt. teplote. [cal g^{-1} ; kcal kg^{-1}]

Bod top. a tuhnutia je tá istá hodnota u kryšt. látok a dá sa jednoznačne určiť.

Pri amorf. látok nie.

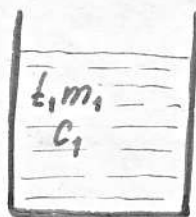


kryšt. látky



amorf. l.

meranie skup. tepla :



m_2, t_2 (ľad - t nemusi byť 0°C)
 c_2

$$M = m_0 c_0 + m_1 c_1 \quad \text{predp. } t_1 \rightarrow t_0$$

calorim.

$$M(t_1 - t) = m_2 c_2 (t_0 - t_2) + m_2 L_f + m_2 c_3 (t - t_0)$$

$$L_f = \frac{M(t_1 - t) - m_2 c_2 (t_0 - t_2) - m_2 c_3 (t - t_0)}{m_2}$$

Zmenou skupenstva medzi sa objem $\rightarrow$ hustota látky.

1) - zmenou skp. sa im objem zmenšuje.

2) - kv. má väčší objem ako pevn. látka.

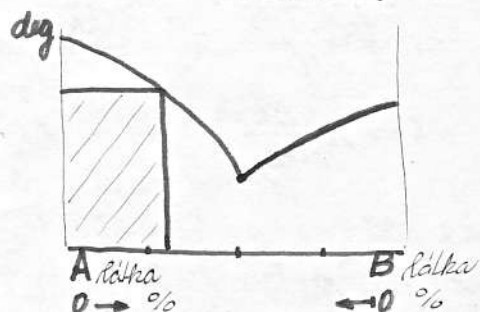
[Ľad má väč. objem ako voda - ľad pláva.]

Bod top. je závislý od vonk. tlaku.

U látok, ktoré top. svoj objem zväčš.; pri vyššom tlaku je bod top. vyšší.

[U l., ktoré top. s.o. zmenš.; pri nižš. tlaku je teplota t. nižšia]

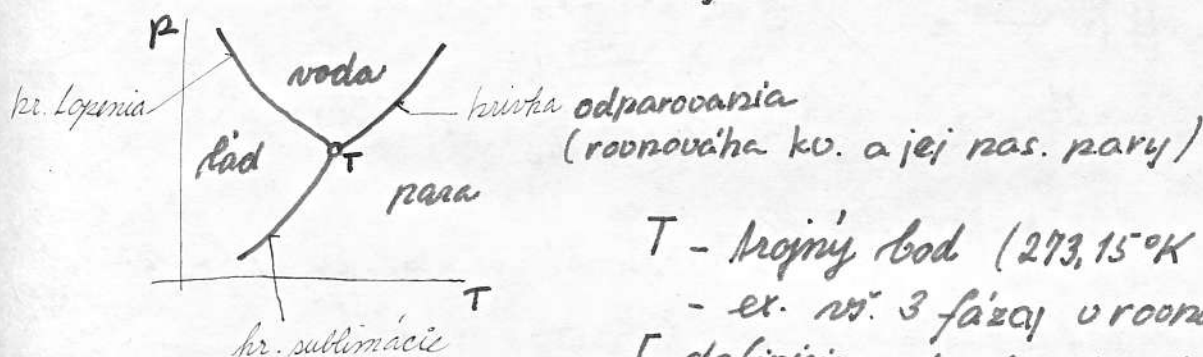
Bod t. závisí aj od čistoty t.



fázový diagram.

Sublimácia pevné t.: premena: pevn. $\rightarrow$ pl. fáza.
Sublimačné teplo je m.p.t. pri ktorej dodaním pri konšt. teplote a tlaku nastáva sublim.

Rovnovážny diagram vody



T - trojný bod ($273,15^\circ\text{K}$ pri H_2O)

- ex. nř. 3 fázaj v rovnováhe.

[definícia tepl. stupňa]

Šírenie tepla

vedením - kondukciou

prúdením - (u kv. a plynnej fáze)

žiarením.

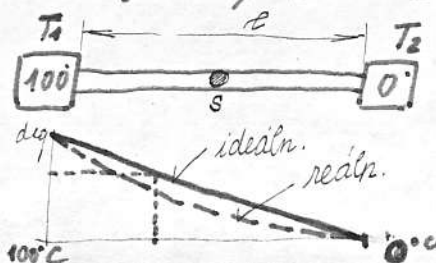
1, neustálené šír. tepla



nväč. kin. energia
častíc sa vyrovnáva.

2, stacionárne šír. t. (1 koniec udrž. na stálej teplote)

Teplota v jednej mieste je stále!



$$Q = \lambda \cdot S \cdot T \frac{t_1 - t_2}{l}$$

λ - koef. tepl. vodiv.

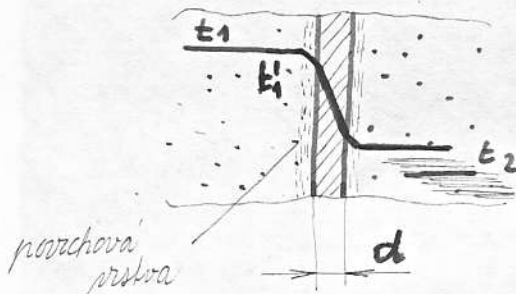
$$\left[\frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot \text{deg}} \right] \cdot \left[\frac{\text{kcal}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{deg}} \right]$$

Látky : dobre vodivé (Ag ... $\lambda = 1,01$)
 (ľad ... $5 \cdot 10^{-3}$)
 zlé vod. : azbest;
 papier; $3 \cdot 10^{-4}$

Hustota tepelného toku : $i = \frac{Q}{s \tau} = \frac{\lambda s \tau (t_1 - t_2) \cdot l^{-1}}{s \tau}$
 $i = \lambda \frac{\Delta t}{e}$

Št. prúdením : (kv.; plynná fáza)
 hustota kv. sa teplom mení; ľahšie časti
 stúpajú nahor.

Prechod tepla rozhraním.



* $t_1 > t_2$

$$i = \alpha_1 (t_1 - t_1') =$$

$$= \lambda \left(\frac{t_1' - t_2'}{d} \right) =$$

$$= \alpha_2 (t_2' - t_2).$$

α_1 - koef. prechodu tepla
na rozhraní

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_1' &= \frac{i}{\alpha_1} \\ t_1' - t_2' &= \frac{d i}{\lambda} \\ t_2' - t_2 &= \frac{i}{\alpha_2} \end{aligned} \right\}$$

$$t_1 - t_1' + t_1' - t_2' + t_2' - t_2 = i \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)$$

$$t_1 - t_2 = i K^{-1} \quad \text{charakt. } K \text{ druheho poradi}$$

K - koef. prechodu tepla stenou

$$i = K (t_1 - t_2) \quad \left[\frac{\text{cal}}{\text{m}^2 \text{s deg}} ; \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{h deg}} \right]$$

Základy termodynamiky

43

1. termometria - stupnice; mer. teploty...
2. kalorimetria - mer. tepla; šp. tepla...
3. termodynamika - zákony premen foriem energie

teplo a práca. (súvis medzi jednotkami)

- sú ekvivalentné spôsoby prenosu energ. → ekv. tepla a pr.

Joul. (1842-50 angl. fyz.) $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ $1 \text{ kcal} = 4180 \text{ J}$
 mechanický ekv. tepla: (J) - pomer práce A vyj. v jednot.
 práce a tepla Q vyj. v jednotk. tepla:

$$J = \frac{A}{Q} = 4,18 \text{ J cal}^{-1} = 0,427 \text{ kpm cal}^{-1} \quad 1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$$

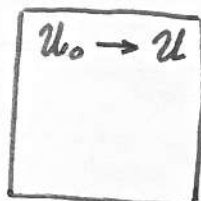
Tep. ekv. mechanickej práce:

$$K = \frac{1}{J} = \frac{Q}{A} = 0,239 \text{ cal. J}^{-1} \quad 1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$$

1. ohriatie $1 \text{ g H}_2\text{O}$ o 1°C $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$
2. spal. 1 g C. ... rov. na rov. er. σ $4000 \text{ cal} = 2,9 \cdot 10^4 \text{ J}$
3. pri štep. 1 g U_{235} rov. er. $2 \cdot 10^{10} \text{ cal} = 8,4 \cdot 10^{10} \text{ J}$

T.d. je budovaná na základných termodyn. vetách; - sú nositeľom experimentálnych výsledkov.

I. Veta t.d. - na zákl. ekv. práce a tepla:



zmena vnútornej energie: $U - U_0$

[súst. prijíma alebo odovzdáva energiu prostredníctvom mech. práce; tepla; príp. obidvoch spôsobmi.]

A - rozponka dod. práca

Q - " " teplo

$$U - U_0 = Q + A$$

$$dU = dQ + dA$$

① Mat. vyjad. I Vety term.d.

②

Zmena vn. energie pri akejkoľvek stao. zmene sa rovná súčtu mech. práce a tepla, ktoré bolo rozponku dodané na uved. zmene.

Sústava môže teplo prijímať (+); odovzdať (-); prácu dodávať (+); odovzdávať (-).

$\frac{dA'}{dQ'}$ } odovzdaná sústava

$$dA' = -dA$$

$$dQ' = -dQ$$

$$\left. \begin{array}{l} dQ = dU - dA \\ dQ = dU + dA' \end{array} \right\}$$

Tepló dodané sústave dQ sa spotrebuje na vzrast vn. energie dU a na prácu vykonanú sústavou dA' .

Deje vratné a nevratné - súst. t. je určená stavovými veličinami.

Ked' vel. zostávajú po ľubov. dobu rovnaké - sústava je v rovnovážnom stave. (Opačne v súst. prebieha dej)



Rovnovážne (kvázistatické) deje.



- zmeny stav. veličín sústavy sú nekonn. malé; potom v každom okamihu majú konšt. hodnotu.

V urč. čas. úseku Δt - možno rov. za rovnováž. ky stav. - rovnovážny dej -

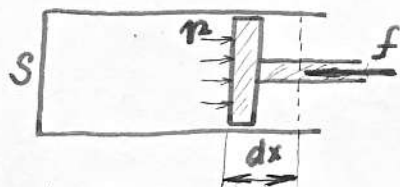
$$\begin{array}{l} t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_1 \\ p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_1 \end{array}$$

} vratný dej



Skutočné deje sú nevratné (or. d. sú len limitné prípady)

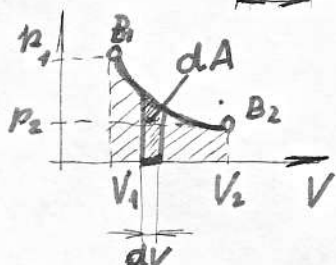
Objemová práca plynu



$$f = p \cdot S$$

$$dA = f \cdot dx = p \cdot S \cdot dx = p \cdot dV = dA$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$



graf. urč. práce. (plocha)

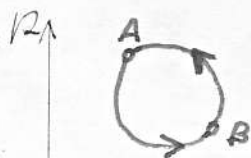
$$\text{ak } p = \text{konšt} \rightarrow A = p \int dV = p(V_2 - V_1)$$

Celková práca plynu z B_1 do B_2 : $A = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$

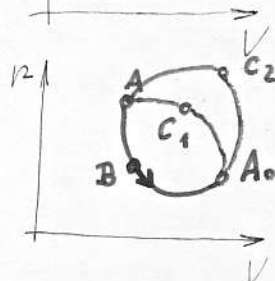
$$dQ = dU + p \cdot dV$$

$$dA' = p \cdot dV$$

Deje cyklické - postáv. zmeny; pri ktorých sústava nabrala Q; A sa s. vráť do pôv. stavu



$$\oint dU = 0$$



$$A_0 \rightarrow A$$

- a.) cez stav C_1
- b.) - - - C_2

zmena vn. en. po kruhovej ceste = 0

$$\oint dU = \int_{ABA_0} dU + \int_{A_0C_1A} dU = \int_{ABA_0} dU + \int_{A_0C_2A} dU = 0$$

$$\int_{A_0C_1A} dU = \int_{A_0C_2A} dU$$

Ked' plyn je prev. zo st. A_0 do st. A ; celková zmena vn. en. závisí len o týchto st.; ale nezávisí od spôsobu prechodu.

6.V. 1969

Molekulové a merné (specificke) teplo plynu

Mol. teplo - teplo, ktoré je potrebné dodať 1gM na zahr. o 1°C. číselné hodnoty m. t. sú rôzne. Závisí: pri akých podmienkach dochádza k zmene teploty:

- a. $V = \text{konšt.}$ $p \rightarrow$; mol teplo označ. C_V
- b. $p = \text{konšt.}$ $t = \text{konšt.}$ $V \rightarrow$; " C_p

C_V C_p je def. : $\frac{(dQ)_V}{dT} = C_V$ $C_p = \frac{(dQ)_p}{dT}$

Odvodenie: $dQ = dU + dA'$ $dA' = p \cdot dV$
 $dQ = dU + p \cdot dV$

Ak $V = \text{konšt.} \rightarrow dV = 0$
 $dA' = p \cdot dV = 0$

Ak sa mení teplota pri $V = \text{konšt.}$ preto je vnút. energia = 0.

$$(dQ)_V = (dU)_V$$

$\left. \begin{matrix} dQ_V \\ dQ_p \end{matrix} \right\} \text{teplo}$
 potrebné na zahr. 1gM. o dT

Uč. energ. plynu závisí len od teploty; teda:

$$(dQ)_v = dU \quad , \text{ potom } C_v = \frac{(dQ)_v}{dT} = \frac{dU}{dT}$$

C_v - prírastok vnút. energ. k zvýšeniu teploty:

$$dU = C_v \cdot dT$$

b. Molekulové teplo pri stálom tlaku:

$$p = \text{konšt.}, \quad dp = 0$$

aplikácia pr. 1. zlu termodynamiky.

$$\begin{aligned} dQ &= dU + p \cdot dV \\ (dQ)_p &= du + p \cdot (dV)_p \\ (dQ)_p &= C_v \cdot dT + R \cdot dT \\ (dQ)_p &= (C_v + R) dT \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} dU &= C_v \cdot dT \\ p \cdot V &= R \cdot T \cdot n \quad n = \frac{m}{M} \\ n \cdot dV + \underbrace{v \cdot dp}_0 &= R \cdot dT \\ n \cdot (dV)_p &= R \cdot dT \end{aligned} \right.$$

$$C_p = \frac{(dQ)_p}{dT} = \frac{(C_v + R) dT}{dT} = C_v + R = C_p \quad \sim \text{Mayerova rovnica}$$

$$R = C_p - C_v$$

plynová konštanta sa číselne rovná práci, ktorú vykoná 1gM plynu pri ohriati o 1°C pri stálom tlaku.

Súvis medzi molekulovým a merným teplom.

$$\left. \begin{aligned} C &= c \cdot M \\ C_v &= c_v \cdot M \\ C_p &= c_p \cdot M \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} C_p &= C_v + R \\ c_v \cdot M + R &= c_p \cdot M \\ c_p &= c_v + \frac{R}{M} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \quad \sim \text{poissonova konštanta}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p \cdot M}{C_v \cdot M} = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{merné teplo}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + \frac{R}{M}}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v \cdot M}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$$

$$C_v = \frac{i}{2} R \quad \sim i \text{ počet stupňov voľnosti}$$

$$\gamma = 1 + \frac{R}{\frac{i}{2} R} = 1 + \frac{2}{i} = \frac{i+2}{i}$$

γ - závisí len od zloženia plynu. pri 1 atom. plynoch $i=3$:

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1,6$$

$$\text{dvojal. plyn: } \gamma = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\text{troj a viac at. pl. : } \gamma = \frac{8}{6} = 1,3$$

Konkrétne stavové zmeny:

vychádza z 1. termodyn. vety:

$$dQ = dU + dA'$$

$$dQ = C_v \cdot dT + p \cdot dV \quad \sim \text{pre 1gM.}$$

Vnútroštná energia pre n grammol.: $dU = \frac{m}{M} \cdot C_v \cdot dT$

I. Izochorický dej: $V = k. \Rightarrow dV = 0$

I.V.E.: $dQ = dU + dA' = \dots = m \cdot C_v \cdot dT \quad / \quad dA' = 0$

$$Q = n \cdot C_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT = m \cdot C_v (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \cdot C_v (T_2 - T_1)$$

(pri izoch. daji ohrievaním rastie vnút. energia plynu.)

$$dQ = dU$$

$$Q = U$$

alebo $Q = \int_{u_1}^{u_2} du = (u_2 - u_1) = U$

II. Izobarický dej: $p = k \Rightarrow dp = 0$

$$dQ = dU + dA' \xrightarrow{\text{int.}} Q = U + A'$$

$$dQ = m \cdot C_v \cdot dT + p \cdot dV$$

$$Q = \int_{u_1}^{u_2} dU + p \int_{V_1}^{V_2} dV = m \cdot C_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT + p \int_{V_1}^{V_2} dV = n \cdot C_v (T_2 - T_1) + p (V_2 - V_1)$$

$$pV = R \cdot T$$

konšt. $V_1 \rightarrow V_2 \Rightarrow T_1 \rightarrow T_2$

$$pV_1 = n \cdot R \cdot T_1 \quad pV_2 = n \cdot R \cdot T_2$$

$$p(V_2 - V_1) = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$Q = n \cdot C_v (T_2 - T_1) + n \cdot R (T_2 - T_1)$$

$$Q = (m \cdot C_v + n \cdot R) (T_2 - T_1)$$

$$Q = m \cdot (T_2 - T_1) (C_v + R)$$

$$Q = m \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_v + R = C_p \end{array} \right.$$

III. Izotermický: $T = k. \Rightarrow dT = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} dT = 0; dU = 0; m \cdot C_v \cdot dT = 0 \end{array} \right.$

I.V.E.:

$$dQ = dU + dA'$$

teplo sa sprac. na prácu

$$dQ = dA' = p \cdot dV$$

$$Q = A' = p (V_2 - V_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \rightarrow V_2 \end{array} \right.$$

- na predpokladu, že $p = \text{konšt.}$

Izoterm. ; ak p sa meri:

$$pV = n \cdot R \cdot T \rightarrow p = \frac{nR \cdot T}{V}$$

$$Q = A' = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\begin{matrix} V_1 \rightarrow V_2 \\ p_1 \rightarrow p_2 \end{matrix}$$

B-M: $pV = RTn = \text{konšt.}$

$$Q = p_1 V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 V_2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} ;$$

Izotermická expanzia. $\sim$ rozplätanie $V_2 > V_1$

$$\Rightarrow Q = A' \sim \text{práca je kladná};$$

ak $V_2 < V_1$ $\sim$ kompenzácia, stlačenie; $Q = A' < 0$ je záporná.

IV. Adiabatický dej: $dQ = 0$

Adiab. d. prebieha pri dokonalnej tepelnej izolácii, nedochádza k výmene tepla medzi plynom a okolím.

$$\text{Ib.V: } dQ = dU + dA' = 0 \Rightarrow dA' = -dU$$

$$A' = - \int_{U_1}^{U_2} dU = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

práca, ktorú plyn vykona' sa deje na úkor vnút. energie.

$$dU = n \cdot C_v \cdot dT$$

$$dA' = p \cdot dV$$

$$-n \cdot C_v \cdot dT + p \cdot dV = 0$$

$$pV = nRT \quad / \text{deriv.}$$

$$p \cdot dV + V \cdot dp = n \cdot R \cdot dT \Rightarrow dT = \frac{n \cdot dV + V \cdot dp}{n \cdot R}$$

$$n \cdot C_v \cdot \frac{n \cdot dV + V \cdot dp}{n \cdot R} + p \cdot dV = 0$$

$$n \cdot C_v \cdot \frac{n \cdot dV}{n \cdot R} + n \cdot C_v \cdot \frac{V \cdot dp}{m \cdot R} + \frac{n \cdot R \cdot p \cdot dV}{n \cdot R} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{R}$$

$$p \cdot dV (C_v + R) + C_v \cdot V \cdot dp = 0$$

$$/ C_v + R = C_p$$

$$(C_p)_v \cdot dV \cdot V \cdot p + C_v \cdot V \cdot dp = 0$$

$$/ C_v + R = C_p$$

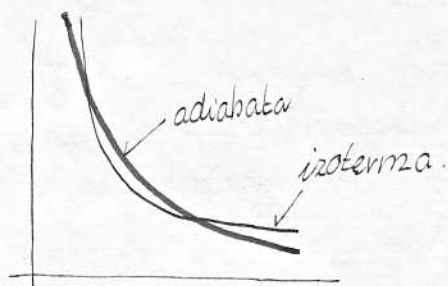
$$\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\kappa \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\kappa \cdot \ln V + \ln p = \ln \text{konšt.}$$

$$p \cdot V^\kappa = \text{konšt.} \quad \sim \text{poissonova rovnica}$$



re adiab. $\kappa > 1$

$$\begin{aligned} V_1 &\rightarrow V_2 \\ p_1 &\rightarrow p_2 \\ T_1 &\rightarrow T_2 \end{aligned}$$

pri adiab. : $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$

Poissonova rovnica.

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa = \frac{p_2}{p_1} = \frac{m \cdot R \cdot T_1 \cdot V_2}{V_1 \cdot m \cdot R \cdot T_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\begin{aligned} p_2 V_2 &= n R T_2 \\ p_1 &= \frac{n R T_1}{V_1} \\ p_2 &= \frac{n R T_2}{V_2} \end{aligned}$$

Pri $V_2 > V_1$ ad. expanzia $T_2 < T_1$

Pri kompenzii $V_2 < V_1$ $T_2 > T_1$

Práca pri adiabatickom deji:

$$dQ = 0 \quad dA' = -dw = -\int_{u_1}^{u_2} du = -(u_2 - u_1) = -\Delta u$$

$$A' = -u = -m C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = -m C_v (T_2 - T_1)$$

$$dA = p \cdot dV \rightarrow A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa = p V^\kappa$$

$$p = \frac{p_1 V_1^\kappa}{V^\kappa} \quad \text{closed}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\kappa} = \\ &= p_1 V_1^\kappa \cdot \frac{V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa} \end{aligned}$$

$$A' = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-\kappa}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ad. exp. : } V_2 > V_1 \quad \dots T_2 < T_1 \\ \text{ad. kompresie } V_2 < V_1 \quad \dots T_2 > T_1 \end{array} \right.$$

Příklad:

7. V. 1969.

Carnotov kruhový dej

kruhový dej (cyklus) term. sústavy (napr. plynu) je taký súbor stavových zmien, po ktorých sa sústava vráti do poč. stavu.

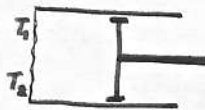
C. d. - je vratný kruhový dej. Chladiť sa po sebe nasled.

dejav: 1. Izotermická expanzia

2. Adiabatická

3. Izot. kompresia

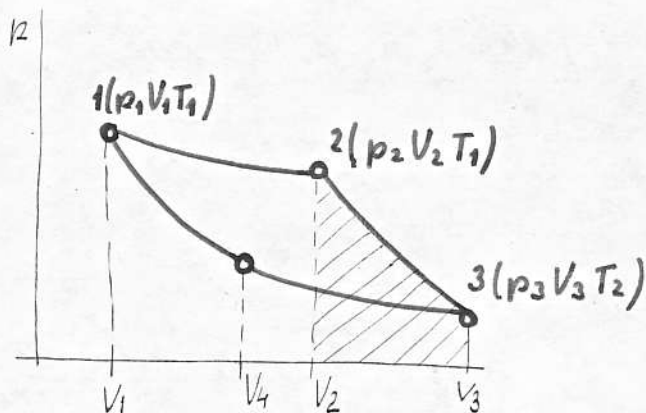
4. Adiab. kompr.



Pre tzv. Carnotov ideálny tepl. stroj je prac. látkou ideálny plyn, ktorý sa nachádza vo valci s púšťom, pohybujúceho sa bez trenia. Sú dokonale izolovými tepla.

Dno valca je spoj s okružiacom ochladičom: $T_1; T_2$

Poč. stav: ① (p_1, V_1, T_1) $T_2 < T_1$



1. Izot. expanzia

$T_1 = \text{konst.}$

$$Q_1 = A_1 = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2. Adiab. exp.

Dokonale izol. valec je prevedení zo stavu ① do st. ②. Plyn sa adiab. expanduje z ② do ③

$$A_2 = n C_v (T_1 - T_2)$$

2'-2-3-3'

Súvis medzi T_1, T_2 V_1, V_2 udáva poissonova rovnica:

$$\frac{V_1 \rightarrow V_2}{T_1 \rightarrow T_2}$$

$$\text{pre náš prípad: } \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

3. Izot. kompresia:

dno valca schladit; izoterm. tlacit z V_3 na V_4 je potrebné znovu dodať prácu.

$$A_3 = Q_2 = n R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

3'-3-4-4'

4. Adiab. kompres.

z ④ → ①

plyn je potre. stlačiť adiab. ; aby sa vrátil do 1. stavu.

$$\frac{V_4 \rightarrow V_1}{T_2 \rightarrow T_1}$$

$$A_4 = n \cdot C_v (T_1 - T_2)$$

4'-4-1-1'

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{\gamma-1}$$

+ *

~ súvis

podmienka kruhového uzavretého cyklu: $\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4}$ $\frac{V_4}{V_2} = \frac{V_3}{V_1}$

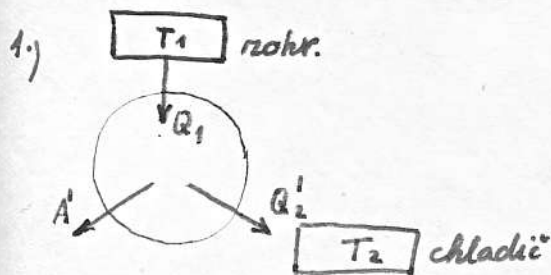
Práca pri (2) = - (4)

Pr. m. sa nachádzajú len práce rozst. ex. a rozst. kompresie:

$$A' = A_1 - A_3 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} (T_1 - T_2)$$

Účinnosť stroja:

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{nR \ln \frac{V_2}{V_1} \cdot (T_1 - T_2)}{nR T_1 (\ln \frac{V_2}{V_1})} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad ; \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

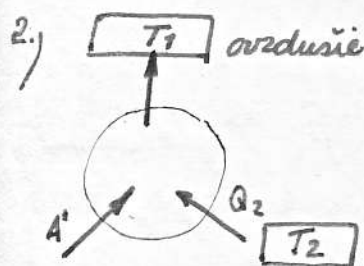


rozst. je dodané teplo Q_1 :

1.) m. spotr. na vykon. práce

2.) druhá časť sa odvedie do chladniča.

(kladný smer.)



na tomto princípe sa pohľadá
chladiaci stroj

(záporný smer deja)

1. termodyn. veta: $dQ = dU + dA'$ nehovorí, či je možné úplnú
premenu jednej energie na druhú. Na to odpov. II. L. V.

Druhá veta termodynamiky

$Q_1 \rightarrow A'$
 Q_2 } Výhodný stroj by pracoval: $Q_1 \rightarrow A'$

Ostwald nazval taký stroj: perpetuum mobile 2.-ho druhu.

Def. II. TV: nie je možné zostrojiť perp. mobile.

Planck: nemožno zost. stroj - periodicky pracujúci - ktorý by
spôsobil len premenu (ubral by teplo zo zdroj.
a vykonal by rovnocennú prácu).

Clausius (1850) - pri styku 2 telies prechádza teplo vždy
na chladnejšieho a nikdy naopak.

Entropia - jedna zo stav. veličín (p, V, T)

$$dQ = C_v \cdot dT + p \cdot dV$$

$$dQ = C_v \cdot dT + R \cdot T \cdot \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{dQ}{T} = C_v \cdot \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

Výsleduje súvis medzi teplotou a objemom.

$$dS = \frac{dQ}{T} \sim \text{elementárna entropia}$$

Ked' súst. pri urč. teplote T naberie element. teplo dQ , zmení sa jej entropia o dS .

ukážka re. entropia je stav. veličina.

$$T_1 \rightarrow T_2 \text{ chl.}$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} \quad \left. \begin{array}{l} Q_2' - \text{odovzd. teplo} \\ Q_2 - \text{od chladi. nabrane teplo} \end{array} \right\} Q_2' = -Q_2$$

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}$$

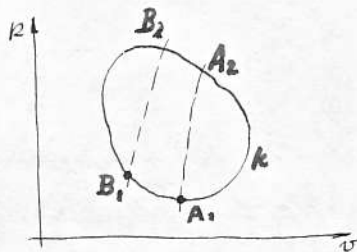
$$1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$$\frac{Q}{T} \sim \text{redukované teplo}$$

Právom je pre Carn. kruh. dej je súčet redukovaných teplot = 0

13.V. 1969.



A, B, - charakterizujú urč. stav.

adiabata prech A1 určuje A2

Nech po A1, B1, B2, A2 je kruhový C. - cyklus. Potom pri prech. A1 → B1, súst. zach. teplo:

$$A_1 \rightarrow B_1 \dots T_1 \dots (dQ)_1$$

$$B_2 \rightarrow A_2 \dots T_2 (< T_1) \dots (dQ)_2$$

$$(dQ)_2 = -(dQ)_1$$

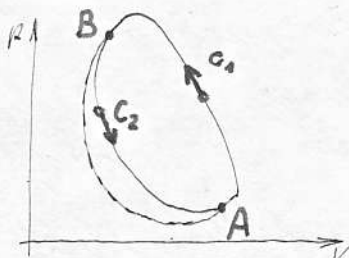
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

(platí len pre kruh. dej)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(dQ)_1}{T_1} + \frac{(dQ)_2}{T_2} = 0 \end{array} \right\} \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Takých adiabat možno zostrojiť mnoho.

podmienka C. - kruh. cyklu.



$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{A \rightarrow B} \frac{dQ}{T} + \int_{B \rightarrow C_2} \frac{dQ}{T} + \int_{C_2 \rightarrow C_1} \frac{dQ}{T} + \int_{C_1 \rightarrow A} \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow \int_{A \rightarrow B} \frac{dQ}{T} = - \int_{C_2 \rightarrow C_1} \frac{dQ}{T}$$

$$\int_{A \rightarrow B} \frac{dQ}{T} = \int_{A \rightarrow C_2} \frac{dQ}{T}$$

Je jedno ktorým smerom prejdeme do druhého stavu.

Prechod súst. v jedného stavu do dr. závisí len od stavov, a nezávisí od spôsobu prechodu. [S - je stavovou veličinou]

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \dots\dots S_A \\ B \dots\dots S_B \end{array} \right\} \text{ zmena entropie: } \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

Jednotka entropie: $[S]_{SI} = J \text{ deg}^{-1}$ $[S] = \text{cal deg}^{-1}$

id. plynu: $T_0 \rightarrow T_1$
 $V_0 \rightarrow V_1$

Výpočet zmeny entropie

$$pV = n \cdot RT$$

$$dQ = dU + dA'$$

~ stav. rovn.
~ 1 term. dyn. v.

$$dQ = m C_V dT + p \cdot dV = m C_V dT + m R T \frac{dV}{V} \quad / : T$$

$$\frac{dQ}{T} = m C_V \frac{dT}{T} + m \cdot R \cdot \frac{dV}{V} = dS$$

$$\int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_1} m C_V \frac{dT}{T} + m R \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = m C_V \ln \frac{T_1}{T_0} + m R \ln \frac{V_1}{V_0}$$

$$S_1 - S_0 = m C_V \ln \frac{T_1}{T_0} + m R \ln \frac{V_1}{V_0}$$

Entropia pri adiab. dej:

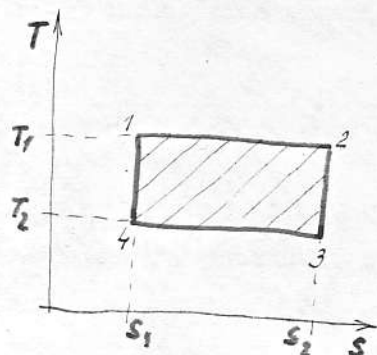
$$dQ = 0 \quad \left| \quad S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} = 0 \Rightarrow S_A = S_B \right.$$

Pri ad. zmene entropia sústavy sa nemení.

Ent. pre izot. dej:

$$T = \text{konšt.} \quad \left| \quad S_B - S_A = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B dQ = \frac{1}{T} \cdot [Q] \right.$$

Pom. entropie možno vyjadriť aj C. - kruhový dej



(1-2-3-4)

1, izot. expanzia (1-2); $T_1 = \text{konšt.}$; $S_1 \rightarrow S_2$

2, adiab. expanzia (2-3); $S_2 = \text{konšt.}$; $T_1 \rightarrow T_2$ ($T_2 < T_1$)

3, izot. kompres. (3-4); $T_2 = \text{konšt.}$; $S_2 \rightarrow S_4$ ($S_4 < S_2$)

4, adiab. kompres. (4-1); $S_1 = \text{konšt.}$; $T_2 \rightarrow T_1$

Q_1 - ktoré prijme súst. pri 1.): $Q_1 = \int_{S_1}^{S_2} T_1 dS = T_1 \cdot (S_2 - S_1)$

(plocha $S_1-1-2-S_2$)

→

Q_2' - teplo odovzdané chladiču

($S_1 - 4 - 3 - S_2$)

Práca vyk. pri C.k. dejí : $A = Q_1 - Q_2' \dots\dots\dots (1-2-3-4)$

Entropia pri nevrátných dejí :

$$\eta' = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1}$$

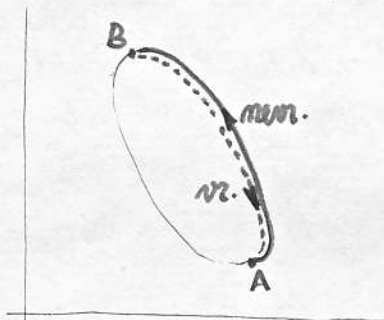
$$< \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

[najväčš. účinnosť je u vr. dejov]

Súčet red. tepiel pre neur. dej je < 0 . ; $\oint \frac{dQ}{T} < 0$



Nech: nevrátny spôsob $A \rightarrow B$

Vrátny spôsob $B \rightarrow A$

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{AB(nr.)} \frac{dQ}{T} + \int_{BA(vr.)} \frac{dQ}{T} < 0$$

$$\int_{AB(nr.)} \frac{dQ}{T} < \int_{AB(vr.)} \frac{dQ}{T}$$

Entropia pri vr. dejí je väčšia ako pri neur. d.

Kmity a vlny

- v prírode
- v technike



Kmitavý pohyb hm. bodu : periodicky mení svoju polohu vzhľadom k lev. strediu.

Retlmený harmonický pohyb v priamke :

$$f \sim x$$

$$-f = k \cdot x$$

$$f = m \cdot a = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

k - konšt. úmernosti ; > 0

závisí od elast. vlastn. pružiny

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$



Dif. rovn. harm: netlm. pohybu v priamke:

riešenie: $x = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

x_0 - amplitúda

φ - fázová konštanta

$\omega t + \varphi$ - fáza

ω - kruhová frekvencia

Periódna kmitania v priamke h. netl. poh. závisí od: m, k

$$\omega = 2\pi n \rightarrow n = \frac{\omega}{2\pi} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Rýchlosť: $v = \frac{dx}{dt}$

$$v = \frac{d[x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)]}{dt} = -x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \omega = -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Zrýchlenie:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

x_0, φ - sa dajú určiť z tzv. počiatočných podmienok:

$$T=0 \rightarrow \begin{aligned} x &= x_0 \cdot \cos \varphi = X_0 \\ v &= -x_0 \omega \cdot \sin \varphi = v_0 \rightarrow \frac{v_0}{\omega} = -x_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad /^2$$

$$X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = x_0^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = x_0^2$$

amplitúda: $x_0 = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ ~ amplitúda

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= x \cdot \cos \varphi \\ -\frac{v_0}{\omega} &= x \sin \varphi \end{aligned} \right\} \lg \varphi = -\frac{v_0}{\omega X_0} \quad \sim \text{fázová konšt.}$$

Celková energia km. bodu konajúceho
netl. harm. pohyb v priamke.

$$E = E_k + E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \int f \cdot dx = k \int x \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \quad (\omega = 2\pi n)$$

$$E_c = 2\pi^2 m^2 n^2 x_0^2$$

n - frekvencia
 m - hmotnosť
 x_0 - amplitúda



Harmónický tlmený pohyb po priamke.

$$\begin{aligned} f_1 &= -kx \\ f_2 &= -r \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad \left| \quad f = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \right.$$

r - konšt.
koef. odporu.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

$$\left| \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right| \quad \frac{r}{m} = 2b$$

pohybová rovn.

tlmeného harm. pohybu: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2b \frac{dx}{dt}$

ω_0 - hr. frekv. neltm. pohybu
 b - koef. tlmenia

Rieš.: subst: $x = z \cdot e^{-bt}$

$x = x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt} \frac{dz}{dt} + z \cdot (-b) e^{-bt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-bt} \frac{d^2z}{dt^2} - b e^{-bt} \frac{dz}{dt} - b \cdot e^{-bt} \frac{dz}{dt} + b^2 z \cdot e^{-bt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-bt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - 2b e^{-bt} \frac{dz}{dt} + b^2 z e^{-bt} \quad \left. \vphantom{\frac{d^2x}{dt^2}} \right\} \text{ dos. do dif. rovn.}$$

$$e^{-bt} \frac{d^2z}{dt^2} - 2b e^{-bt} \frac{dz}{dt} + b^2 z e^{-bt} = -\omega_0^2 (z \cdot e^{-bt}) - 2b e^{-bt} \frac{dz}{dt} + 2b^2 z e^{-bt} / e$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z + b^2 z = -(\omega_0^2 - b^2) z \quad \left| \omega^2 = \omega_0^2 - b^2 \right. \text{ označ.}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z \quad \left| \omega \sim \text{hr. frekv. tlmeného h. pohy.} \right.$$

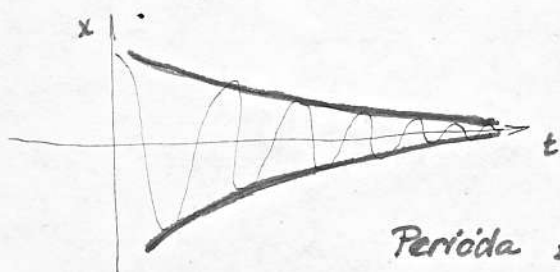
Rieš.:

$$z = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \left| A, \varphi \sim \text{konštanty} \right.$$

dosad. do výrazu $x = z e^{-bt}$

$$x = \underbrace{A \cdot e^{-bt}}_{x_0} \cos(\omega t + \varphi) \quad \left| \text{ampl. } x_0 \text{ časom klesá} \right.$$

Zmena ampl. v závislosti od času:

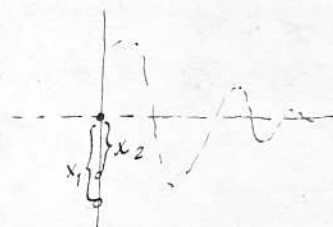


$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$

Periódá tlm. km. je väčšia (neltm. = $\frac{2\pi}{\omega_0}$)

útlm : $\lambda = \frac{x_0(t)}{x_0(t+T)}$

Je určený pomerom dvoch na sebou nasled. ^{amplitúd.} ~~periód~~ na 1 okane.



$$\lambda = \frac{Ae^{-bT}}{Ae^{-b(t+T)}} = e^{bT}$$

$\ln \lambda = bT = \delta$
logaritmický dekrét.

Vynútené kmity

14. V. 1969.

Ok na kmit. sa hmotný bod pôsobí: sila pružnosti f_1 ;
odpor prost. f_2 ;
okrem toho $f_3 = H \cos \omega t$ ~ vynúcajúca sila, závislá od času;
 H ~ amplitúda f_3 ; ω kruhová fr. f_3 - potom:

$$f = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + H \cos \omega t$$

~ pohybová rovnica
vynútených kmitov.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2b \frac{dx}{dt} + h \cos \omega t$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad b = \frac{r}{2m}$$

diff. rovn. 2. rádu s konšt. koef.

Riešenia: a.) obecné rieš. rovn. bez pravej strany
b.) partikulárne rieš. rovn. s pravoú stranou.

$$x_1 = Ae^{-bt} \cdot \cos[\sqrt{\omega_0^2 - b^2} \cdot t + \phi_1]$$

Ok part. rieš ľavej str.: $x_2 = x_0 \cos(\omega t + \phi)$; 1. a 2. der. a dost. Ľ. str.:

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_0 \omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

dosad. a použ. vzorec
($\cos t + \cos B$)

$$-x_0 \omega^2 (\cos \omega t \cdot \cos \phi - \sin \omega t \cdot \sin \phi) = -\omega_0^2 x_0 (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) + 2b \cdot x_0 \omega (\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) + h \cos \omega t$$

Pre $t=0$:

$$-x_0 \omega^2 \cos \phi = -\omega_0^2 x_0 \cos \phi + 2b \cdot x_0 \omega \sin \phi + h$$

Pre $t = \frac{\pi}{2\omega}$:

$$+x_0 \omega^2 \sin \phi = x_0 \omega_0^2 \sin \phi + 2b x_0 \omega \cos \phi$$

$$\begin{aligned} x_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - 2b x_0 \omega \sin \phi &= h \\ x_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi + 2b x_0 \omega \cos \phi &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} /2 \\ /2 \end{matrix} \quad + \text{použ: } \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

$$x_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 x_0^2 \omega^2 = h^2$$

$$x_0 = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2}}$$

$$\lg b = -\frac{2bw}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Za predpokladu, keď $x_0; \varphi$ splňujú uvedené vzťahy potom $x_2 = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ je partikulárnym riešením pohybovej rovnice.

To zn. že obecné riešenie: $x = x_1 + x_2$

$$x = Ae^{-bt} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - b^2} \cdot t + \varphi_1) + x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

obecné riešenie
dif. rovnice.

s nasledujúcim prvým výraz klesá; po dlhšom čase vyvážne.
Pre ustálený stav zostane len 2. výraz:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Ampl. vyr. kmitov závisí od sily a jej frekvencie:

Pre aké ω je x_0 maximálna?

$x_0 \text{ MAX.} \dots$ keď $\eta = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2$ je minimálny (rovn.: $x_0^2 = \dots$)

$$\downarrow \frac{dy}{d\omega} = 0 \quad \frac{d\eta}{d\omega} = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(2\omega) + 8b^2\omega = 0 \quad / : 4\omega$$

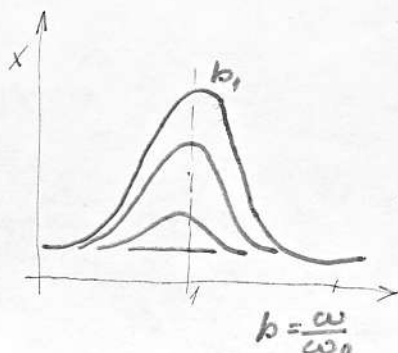
$$-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2b^2 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \quad (\text{pre } x_0 \text{ MAX})$$

Ak vyr. km. dosiahnu takého maxima; hovoríme že nastala rezonancia.

$$x_{0 \text{ MAX}} = \frac{b}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} = \frac{b}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2b^2)^2 + 4b^2\omega_0^2 - 8b^4}} = \frac{b}{\sqrt{4b^2\omega_0^2 - 4b^4}}$$

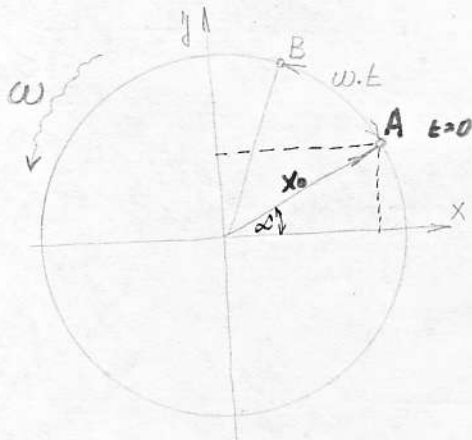
$$x_{0 \text{ MAX}} = \frac{b}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \sim \text{rezonančná amplitúda}$$

Grafická závislosť amplitúdy od kr. frekv. f_2 pre rôzne b .



Graf. zrať. harm. pohybu rotujúcim vektorom 51

Každý km. pohyb v priamke prábicha prábé tak ako pohyb projekcie bodu na priemet kružnice s polomerom rovn. sa amplitúde harm. pohybu.



φ - fáz. konst. v $t=0$

$$x = x_0 \cos \varphi$$

$$y = x_0 \sin \varphi$$

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = x_0 \cos \varphi \cdot \cos \omega t - x_0 \sin \varphi \cdot \sin \omega t$$

$$x = X \cos \omega t - Y \sin \omega t$$

$$\left. \begin{aligned} X &= x_0 \cos \varphi \\ Y &= x_0 \sin \varphi \end{aligned} \right\} x_0 = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$x_0 \sim$ amplitúda

X, Y súr. harm. bodu v čase $t=0$

ozn. $x \dots \vec{i}$
 $y \dots \vec{j} \Rightarrow \vec{x}_0 = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j}$

Jednotkový vektor v kladnom zmysle osi x označ. $\vec{i}$
" " " " y označ. $\vec{j}$

$$x_0 = X + Yj$$

Akí vyp. x -ovú súr. (-1) dost. opačný smer; preto násobenie možno považ. za rotač. o 180° . Táto operácia rovná alq. násobením súr. n. $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$; čo zn. že naš. súradn. s $\sqrt{-1}$ možno považ. za rotačiu o $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Preto môžeme j v kl. smere y položiť: $j = \sqrt{-1} = i$

Potom symbo. vyjad. vektora x_0 nazývame kompl. číslom. V teor. kompl. čísel vektor $\vec{v}_0$ je obrazom kompl. čísla.

Ak $x_0 = A$: $\vec{A} = X + Yj = x_0 \cos \varphi + j \cdot x_0 \sin \varphi$

$$\vec{x}_0 = x_0 (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Podl. Eulerovho vz.:

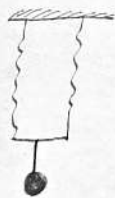
$$\vec{x}_0 = x_0 e^{j\varphi} \quad \text{pre čas } t=0$$

Obecne: $x_0 = \vec{x}_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$

vyjad. harm. pohybu pom. kompl. čísel.

Skladanie km. pohybuv

- a.) 2. rovnosmerných km. - ktoré padajú do priamky.
(s rovn. ω a t ; amplit. a fázy konšt. sú rovné)

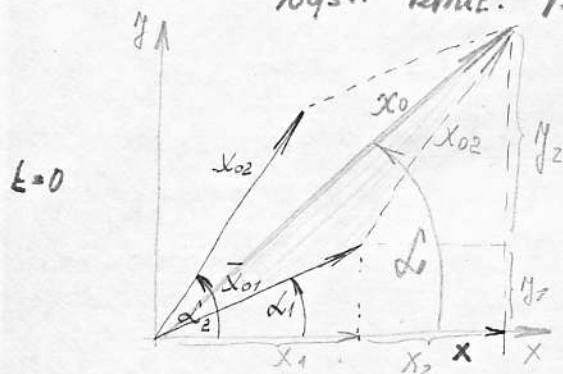


$$x_1 = x_{01} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = x_{02} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = x_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \dots = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

výst. kmít. poh. je tiež km. pohybom.



$$x = x_0 \cdot \cos \omega t$$

$$\tan \varphi = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_{01} \sin \varphi_1 + x_{02} \sin \varphi_2}{x_{01} \cos \varphi_1 + x_{02} \cos \varphi_2}$$

Kos. veta: $x_0^2 = x_{01}^2 + x_{02}^2 - 2x_{01} \cdot x_{02} \cdot \cos \{180^\circ - (\varphi_2 - \varphi_1)\}$

$$x_0^2 = x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01} \cdot x_{02} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01} \cdot x_{02} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Výst. amplitúda závisí od rozdielu fáz $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

1.) $(\varphi_2 - \varphi_1) = 2k\pi \quad k=0,1,2,\dots : x_0^2 = (x_{01} + x_{02})^2 \Rightarrow x_0 = x_{01} + x_{02}$

2.) $(\varphi_2 - \varphi_1) = (2k+1)\pi : x_0^2 = (x_{02} - x_{01})^2 \Rightarrow x_0 = |x_{02} - x_{01}|$

20.V. 1969

- b. príklad. 2 rovnosm. kmít. pohybuv s rovnakými amplit.
a fázovou konšt. - ale s rôznymi ω .



$$x_1 = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

$$x = x_1 + x_2 = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) + x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) =$$

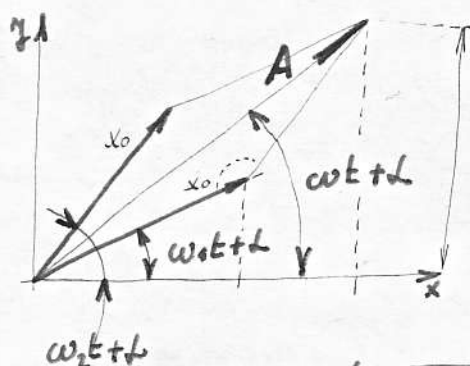
$$= x_0 \{ \cos(\omega_2 t + \varphi) + \cos(\omega_1 t + \varphi) \}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$= 2x_0 \cos \frac{(\omega_2 t + \varphi) + (\omega_1 t + \varphi)}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_2 t + \varphi) - (\omega_1 t + \varphi)}{2}$$

$$= 2x_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

u b. na A: frekvenciou xmeni.



z kos. vety:

$$A^2 = x_0^2 + x_0^2 - 2x_0 \cdot x_0 \cdot \cos\{180 - (\omega_2 t - \omega_1 t)\}$$

$$A^2 = 2x_0^2 - 2x_0^2 \cos\{180 - (\omega_2 t - \omega_1 t)\}$$

$$A^2 = 2x_0^2 + 2x_0^2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t = 2x_0^2 \{1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t\}$$

$$\cos \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cos t}}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{t}{2} = 1 + \cos t$$

$$A^2 = 2x_0^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot t$$

$$A = 2x_0 \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot t$$

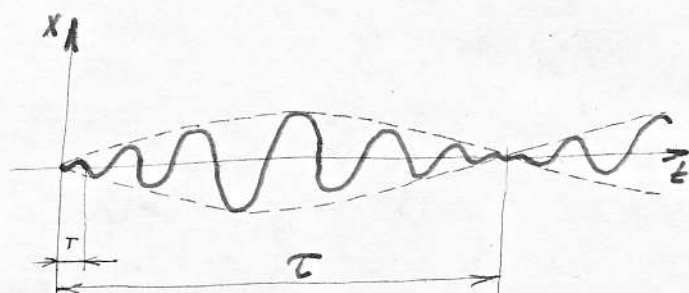
Výsledok: $x = x_1 + x_2 = A \cdot \cos(\omega t + t)$

Amplitúda závisí od rozdielu $\omega_2 - \omega_1$;

$\omega_2 > \omega_1$ - výraz kladný
 $\omega_1 > \omega_2$ - " záporný } $\Rightarrow$ literatúra: $A = |2x_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t|$

Ampl. sa časom periodicky mení s $\omega' = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$;

Grafická závislosť výchylky x na čase:



výsl. lum. pohyb sa vyznač. rázami

T - perióda rázov má cyklič. nosť π [180°]

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

$$T = \frac{\pi}{\omega'} = \frac{\pi}{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = n_2 - n_1$$

frekvencia rázov sa rovná rozdielu frekvencií skladaných kmitov.

Ked' $m_1 = m_2 \rightarrow m = 0 \Rightarrow$ rázy vymiznú.
 Tento poznatok sa využ. na určenie frekvencie nerovnomerného kmilu.

c, Skladanie 2 km. pohyb. navzájom kolmých o rovnak. frekv.

med. okamžité vých. :

$$x = x_0 \cos \omega t$$

$$y = y_0 \cos(\omega t + L)$$

x_0, y_0 - amplitúdy,
 ω - hruš. frekv.
 L - fázuý radiel
 oboch km. pohybuv

Rovnica drahy výsl. km. pohybuv:

$$\frac{x}{x_0} = \cos \omega t$$

$$\frac{y}{y_0} = \cos(\omega t + L) = \cos \omega t \cdot \cos L - \sin \omega t \cdot \sin L \quad \left. \begin{array}{l} \sin L = \sqrt{1 - \cos^2 L} \end{array} \right\}$$

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0} \cdot \cos L - \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}} \cdot \sin L$$

$$\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \cdot \cos L = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}} \cdot \sin L \quad /^2$$

$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} \cdot \cos^2 L - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos L = \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \cdot \sin^2 L = \sin^2 L - \frac{x^2}{x_0^2} \cdot \sin^2 L$$

(pouz. $\sin^2 L + \cos^2 L = 1$)

$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos L = \sin^2 L \quad - \text{rovnicu elipsy.}$$

Špeciálne prípady:

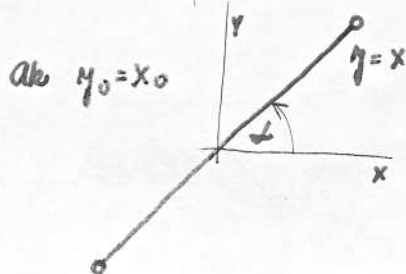
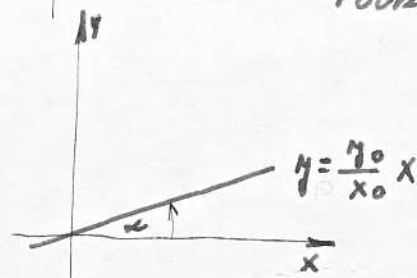
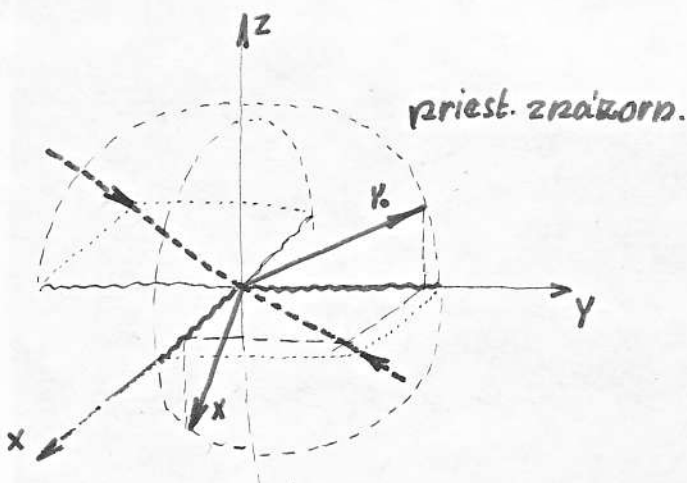
1, $L = 0$:

$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} = 0 \quad / \cdot x_0^2 y_0^2$$

$$y^2 x_0^2 + x^2 y_0^2 - 2xy \cdot x_0 y_0 = 0$$

$$(y x_0 - x y_0)^2 = 0 \quad | \quad y x_0 - x y_0 = 0 \Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$$

rov. priamky:

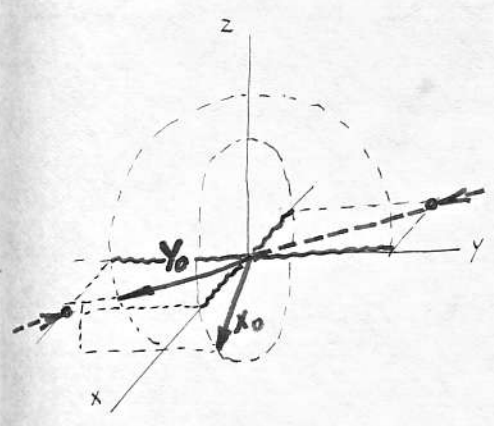


2.) $\Delta = \pi$

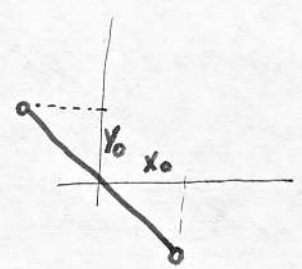
$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{2xy}{x_0 y_0} = 0 \Rightarrow (y x_0 + x y_0)^2 = 0$$

$$y x_0 + x y_0 = 0 \Rightarrow y = -\frac{y_0}{x_0} \cdot x$$

rov. priamky

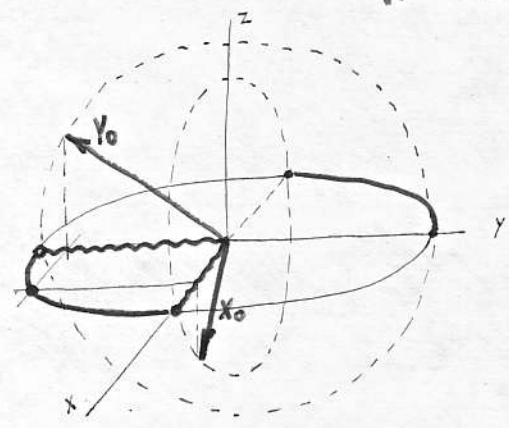


ak $y_0 = x_0 \Rightarrow y = -x$



3.) $\Delta = \frac{\pi}{2}$

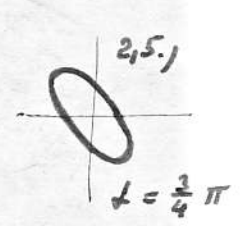
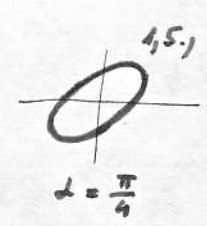
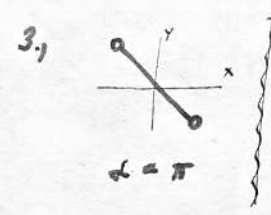
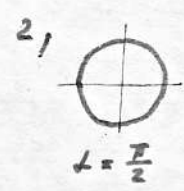
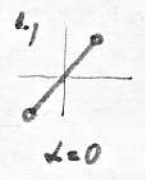
$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} = 1 \sim \text{rovnica elips.}$$



Ked' $y_0 = x_0 = r \rightarrow y^2 + x^2 = r^2$ rovnica kružnice

Pri prechode ru 1 do inej fázy grafom je elipsa.

Skl. 2 maz. $\perp$ km. pohyb. s rov. fr. a rovn. amplit. dostavame taketo krivky závislosti od faz. rozd.:



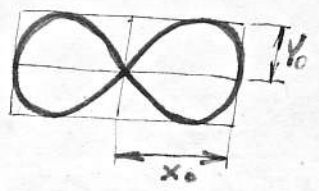
d.) Sklad. 2 maz. $\perp$ km. pohyb. o rôznej frekv.

$$x = x_0 \cos(\omega_1 t + \Delta_1)$$

$$y = y_0 \cos(\omega_2 t + \Delta_2)$$

Skl. takychto km. pohyb. vznikaju zlozitejšie kr.: Lissajousovi krivky (obrázky)

$$\nu_2 : \nu_1 = 2 : 1$$

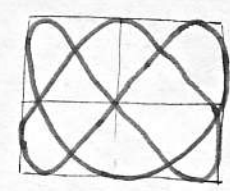


$$\omega = 2\pi \nu \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

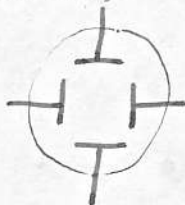
$$\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$$



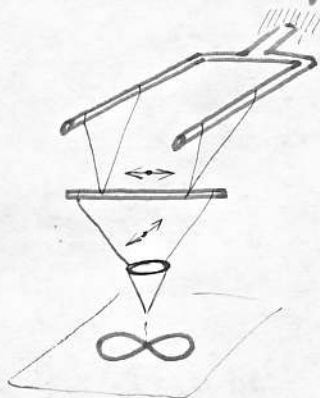
Tvar kriviek nãvisi od fãzového rozdielu tiež. Uvedeni obr. keď obe km. majú nulovú fázu v tom istom okamihu.

Lissajousovi kr. môžu demonštrovať pomocou:

osciloskopu: horizont. dosky - km. stol. gener.
vertik. dosky - stried. magnet.



Blackburnova kyvadla:



Vznik a šíření vln v pružném prostředí.

Když km. bod, kmitající km. pohyb je vázaný určit. silami s dalšími km. body; km. pohyb přechází na další body. Km. pohyb se šíří prostr. vln.

Prostředí se nach. v vln.

Tvoření vln: ...

Při šíř. km. pohyb kmitající částice nepoh. se šíř. vlnami, ale kmitají okolo rovnovážn. polohy.

Podle toho rozd. vlnění:

- 1.) částice km. $\perp$ na směr šíř. sa vlny : příčné
- 2.) " " v přímce podél směru šíř. sa vln. šíř. : podélné (vlnění spirály)

Vlnová délka: λ - dráha za T .

A, B, C, D - uzly

1, 2, 3 - kmity

Rychlost šíř. sa vlny: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$

Vlnopôčet (P) nová fyz. veličina: $P = \frac{1}{\lambda}$ $[P]_{SI} = m^{-1}$
 predstavuje počet vln pripadajúcich na jednotk. dĺžku v smere šíř. sa vlny.

Zdroj vlnenia

Geom. miesto bodov v ľubov. čas. okamihu: členo vlny.
 " " urč. prostredia; ktoré kmit. rovnako fázou sa označ. ako vlnoplocha.

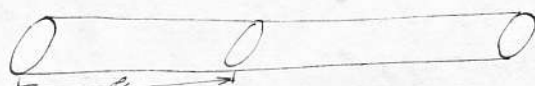
Podľa tvaru člena vlny: rovinné (čelo vlny je rovina)
 guľové (" " guľ. pl.)

Smery v ktorej sa šíř. vln. - lúče.



Či vlny šíř. sa prostredím sú pozdl. alebo priečne, rozhodujú prostredia. (kv. plyny - len pozdl. v perm. teles. obe.

Rýchlosť šíř. pozdl. vln v pevnom prostredí:



prierez S
 hustota ρ
 mod. pružn. v ťahu: E

Ked' na 1 konci tyče v interv. Δt pôsobí sila F; potom rozdt. tyče bude sa šíriť vlnový impulz ťahom (ťahom).

Pri rýchł. šíř. vln. v ; členo vlny urazí dráhu: $\ell = v \cdot \Delta t$

Pôs. silou vzniká deformácia ťahom (ťahom): $\Delta \ell$

Rýchlosť deformácie: $w = \frac{\Delta \ell}{\Delta t}$

Impulz sily: zmena hybnosti.

$$F \cdot \Delta t = m \cdot w$$

$$F \cdot \Delta t = \rho \cdot S \cdot \ell \cdot \frac{\Delta \ell}{\Delta t}$$

m - hmotnosť dĺžky ℓ
 $m = \rho \cdot S \cdot \ell$
 $\cdot \frac{\ell}{\ell}$

podl. Hook. zák.

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell}$$



$$\frac{F}{S} = \frac{\rho \cdot \ell \cdot \Delta \ell}{\Delta t^2} = \rho \cdot \frac{\ell^2}{\Delta t^2} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

$$E = \rho \cdot \left(\frac{\ell}{\Delta t} \right)^2 = \rho \cdot v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E - mod. pružn. v ťahu

Analogicky pre priečne vlny:



$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G - modul pružn. v smyku
 ρ - hmot. ~ hustota

21. V. 1969.

Rychlost šíř. vln v kvap. a plynoch.

V kv. a pl. sa vlnenie šíri len po dl.

$n_{kv.}: v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ / K - modul objemovej pružnosti $K = \frac{1}{\beta}$ / β - stlačitelnosť
 $\beta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$

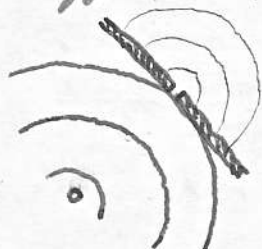
$n_{plynoch}: v = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$ / $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ / p - tlak plynu
 ρ - hustota pl. / $\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_0}$ / M - hm. 1 g/mol.
 $\rho = \frac{pM}{RT}$

$\text{Z stav. rovn.}: pV_0 = RT \rightarrow V_0 = \frac{RT}{p}$ / $\rho = \frac{pM}{RT}$

$v_{pl.} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho \cdot \frac{pM}{RT}}} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{RT}{M}}$ ~ závislosť rychlosti šíř. po dl. vln. v plynoch od teploty.

Ked' pozn. čelo vlny v čase t ; vieme urobiť konst. v čase $(t + \Delta t)$

Huygensov-princíp: (vypl. v r. 1690) - na zákl. experim. [Machov dokázal. i teoret.]



Každý bod pred. do kloucho sa dost. čelo vlny; treba považovať d. na nový zdroj vlnenia. (elementárn.)

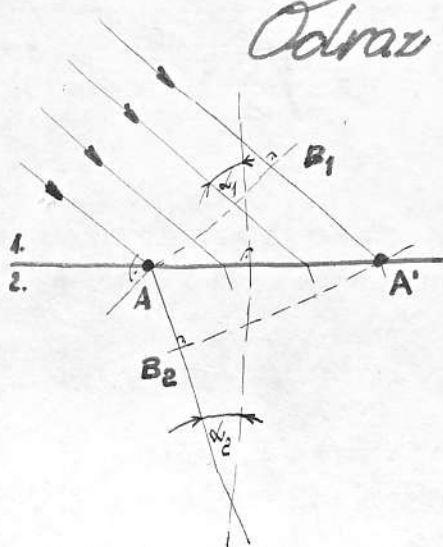


$r = v \Delta t$

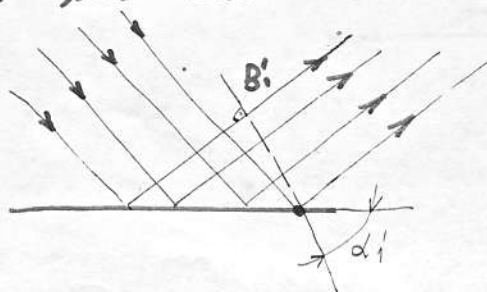
Obálka vln. element. vlnoplocha = nové čelo vlny.

Vlny na prekážk. sa aj odražia.

Odraz a lom vlnenia



α_1 ... uhol dopadu
 α_2 ... uhol lomu



$$\Delta AB_1A' \text{ a } \Delta AB_2A' :$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{AB_1A':AA'}{AB_2A':AA'} = \frac{B_1A'}{AB_2} \left. \begin{array}{l} \text{dráhy za} \\ \text{rovn. čas} \\ \text{v 1. a 2. prost.} \end{array} \right\}$$

Zákon lomu (Snellov zákon)

Pomer sinu uhla dopadu
vel. pomeru rychlosti:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_1 \cdot t}{n_2 \cdot t} = \frac{n_1}{n_2} = n \text{ (index lomu)}$$

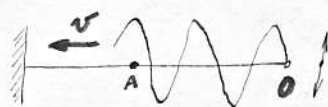
ke sinu uhla lomu je rovn.

Z rovnosti $\Delta AB_1A'$ $\Delta AB_2A'$ $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ - zákon odrazu.
Uhol odrazu sa rovná uhlu dopadu.

Lúče dopadajúce; odrazené a lomené spadajú do 1 roviny.

Vlnenie je popisateľné - keď v každom t možno určiť výchylku x
($x = x(t)$).

Vlnová rovnica



$$x = x_0 \cos \omega t \text{ pre bod } O$$

x_0 - amplit.
 ω - frekvencia
 t - čas

O - zdroj vlnenia

$$OA = r$$

čas (kým vlna dojde do A): $T = \frac{r}{v}$

Bod A začne kmitať o T neskôr.

Rovnica vlnenia:

umožn. určiť výchylku bodu N nš. času.

$$x = x_0 \cos \omega t' \text{ pre bod } A$$

$$t' = t - T$$

$$x = x_0 \cos \omega (t - T)$$

$$x = x_0 \cos \omega (t - \frac{r}{v})$$

$$x = x_0 \cos (\omega t - \frac{\omega r}{v})$$

$$x = x_0 \cos (\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r)$$

$$x = x_0 \cos 2\pi (mt - \frac{r}{\lambda})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad | : n$$

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{v \cdot T} \quad | v = \frac{\lambda}{T}$$

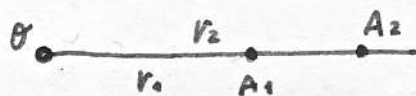
$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi \nu$$

Sporovnaním rovníc:

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 \cos (\omega t + \phi) \\ x = x_0 \cos (\omega t - \frac{\omega r}{v}) \end{array} \right\}$$

$$\phi = - \frac{\omega}{v} \cdot r = - \frac{2\pi r}{\lambda}$$



pre 2 km. body $A_1; A_2$:

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) \sim \text{rozdiel fáz.}$$

$$1, \text{ keď } r_1 - r_2 = \lambda$$



$\Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = 2\pi \sim$ km. b. kmit. s rovnakou fáz.
majú rovnaké výchylky do smeru i veľkosti.

$$2, \quad r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = \pi$$



rovnaké vých.,
opačný smer.

Sir. vlnenia v prostredí môžu sa prekrývať: Výsledné vlnenia
potom je zložením jednotl. vlnení. Skladanie $\sim$ interferencia.

Interferencia vlnenia.

výst. výchylka: súčet okamžitých výchyliek.

výst. amplitúda je závislá od rozdielu fáz.

Keď zdroje kmit. majú rovnakú frekvenciu, rovnaký smer kmit. a rovnakú fázu. Alebo konštantný rozdiel fáz. — koherentný zdroj.



$$S_1 A = r_1$$

$$S_2 A = r_2$$

$S_1 - S_2$ koherentné zdroje.

$$x_1 = x_0 \cos \omega t$$

$$x_2 = x_0 \cos \omega t$$

Závislosť vých. na čase pre obidva zdroje.

$$x_1 = x_0 \cos 2\pi \left(nt - \frac{r_1}{\lambda} \right)$$

$$\phi_1 = -2\pi \frac{r_1}{\lambda}$$

$$x_2 = x_0 \cos 2\pi \left(nt - \frac{r_2}{\lambda} \right)$$

$$\phi_2 = -2\pi \frac{r_2}{\lambda}$$

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}$$

— rozdiel fáz.

Ak $\Delta \phi = 2k\pi$

max. vých.

$$x_0 = x_{01} + x_{02}$$

Ak $\phi_2 - \phi_1 = (2k+1)\pi$

min. ampl.

$$x_0 = |x_{02} - x_{01}|$$

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \pm 2k\pi \dots \dots \dots \text{v A max. výchylka } [r_1 - r_2 = k \cdot \lambda]$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \pm (2k+1)\pi \rightarrow r_1 - r_2 = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

ampl. výst. km. pohybu v A je minimálna.

Ak rozdiel fáz nie je rovné uved. extrémnym prípadom: ampl. sa zosilňujú alebo zoslabujú.

27. V. 1969.

Šp. prípad vlnenia vznikn. interferenciou 2 vln. s rovn. amplit. a frekv. — stojaté vlnenie.

$$\xrightarrow{x_1} x_1 = x_0 \cos 2\pi \left(nt - \frac{y}{\lambda} \right)$$

$$\xleftarrow{x_2} x_2 = x_0 \cos 2\pi \left(nt + \frac{y}{\lambda} \right)$$

y — vzd. km. bodu od počiatku.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$x = x_1 + x_2 = x_0 \cos 2\pi \left(nt - \frac{y}{\lambda} \right) + x_0 \cos 2\pi \left(nt + \frac{y}{\lambda} \right) =$$

$$= x_0 \cdot \cos 2\pi nt \cdot \cos 2\pi \frac{y}{\lambda} + x_0 \sin 2\pi nt \cdot \sin 2\pi \frac{y}{\lambda} + x_0 \cos 2\pi nt \cdot \cos 2\pi \frac{y}{\lambda} - x_0 \sin 2\pi nt \cdot \sin 2\pi \frac{y}{\lambda} =$$

$$= 2x_0 \cos 2\pi \cdot \frac{y}{\lambda} \cdot \cos 2\pi nt$$

$$x = A \cdot \cos \omega t$$

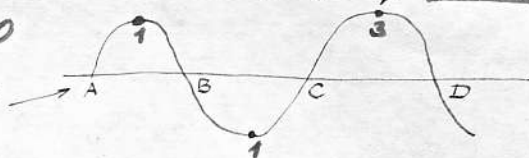
$$\begin{aligned} 2\pi n &= \omega \\ 2x_0 \cdot \cos 2\pi \frac{y}{\lambda} &= A \end{aligned}$$

A — amplit. km. bodov.

A. nezávisí na čase; ale od súradnice y — od vzd. bodu od počiatku. x_0 výst. častice kmitajú rovn. frekv.

bez fázového rozdielu; ohnemie ďalej nepostupuje - stojaté vlnenie

- 1.) Zo vzťahu $A = |2x_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} y|$: ak $\cos \frac{2\pi}{\lambda} y = 1 \rightarrow A = 2x_0$
 Takéto body s max. amplitúdou sa nazývajú kmitne
- 2.) Ak $\cos \frac{2\pi}{\lambda} y = 0 \rightarrow A = 0$
 Body s $A = 0$ sa naz. uzly



Určenie súradníc kmitní a uzlov:

Podm. kmitne: $\cos \frac{2\pi}{\lambda} y = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} y = \pm k\pi \quad k = 0; 1; 2; 3 \dots$
 súradnice kmitní: $y = \pm k \cdot \frac{\lambda}{2}$

Určenie 2 najbližších km:

$$\left. \begin{aligned} y_k &= \pm k \frac{\lambda}{2} \\ y_{(k+1)} &= \pm (k+1) \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \right\} y_{(k+1)} - y_k = \frac{\lambda}{2} \quad \text{vzd. medzi 2 kmitnami}$$

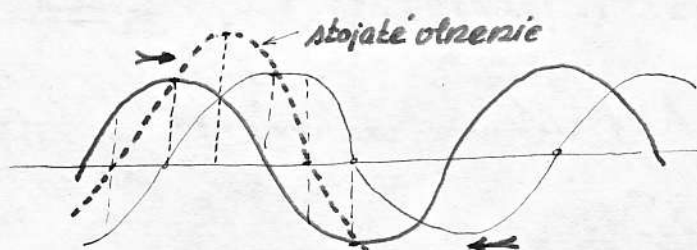
Uzly: $A = 0$; $\cos \frac{2\pi}{\lambda} y = 0 \quad \frac{2\pi}{\lambda} y = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad k = 0; 1; 2; 3 \dots$

Vzd. uzlu od najbližšej kmitne: $y = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4}$

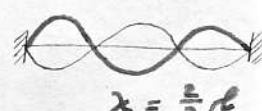
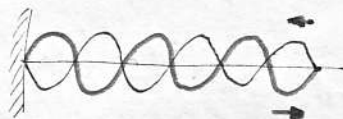
$$y_{(k+1)} - y_k = (2k+1) \frac{\lambda}{4} - k \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

Vzd. medzi sus. uzlami:

$$\left. \begin{aligned} y_k &= \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4} \\ y_{k+1} &= \pm [(2k+1)+1] \frac{\lambda}{4} \end{aligned} \right\} y_{(k+1)} - y_{(k)} = \frac{\lambda}{2}$$



St. vlnenie vzniká pri int. postupujúceho vlnenia s opačným.



hm. bod $\omega; x_0$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 = 2 \pi^2 m \omega^2 x_0^2 \sim \text{celk. energ. kmit. hm. b.}$$

Celková energia vlnenia.

Hustota energie a intenzita vlnenia.

$\rho \sim H.e$: - energia pripadajuca na objemovu jednotku.

$$e = \frac{E}{V} = \frac{\frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2}{V} = \frac{1}{2} \rho \cdot x_0^2 \omega^2 \quad | \rho - \text{hustota prostredia}$$

$$e = 2\pi^2 m^2 x_0^2 \cdot \rho \sim \text{hustota energ. limit. bodu.}$$

Ak vs. body prost. konaju rovnaky km. pohyb, potom pre celk. energ. prost. j ktoré kona km. pohyb:

$$E = 2\pi^2 m^2 m x_0^2 \quad ; \quad \text{hde } m \text{ je hmotnosť celého prostredia.}$$

$$e = 2\pi^2 m^2 \rho \cdot x_0^2 \sim \text{hust. en. prostredia.}$$

celková en. prostredia, v ktorom sa širi vlnenie:

vlnenie : $x = x_0 \cos \omega (t - \frac{r}{v})$

Ak. V - objem
 m - hmotnosť
 v - rýchlosť šírenia vlny } v prost. $\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{r}{v})$

$$E_c = E_k + E_p$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega \sin \omega (t - \frac{r}{v})$$

$$E_p = ?$$

$$N = \sqrt{\frac{E}{S}} \quad \text{diagram of a cylinder with length } l_0 \text{ and cross-section } S$$

hustota zdĺh

Sila vyvola abs. deformáciu Δl .
 Tým sa vykoná práca:

$$f = ES \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$A = f \cdot \Delta l$$

$$f = k \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = 0 ; f = 0$$

$$\Delta l_{\max} ; f = \frac{ES \cdot \Delta l}{l_0}$$

$$A = \frac{1}{2} ES \cdot \frac{\Delta l^2}{l_0}$$

$$f = \frac{1}{2} E \cdot S \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

na spodr. na zvýšenie pot. energie pružnej deformovanej tyče:

$$E_p = \frac{1}{2} ES \frac{\Delta l^2}{l_0} \cdot \frac{l_0}{l_0} = \frac{1}{2} E \cdot S \cdot l_0 \cdot \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{dx}{dr}$$

dx - posuv častice vzdalených od seba o vzd. dr



$$x = x_0 \cos \omega (t - \frac{r}{v})$$

$$\frac{dx}{dr} = -x_0 \sin \omega (t - \frac{r}{v}) \cdot \frac{\omega}{v}$$

$$\left(\frac{dx}{dr} \right)^2 = \frac{x_0^2 \omega^2}{v^2} \cdot \sin^2 \omega (t - \frac{r}{v})$$

$$E_p = \frac{1}{2} E \cdot V \left(\frac{dx}{dr} \right)^2 = \frac{1}{2} E V \frac{x_0^2 \omega^2}{v^2} \sin^2 \omega (t - \frac{r}{v})$$

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2} \left(m + \frac{EV}{v^2} \right) \cdot x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{r}{v})$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\rho \cdot V + \frac{EV}{v^2} \right) x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega (t - \frac{r}{v})$$

$E_c = \Delta \cdot V \cdot x_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{r}{v})$ - celk. en. prostredia
v ktorom post. vlnenie.

Porovn. E_k a E_p vidíme že sa menia rovnakou fázou. Súčasne dosahujú maxima aj minima. Tým en. vlny sa odlišuje od en. kmit. hm. bodu; kmit prostredia.

Hm. hm. bod : $E_p \max \rightarrow E_k \min$ a naopak;

Pri vlnení : $E_p \max \rightarrow E_k \max$ a naopak.

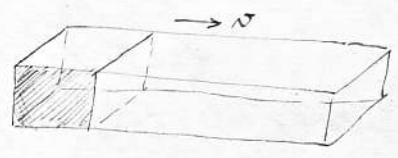
Hustota energie: $\rho = \frac{E}{V} = \Delta \cdot x_0^2 \cdot \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{r}{v})$

hust. en. sa mení, stredná hodnota :
 $\sin^2 \omega(t - \frac{r}{v}) \dots \dots \dots \frac{1}{2} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \text{ min} \\ 1 \text{ max} \end{array} \right.$

stredná hodnota :
 $\rho_s = \frac{1}{2} \Delta x_0^2 \omega^2$

Intenzita vlnenia:

Energia prech. jednotkovou ploškou za jedn. času.
[posl. $\perp$ na smer vlnenia]



$\omega = 2\pi n$

$I = e \cdot N = \frac{1}{2} \Delta \cdot x_0^2 \omega^2 \cdot N = 2\pi^2 n^2 \Delta x_0^2 N$

Pr. 2 vlny sa šir. v tom istom prost. $n_1 = 500 \text{ m s}^{-1}$ $n_2 = 2000 \text{ m s}^{-1}$.
 Ampl. sú rovnaké; aj intenzity vlnenia:
 $x_{01} = x_{02}$
 $i_1 = i_2$ | Vyps. frekv. 2. vlny n_2 ; ak $n_1 = 920 \text{ s}^{-1}$

$i = 2\pi^2 n^2 \Delta \cdot x_0^2 \cdot N$ $i_1 = 2\pi^2 n_1^2 \Delta \cdot x_{01}^2 \cdot N_1$
 $i_2 = 2\pi^2 n_2^2 \Delta \cdot x_{02}^2 \cdot N_2$ $i_2 = 2\pi^2 n_2^2 \Delta \cdot x_{01}^2 \cdot N_2$

$i_1 = i_2 \rightarrow 2\pi^2 n_1^2 \Delta \cdot x_{01}^2 \cdot N_1 = 2\pi^2 n_2^2 \Delta x_{01}^2 \cdot N_2$

$n_1^2 N_1 = n_2^2 N_2$

$n_2 = n_1 \sqrt{N_1 / N_2}$

$n_2 = 920 \cdot \sqrt{\frac{500}{2000}} = 920 \cdot \frac{1}{2} = 460 \text{ s}^{-1}$

Akustika

Vznik zvuku a jeho šírenie:

Zvuk: každé vlnenie hm. prostredia, o ktorom sa môžeme preveriť sluchom. Zdroj zvuku (vlnenie; chvenie). H. rostr. - v ktorom sa zvuk šíri - vodič vlnenia (obvyčajne vzduch.)

Spriestredková sa spojenie medzi zdrojom a detektorom.

Vlo. pohyb zbudzuje v uchu zvuk. dojem keď frekvencia:

$$\text{f.z.} \quad 20 \text{ s}^{-1} \sim 20\,000 \text{ Hz} \quad \text{h.z.}$$

Kmitý v tomto intervale: zvukové (akustické)

2 f. z. hladiska ultrazv. a infrazvuk sa delia od "zvukových".

Rýchl. šíř. zv. vo vzduchu: (r. šíř. sa vln. v plynoch)

$$N = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

$$\rho = \frac{M}{V_0}$$

$$pV_0 = RT \rightarrow \rho = \frac{M/p}{RT}$$

$$N = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

závislosť N od

T - tepl. plynu.
 M - hmotn. 1 g plynu.

Vzduch. 0°C ... $N = 331 \text{ m s}^{-1}$

kyslík 0°C ... $N = 315 \text{ m s}^{-1}$

vodík 0°C ... $N = 1263 \text{ m s}^{-1}$

Pr: aká je rýchl. zv. vo vzd. pri $t = 10^\circ\text{C}$ keď pri $t = 20^\circ\text{C}$ táto rýchlosť je 340 m s^{-1} .

$$N = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

$$N_1 = \sqrt{\frac{\gamma R T_1}{M}}$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{\gamma R T_2}{M}}$$

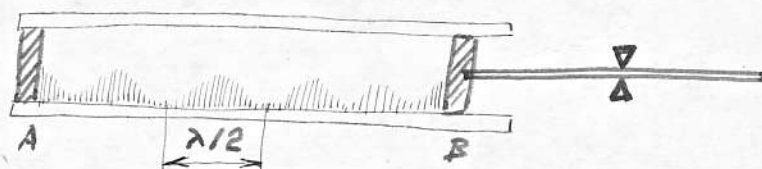
$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \rightarrow N_1 = N_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$N_1 = 340 \cdot \sqrt{\frac{293}{293}} = 334 \text{ m s}^{-1}$$

Určenie rýchl. šírenia sa zvuku
v plyne pomocou Kundtovej trubice:

1.)

Jeden koniec je tesne uzav. náhon a do 2. konca je nasunutá a v strede upravená kovová (sklenená tyč.)



V L. vzniknú stoj. vlny; v strede uzol; na koncoch sú kmity. Kmitá aj korkový kolík B - od kt. sa rozkmitá vzduch v trubici; pritom vlna postup. bude ipterf. odrazenou vlnou od A. - Vzniká stoj. vlnenie v trubici.

Korkové piliny sa usporiadajú: v miestach uzlov sú nehybné. v miest. kmitov sú rozchádzané.

Rýchl. šíř. sa zv. v trub. (vplyne): $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot n$.

- " - v kyči

i v^* λ^* : $v^* = \lambda^* \cdot n$

$$\frac{v^*}{v} = \frac{\lambda^*}{\lambda} \rightarrow v^* = v \cdot \frac{\lambda^*}{\lambda}$$

$$v = v^* \cdot \frac{\lambda}{\lambda^*}$$

Ak je známa v ; urč. v^* ; alebo naopak.

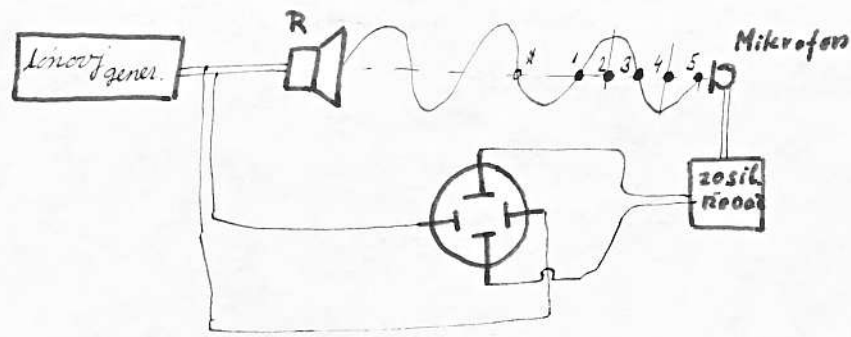
$$\lambda^* = 2l \rightarrow v^* = v \cdot \frac{2l}{\lambda}$$

Kundt. trubica sa využíva aj na urč. modulu pružnosti v kovu:

$$v^* = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad E = S \cdot v^{*2} \quad / \rho - \text{hustota materiálu, kg/m}^3 \quad \lambda = \frac{m}{v}$$

2. Metóda pomocou osciloskopu.

Ukladanie 2 navz. kolmých kmil. pohybov v rovn. frekv. a rovn. amplitúde.



- 1.) $\alpha = 0$
- 2.) $\alpha = \frac{\pi}{2}$
- 3.) $\alpha = \pi$
- 4.) $\alpha = \frac{3}{2}\pi$
- 5.) $\alpha = 2\pi$

Treba posúvať mikr. a pozorovať na osc.

Polohy v ktorých dost. priamky: poloha 1, 5 - udávajú λ .

Očítame frekv. T.g. $\left. \begin{array}{l} \text{Polohy v ktorých dost. priamky:} \\ \text{poloha 1, 5 - udávajú } \lambda. \end{array} \right\} v = \lambda \cdot n$

Vplyv vetra na rýchl. šíř. sa zvukových:



Pozorov. zachytý' zvukový signál za čas t

$$N = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = N \cdot t$$

ω - rýchlosť vetra

Vehl. k bodu S zvuk sa šíri vo v's. smeroch rovn. rýchlostou (guľ. vlnoplochami)

$$\overline{ZP} = N \cdot t$$

$$\overline{ZS} = \omega t$$

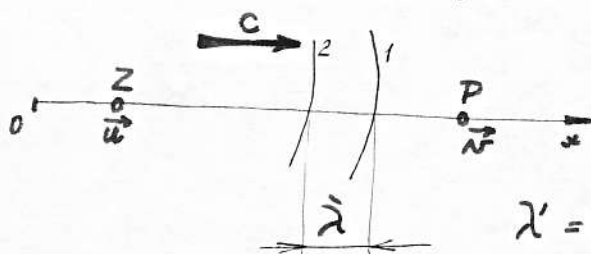
$$\overline{SP} = N' \cdot t$$

$$\lambda = N \cdot t = \omega t \cdot \cos \alpha + N' t \cdot \cos \beta$$

$$N = \omega \cdot \cos \alpha + N' \cos \beta$$

Doplerov princíp (1842) -

aj zdroj zvuku aj pozorovateľ sa pohybujú. Pozorovaná frekvencia $\neq$ zdrojom vys. frekv.



Ked' z vyšle 2 kr. sygn. v čas. intervale T ; potom vlnoplocha 1. sygn. prejde os x; takajz.

$$\lambda' = c \cdot T - uT = (c - u)T$$

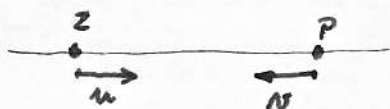
Ked' 1 dobehne pozorovateľa v čase t ; potom 2 vlna, s rýchľ. $(c - u)$ dobehne v čase $(t + T')$ pričom $T' = \frac{\lambda'}{c - u}$

$$\text{ale } \lambda' = (c - u)T \Rightarrow T' = \frac{c - u}{c - N} \cdot T$$

$$\text{Pre s. a fr. } \underline{n} = \frac{1}{T}$$

$$\text{vzimana' frekv. : } n' = \frac{1}{T'} = \frac{c - N}{c - u} \cdot n$$

roz. a zdroj sa poh. v tom istom smere.



$$n' = \frac{c + N}{c - u} \cdot n$$

D.p. platí aj pre svetelné vlny.

Intenzita a hlasitosť zvuku.

[Weber - Fechnerov zákon]

Ucho rozlišuje 3 charakt. veličiny: výšku, farbu, hlasitosť. Výška závisí o frekvencii, farba od povahy kmitania (povaha plátenia kmitu.), hlasitosť je ch. ako objektívna hl. - prístrojami.

Obj. sila zvuku je hodnotená intenzitou zv.

i - energia, ktorá spolu so šíř. zv. vlnením prejde jednotk. + ploškou za jednotku času.

$$I = E \cdot N = \frac{1}{2} \rho \times 0^2 \omega^2 \cdot N = 2 \pi^2 m^2 \rho \times 0^2 N$$

2. Subjektívna sila zvuku - hlasitosť: Δ

Súvis $i \sim \Delta$ udáva W-F. zákon:

Úmerna účinku hlasitosti na ľudské ucho Δ je priamo úmerná rel. zmene fyz. intenzity zvuku. $d\Delta = k \cdot \frac{di}{i}$

Integráciou: $\Delta_2 - \Delta_1 = k \cdot \ln \frac{i_2}{i_1} = k \cdot 2,3 \cdot \log \frac{i_2}{i_1}$

$$\Delta_2 - \Delta_1 = K \log \frac{i_2}{i_1}$$

Kvantitatívny súvis;

Jednotka hlasitosti 10Ph (fon) je rozdiel hlasitosti 2 zvukov o fr. 1000Hz - z ktorých 1 má 10x väčšiu intenzitu.

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 10 = K \cdot \log \frac{10i_1}{i_1} = K \rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 = 10 \cdot \log \frac{i_2}{i_1}$$

Intenzitu zv. i porovnávame k základ. intenzite:

$i = 10^{-16} \text{ W cm}^{-2}$ - prislúch. hlasitosť: $\Delta_1 = 0$ - prázdna hlasitosť.

$$\Delta_2 \text{ ozm. } \Delta \rightarrow \Delta = 10 \cdot \log \frac{i}{10^{-16}} \sim \text{súvis medzi int. a hlasit.}$$

$$\Delta = 10 \log i + 160 \quad \left| \begin{array}{l} i \dots \text{W cm}^{-2} \\ \Delta \dots \text{Ph} \end{array} \right.$$

Pr: Aká je fyz. int. zv. ktorého hladina hlasitosti $\Delta = 50 \text{ Ph}$.

$$\Delta = 10 \cdot \log \frac{i}{10^{-16}} = 50 \rightarrow \log i = 5 + \log 10^{-16} \\ \log i = 5 - 16 = -11 \\ i = 10^{-11} \text{ W cm}^{-2}$$

Ekmanov zákon.

Vzťah medzi dobou trvania podn. a vžit. intenzitou je logaritmický: $R = a + b \cdot \log t$ / $a, b \sim \text{konšt.}$

Akustická impedancia: $A = R$

Jednotka ak. imp: $1E_k$ (ekman) predst.

Rozdiel ak. imp. 2 takých osôb, z ktorých 1. potrebuje 10x taký čas trvania zvuku o 1000Hz než 2. aby poskytol int. zvuku rovn. Hovorovej reči (33Db)

$$\begin{aligned} A_1 &= a + b \cdot \log 10t \\ A_2 &= a + b \cdot \log t \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_1 &= a + b \cdot \log 10t \\ A_2 &= a + b \cdot \log t \end{aligned}} \right\} A_1 - A_2 = b \cdot \log 10 = b = 1E_k$$

$$A = a + \log t \quad / \quad b = 1E_k$$

Prób ak. imp.: Nulová ak. imp. - imp. osoby, ktorá začne vnímať zvuk o dobe trvania $t = 0,1 \text{ ms} = 10^{-4} \text{ s}$. pri $i = 10 \text{ db}$; $\nu = 1000 \text{ Hz}$.

$$\downarrow 0 = a + \log 10^{-4} \rightarrow a = 4 \Rightarrow A = \log t + 4 \quad \left| \begin{array}{l} A \dots E_k \\ t \dots \text{s} \end{array} \right.$$

$$A = \log t + 1$$

$$|A_{EK}|; \pm \text{ milisek.}$$

Hladina int. zvuku je veličina charakt. fyz. int. zvuku.
 $\neq$ subjekt. int. zvuku.
 Je to logaritm. meritko.

Jedn. hladiny int. zvuku: 1 Bel (1 Bl; 1 B) 1 B = 10 dB (decib)
 Pulový bod stupnice: hl. int. zvuku = 0
 Súvis: hladina int. zv. - hlasitosť.

hl. zv. o urč. frekv. urč. tak že zmeníme i
 napr. 1000 Hz. a zrovnávame so subjektívnou silou vjemu.
 Akonáhle sa javí rovn. hlasitým; potom: 1 dB = 1 Ph.
 int. zvuku n dB sa číselne rovná int. n Ph.

Ultrazvuk a jeho použitie.

Rad 20 kHz.

Výroba ultrazvuku - ultrazvukové generátory.

piezoelektrický jao. (napr. na ploche deform. kryšt.)
 magnetosrúčný jao. (feromagn. tyč sa v m. pol. deform.)

Využitie: výroba emulzií

koloidných roztokov

na hlad. karov v kov. výrobkoch

na spájanie zliatin hliníka

lekárstvo,

chémia.