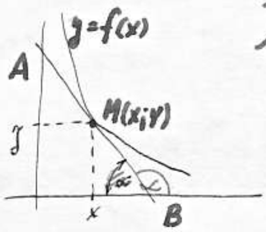
2. X. 1969.

I. Diferenciálne rovnice.
II. Dvojný, trojný integrál.
III. Krivkový integrál.

I. D.r.

1§. Základné pojmy.

Uvaž nasl. úlohu: Treba nájsť krivku, ktorá má vl.: úsek jej túžov. dot. medzi súr. osami je rozdelený dotykovým bodom $M(x;y)$



$AM = MB$

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = y' \\ tg\,\alpha = -\frac{y}{x} \end{array}\right\} y' = -\frac{y}{x} \quad \text{- dif. rovnica}$$

Jej tvar: $y = \frac{c}{x}$ / c - konš.

$y' = -\frac{c}{x^2}$ $\qquad -\frac{c}{x^2} = -\frac{c}{x^2}$

D1. Obyčajn. dif. rovnicou n-tého r. nazývame vzťah:

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

kde F je funkc. def. v nákej oblasti
x - nezáv. premenná
y - funkc. prem. x
y'.. - jej deriv.

Rád d.r. nám udáva rád najvyšš. derivácie funkcie v nej sa vyskytujúcej:

Pr: $y''x^2 - \frac{3}{y} = e^x$: 2r. $\qquad \sqrt{y'} - 3x = 2$: 1r.

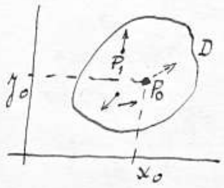
Riešením d.r. nazýva sa každá f.: $y = \varphi(x)$, ktorá tejto rovnici vyhovuje.
Graf. rovnice $y = \varphi(x)$ nazývame integrálnou krivkou.

2§. Základné pojmy o d.r. 1. rádu.

$$F(x; y; y') = 0 \qquad (1)$$

Ak sa dá (1) nap. vo tvare: $y' = f(x;y)$ (2), hovoríme, že (1) je riešiteľná vzhľadom na y'.

Geom. zmysel (2).



Nech v oblasti D je f. $\varphi(x)$ spojitá; a nech je riešením rovn. (2)

$P_0(x_0 y_0) \in D$ $\qquad D \subset E_2$

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x_0; y_0) \\ \text{ale} \quad y' = tg\,\alpha \end{array}\right\} \quad tg\,\alpha = f(x_0; y_0)$$

Zvol. bodu P_0 sme priradili smer.

Opakujeme to pre P_1 ....

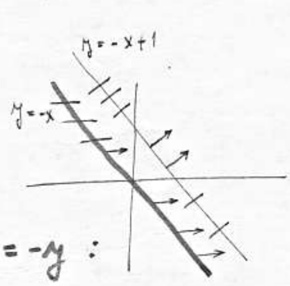
Potom oblasť = smerové pole – každý bod obl. má urč. smer.

Udať d.r. (2) znamená udať súčasne smerové pole.

Riešiť túto r. znam. nájsť kr., ku ktorej dot. v každom bode má smer totožný s bodmi smerového poľa.

Krivka ktorá sp. body s rovn. smerom naz. sa <u>izoklina</u>.

Pr.:



$$\left.\begin{array}{l} y' = x + y \\ f(x;y) = x + y \\ y' = tg\,\alpha \end{array}\right\} \quad tg\,\alpha = x + y$$

hlad. izokl. kde $\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$;

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \qquad y = -x + 1$

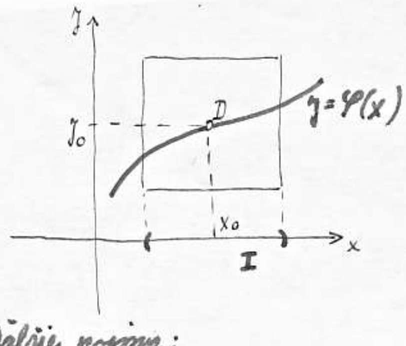
Z uved. príp. je zrejmé že dif. r. môže mať aj viac rieš. Ak predpíšeme aby jej rieš. $y = \varphi(x)$ (3) prech. pevne zvol. bodom $N(x_0; y_0)$ potom dostávame jediné rieš., ktoré predst. jedinú krivku.

Počiatočné podmienky: $(x_0; y_0)$ $\qquad$ [Cauchy-ho úloha]

Vzn. otázka: či ex. vždy rieš. d.r. (koľko), kedy jediné?

$\boxed{\text{Veta}}$ Cauchy-ho: Nech f. $f(x;y)$ je spoj. v okolí bodu D z roviny; a nech v O_D ex. parc. der. f. $f(x;y)$ podľa y; potom existuje v okolí D jediné riešenie: $y = \varphi(x)$, d. rovnice (2), prechádzajúce bodom D, na intervale I, ktorý je priemetom ok. D na os x.

Rieš. má vlastnosť: $y_0 = \varphi(x_0)$



Ďalšie pojmy:

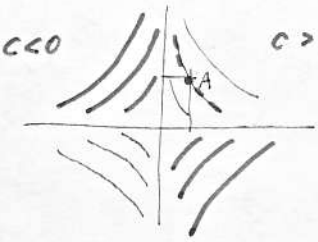
F. $y=\varphi(x)$ $E(x;y;c)=0$ kde c = ľub. konšt. / naz. sa integrálom d.r. (2).

F. $y=\varphi(x;c)$ sa naz. všeobecným rieš. d.r. (2)

Ak za c zvol. potrebné číslo, dostaneme partikulárne rieš.

Geom. znam. či všeob. rieš. nám predst. množ. kriviek a partik. rieš. jedinú krivku.

Pr. $y' = -\frac{y}{x}$ rieš: $y = -\frac{c}{x^2}$



$A(1;2)$

$2 = \frac{c}{1} \Rightarrow c = 2$

$\Downarrow$

part. rieš: $y = \frac{2}{x}$

§3 Rieš. d.r. 1r. s oddeliteľnými premennými.

separácia

① Majme $y' = f(x)$ $f(x)$ spoj. na int. I.

Rieš: $y = \int f(x)\,dx + C$

② Rovnice s oddel. premennými (separácia premenných)

$y' = f(x;y)$ (1) Nech (1) sa dá napísať: $y' = M(x).N(y)$ (2)

Potom hov.: sme separovali (oddelili premenné).

$$\frac{dy}{dx} = M(x).N(y)$$

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x)\,dx \qquad N(y) \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{N(y)} = \int M(x).\,dx + C \qquad (3) \quad \text{– všeobecné rieš.}$$

$$E(x;y;c) = 0 \qquad (4)$$

Overenie rieš.: $y' = -\frac{\frac{\partial E}{\partial x}}{\frac{\partial E}{\partial y}}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial E}{\partial x}}{\frac{\partial E}{\partial y}}$

$$\frac{\partial E}{\partial y}\,dy = -\frac{\partial E}{\partial x}\,dx \quad \Big| \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{1}{N(y)} \quad -\frac{\partial E}{\partial x} = M(x)$$

Pr.: $y' = x^2(y+1)$

$$\frac{dy}{dx} = x^2(y+1)$$

$$\frac{dy}{y+1} = x^2 dx$$

$$\ln(y+1) = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y = e^{\frac{x^3}{3}+c} - 1} \quad \text{- všeob. r.}$$

③ Homogenná rovnica

Je tvaru $\quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$

Nech $\frac{y}{x} = u \quad \rightarrow \quad y = u.x$

$\rightarrow \quad \Big\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot x + u\frac{dx}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot x + u$

$$x\cdot\frac{du}{dx} + u = f(u)$$

$$x\cdot\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \qquad \Big/ \begin{matrix} u \neq f(u) \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

integr., dos. za u.

Pr.: $y' = \frac{y}{x}\{\ln\frac{y}{x} + 1\}$

$$x\cdot\frac{du}{dx} + u = u\cdot(\ln u + 1)$$

$$x\frac{du}{dx} = -u + u\ln u + u$$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \qquad / \text{int.}$$

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln u = c.x$$

$$u = e^{cx} \qquad /\text{dosad. za } u.$$

$$y = x.e^{cx}$$

$\int\frac{du}{u.\ln u} = \quad ; \quad \ln u = w$

$= \ln w$

Skúš.

$$y = xe^{cx}$$

$$y' = e^{cx} + xce^{cx} \qquad = \frac{xe^{cx}}{x}\left(\ln\frac{x.e^{cx}}{x} + 1\right)$$

$$e^{cx} + xce^{cx} = xce^{cx} + e^{cx}$$

4. Lineárna rovn.

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \qquad (1)$$

a.) $Q(x) = 0$ $\qquad y' + P(x) \cdot y = 0 \qquad (2)$ homogenná, lineárna d.r.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y \quad / \text{sep.}$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x) \cdot dx \quad / \text{int.}$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C$$

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int P(x)dx$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y = C \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (3)$$

(3) je všeob. rieš. (2)

b.) Lagrangeova metóda: Variácia konštanty:

Predp. že (3) je aj rieš (1), pričom konšt. C považ. za f. premennej x. Potom (3) musí vyhov. (1).

$$\left.\begin{aligned} y' &= c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + c(x)\, e^{-\int P(x)dx} \cdot -P(x) \\ y &= c(x)\, e^{-\int P(x)dx} \end{aligned}\right\} \text{ dos do } (1)$$

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$c(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + A \qquad / \text{dos. do } (3)$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left\{ \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + A \right\} \sim \text{všeob. rieš. } (1)$$

Pr. $\quad y' - 2xy = (x+1)e^{x^2}$

$P(x) = -2x \qquad Q(x) = (x+1)e^{x^2}$

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x \cdot dx$$

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

$$\ln \frac{y}{c} = x^2$$

$$\frac{y}{c} = e^{x^2} \rightarrow y = c \cdot e^{x^2}$$

$$y = c\, e^{x^2}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x)\, 2x \cdot e^{x^2}$$

$$c'(x)\, e^{x^2} + 2x\, c(x) \cdot e^{x^2} - 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} = (x+1)e^{x^2}$$

$$c'(x) = x + 1$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + x + A$$

$$y = e^{x^2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x + A \right] \sim \text{všeob. rieš.}$$

Dosadením do vzorca:

$\int P(x)dx = \int -2x dx = -x^2$

$$y = e^{x^2}\left[\int (x+1)e^{x^2}\cdot e^{-x^2}\cdot dx + A\right]$$

$$y = e^{x^2}\left[\frac{x^2}{2} + x + A\right]$$

5. Bernoulliho d.r.

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^m \quad ; m \neq 1$$

$$\frac{1}{y^m}\cdot y' + P(x)\cdot\boxed{\frac{1}{y^{m-1}}} = Q(x) \quad ; \quad \frac{1}{y^{m-1}} = z = y^{1-m} \quad / \text{der.}$$

$$(1-m)y^{-m}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1}{y^m}\cdot y' = \frac{1}{1-m}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1}{1-m}\cdot\frac{dz}{dx} + P(x)\cdot z = Q(x) \quad /(1-m)$$

$$\frac{dz}{dx} + \boxed{(1-m)P(x)}\cdot z = \boxed{(1-m)\cdot Q(x)} \quad \text{lin. dif. r.}$$

Pr.:

$$y' + xy = x^3\cdot y^3 \quad / m=3$$

$$\frac{1}{y^3}\cdot y' + x\cdot\frac{1}{y^2} = x^3 \quad (1) \quad / \frac{1}{y^2} = z = y^{-2} \quad \rightarrow -2y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + x\cdot z = x^3 \quad /\cdot(-2)$$

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \quad (2) \quad / \text{lin. d. r.}$$

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dz}{dx} = 2xz$$

$$\frac{dz}{z} = 2x dx$$

$$\ln z = x^2 + \ln c$$

$$\ln\frac{z}{c} = x^2$$

$$z = c\cdot e^{x^2} \quad (4)$$

všeob. rieš (3)

$$\left.\begin{aligned} z &= c(x)\cdot e^{x^2} \\ z' &= c'(x)\cdot e^{x^2} + c(x)\cdot 2x\cdot e^{x^2} \end{aligned}\right\} \text{dos do (2)}$$

$$c'(x)\cdot e^{x^2} + \cancel{2x\cdot c(x)e^{x^2}} - \cancel{2x\cdot c(x)\cdot e^{x^2}} = -2x^3$$

$$c'(x) = -2x^3\cdot e^{-x^2}$$

$$c(x) = -2\int x^3 e^{-x^2}dx \quad / x^2 = t$$

$$c(x) = -\int t\cdot e^{-t}dt = -t\cdot e^{-t} - \int e^{-t}dt + A$$

$u = t \quad v' = e^{-t}$

$u' = 1 \quad v = -e^{-t}$

$$c(x) = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + A = -e^{-x^2}(x^2+1) + A$$

$$z = e^{x^2}\{(-e^{-x^2})(x^2+1) + A\} = -x^2 - 1 + Ae^{x^2}$$

$\sim$

$$y^{-2} = -(x^2 + 1 + Be^{x^2}) \qquad / -A = B$$

$$1 = \pm y^2(x^2+1+Be^{x^2}) \quad \sim \text{ obecné rieš. rovn. (1)}$$

Skúš.:

$$y^2x^2 + y^2 + yBe^{x^2} + 1 = 0 \qquad / \; \cancel{y^2 = \frac{-1}{x^2+1+Be^{x^2}}}$$

$$\cancel{y = \sqrt{\frac{-1}{x^2+1+Be^{x^2}}}}$$

$$y' = -\frac{2xy^2 + 2Bxy^2e^{x^2}}{2yx^2 + 2y + 2Bye^{x^2}} \quad \text{— dos}$$

$$-\frac{2xy^2 + 2Bxy^2e^{x^2}}{2yx^2 + 2y + 2Bye^{x^2}} + xy = x^3y^3 \qquad / \cdot (2yx^2 + 2y + 2Bye^{x^2})$$

$$\cancel{-2xy^2} - \cancel{2Bxy^2e^{x^2}} + 2y^2x^3 + \cancel{2xy^2} + \cancel{2Bxy^2e^{x^2}} = 2y^4x^5 + 2x^3y^4 + 2Bx^3y^4e^{x^2}$$

dos. opäť y!

$$x^3 = y^2x^5 + x^3y^2 + Bx^3y^2e^{x^2}$$

$$y^2(x^5 + x^3 + Bx^3e^{x^2}) = x^3 \qquad / \cdot \frac{1}{x^3}$$

§ 4. Ďalšie typy dif. r. 1. rádu.

Budeme uvaž.: d. r. 1° neriešiteľné vzhľ. na y'.

1. $F(x, y') = 0$

ak sa r. dá nap.: $x = f(y')$ (1) potom vol. subst.: $y' = t$

dosad.: $x = f(t)$ (2) $\to$ $dx = f'(t)\,dt$

$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'dx$

$$dy = t \cdot f'(t)\,dt$$

$$y = \int t\, f(t)\,dt + C \quad \sim \text{ vš. rieš. v parametrickom tvare:}$$

$$x = f(t)$$
$$y = \int t \cdot f'(t)\,dt + C$$

pr. $\Rightarrow$

Pr.: $x = y' + e^{y'}$ $\quad / y' = t$

$x = t + e^t$

$dx = (1 + e^t)dt$ $\quad dy = y' \cdot dx$

$dy = t \cdot (1 + e^t)\, dt$

$y = \int t \cdot (1+e^t)\, dt = \frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c$

$$\left.\begin{aligned} x &= t + e^t \\ y &= \frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + c \end{aligned}\right\}$$ všeob. r. v par. tvare

2.) $F(y; y') = 0$

vyjadr.: $y = f(y')$ $\quad / y' = t$

$y = f(t)$ $\quad / dy$

$dy = f'(t)\, dt$ $\quad / y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'}$

$dx = \frac{f'(t)\, dt}{t}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{f'(t)\, dt}{t} + c \\ y &= f(t) \end{aligned}\right\}$$ všeob. r. v par. tv.

Pr.: $y = y' + \ln y'$ $\quad / y' = t$

$y = t + \ln t$ $\quad /$ $\quad dy = \left(1 + \frac{1}{t}\right)dt$

$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'}$

$dx = \frac{\left(1 + \frac{1}{t}\right)dt}{t}$

$x = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt$

$$\left.\begin{aligned} x &= \ln t - \frac{1}{t} + c \\ y &= t + \ln t \end{aligned}\right\}$$ vš. r. v par. tvare

3. Clairantova rovnica.

$$y = y'x + f(y') \qquad (1)$$

predp. že $f(y')$ má deriváciu:

$$y' = y''.x + y' + f'(y').y''$$

$$0 = y''\{x + f'(y')\}$$

a.) $y'' = 0 \Rightarrow y' = c$ integr.: $y = cx + d$ / musí vyhovieť rovnici, ak je jej riešením:

$$cx + d = cx + f(c)$$

$$d = f(c)$$

$$y = cx + f(c)$$ všeob. rieš. – predst. sústavu priamok

b.) $x + f'(y') = 0$ (prikl. 1.) / $y' = t$

rieš. v p.t. $\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = tx + f(t) \end{cases}$ do pôvodn. rovn.: $y' = t$:

Ak sa t podarí vylúčiť: $y = \varphi(x)$. Singulárne riešenie.

Pr: $y = y'(x) + (y')^2$

$$y' = y''x + y' + 2y'.y''$$

$$0 = y''(x + 2y')$$

a.) $y'' = 0 \rightarrow y' = c \rightarrow y = cx + d$ / do pôv. r.

$$cx + d = cx + c^2$$

$$d = c^2$$

$$y = cx + c^2$$ ~ všeob. rieš.

b.) $(x + 2y') = 0$

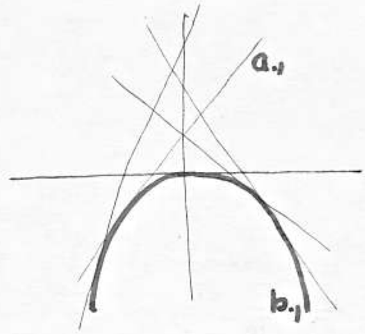
$x = -2y'$ / $y' = t$

$\left.\begin{array}{l} x = -2t \quad / \text{ v pôv. rovn.} \\ y = tx + t^2 \end{array}\right\}$ singul. rieš.

$$y = -\frac{x}{2}.x + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}$$

→

→ $y = -\frac{x^2}{4}$



4.) Lagrangeova (d'Alambertova) rovnica

(zobecnenie 3.)

$$y = f(y')x + g(y') \quad ; \quad f(y') \neq y'$$

$$y' = f'(y')\cdot y''x + f(y') + g'(y')\cdot y''$$

$$y' - f(y') = y''\{f'(y')x + g'(y')\} \qquad / y' = t \quad ; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$t - f(t) = \frac{dt}{dx}\{f'(t)\cdot x + g'(t)\} \qquad / \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\{t - f(t)\}\cdot\frac{dx}{dt} = f'(t)\cdot x + g'(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f'(t)}{t - f(t)}\cdot x + \frac{g'(t)}{t - f(t)}$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{f'(t)}{t - f(t)}\cdot x = \frac{g'(t)}{t - f(t)}.$$ – lineárna nehomog. rovnica

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad \begin{matrix} y \to x \\ x \to t \end{matrix}$$

Po vyriešení $x = \varphi(t; c)$ – všeob. rieš.

Pr.: $y = (y')^2(x+1)$

$$y = y'^2 x + y'^2$$

$$y' = 2y'y''x + y'^2 + 2y'y''$$

$$y' - y'^2 = y''(2y'x + 2y') \qquad / y' = t \qquad y'' = \frac{dt}{dx}$$

$$t - t^2 = \frac{dt}{dx}(2tx + 2t) \qquad / \cdot \frac{1}{t}$$

$$1 - t = \frac{dt}{dx}(2x + 2)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t}x + \frac{2}{1-t}$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{1-t}\cdot x = \frac{2}{1-t} \qquad \text{lin. rovn.}$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{1-t}x = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2}{1-t}\,dt$$

$$\ln x = -2\ln(1-t) + \ln c$$

$$x = \frac{c}{(1-t)^2} \qquad \frac{dx}{dt} = c'(1-t)^{-2} + 2c(1-t)^{-3}$$

$$\frac{c'}{(1-t)^2} + \frac{2c}{(1-t)^2} - \frac{2}{1-t}\cdot\frac{c}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t}$$

$$c' = 2(1-t^2) + \cancel{A}$$

$$c = 2t - t^2 + A$$

$$x = \frac{1}{(1-t)^2}(2t - t^2 + A)$$

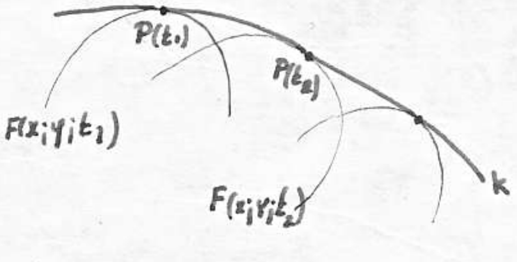
vš. rieš. rovn. (celkom hore)

dos. do 1. rovn. x :

$$y = t^2\left\{\frac{2t}{(1-t)^2} - \frac{t^2}{(1-t)^2} + \frac{A}{(1-t^2)} + 1\right\} \qquad \text{vš. rieš. pôv. rovn. v par. tvare.}$$

§5. Obálka sústavy kriviek. Singulárne rieš. d.r.

$F(x;y;t) = 0 \quad (1) \qquad t \sim$ parameter



Predp. že ex. kr. k; taká že má s každou krivkou zo súst. (1) práve 1 spoločný bod. Každý bod krivky k leží práve na jednej z kriviek súst. (1).

Krivku k naz. obalkou k sústave (1)

$F(x;y;t) = 0 \quad (1)$ – jednoparametrická sústava kriviek.

1, nech t je pevné.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{dt}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (2)$$

2.) Nech t sa mení ; $x=x(t)$; $y=y(t)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}=0 \qquad (3)$$

$\rightsquigarrow$

$$z\,(2);(3):\quad \left.\begin{aligned} F(x;y;t)&=0\\ \frac{\partial F}{\partial t}&=0\end{aligned}\right\}(4)$$

Zist. sme, že ak s. kr. (1) má nať obalku, potom body obalky musia vyhovieť rovn. (4) ; platí veta:

Nech je daná súst. krivieh: $F(x;y;t)=0$; nech v každom bode tejto sústavy je alebo $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$ alebo $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$; potom rovnicami (4) je daná obalka (po vylúčení parametra t).

Clairautova rovn.:

$$y=y'x+f(y')$$

všeob. rieš.: $y=cx+f(c)$; $y-cx-f(c)=0$ / c - parameter

der. podľ. c:

$$-x-f'(c)=0$$

$$x=-f'(c)$$

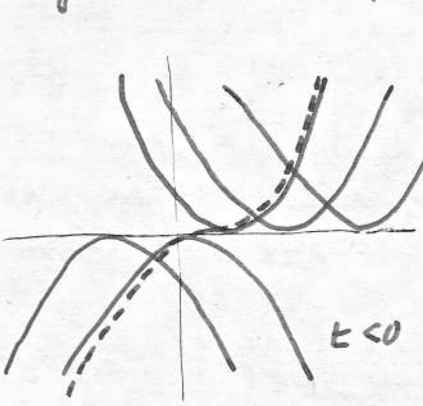
$$y+cf'(c)-f(c)=0$$

par. r. kr.

$\Downarrow$

$y=\Psi(x)$

Pr: $y=t(x-t)^2$ / $t\in(-\infty;+\infty)$



$$F(x;y;t)=y-t(x-t)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0-(x-t)^2-t(x-t).2(-1)$$

$$y-t(x-t)^2=0$$

$$-(x-t)^2+2t(x-t)=0$$

$$(x-t)^2=2t(x-t) \qquad /\ x\neq t$$

$$x-t=2t$$

$$x=3t \quad \text{dos. do 1. r.}$$

$$y=\frac{x}{3}\left(x-\frac{x}{3}\right)^2$$

$$y=\frac{4}{27}x^3$$

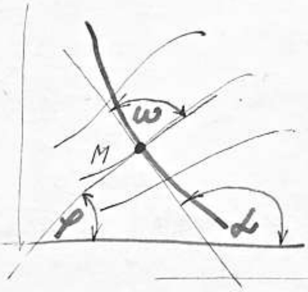
§6. Izogonálne a ortogonálne trajektórie.

$F(x;y;t)=0$ (1)

Nech k krivkám ex. krivka ℓ.

krivka ℓ sa naz. izogonálna trajektória s.(1), ak pretína každú krivku s.(1) pod tým istým uhlom ω. Ak $\omega=\frac{\pi}{2}$; tak je to ortogonálna trajektória.

Nech je dané (1) a pevný uhol ω. Chceme nájsť mat. vyjadrenie pre trajektórie.



Zvolme $M(x;y)$

$\alpha=\varphi+\omega$ $\Big|$ ω - daný, φ - určený

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\omega}{1-\operatorname{tg}\omega\cdot\operatorname{tg}\varphi} \quad \text{pre } \omega\neq\frac{\pi}{2}$$

Pre $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$

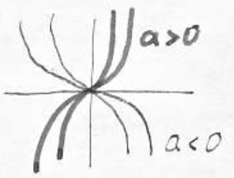
Preto v b. M: $y'_{iz}=\operatorname{tg}\alpha$ $\quad y'_{kr}=\operatorname{tg}\varphi$ $\quad k=\operatorname{tg}\omega$

Potom $\boxed{y'_{iz}=\frac{k+y'_{kr}}{1-ky'_{kr}}}$; $\boxed{y'_{ort.}=-\frac{1}{y'_{kr.}}}$

Nech $y'=f(x;y)$ je dif. r. sústavy čiar; potom vzorce možno písať:

$$y'_{iz}=\frac{k+f(x;y)}{1-kf(x;y)} \qquad y'_{ort.}=-\frac{1}{f(x;y)} \quad \text{dif. rovn. pre trajektórie.}$$

Pr.: Nájsť izogonálne trajekt. pod uhlom $\omega=60°$ a ort. trajekt. v sústave kub. parabol: $y=a\cdot x^3$



a>0

a<0

1. izog.: $\omega=60°$ $\operatorname{tg}\omega=\sqrt{3}$ $\qquad y'=3ax^2$ $\quad y'=3\cdot\frac{y}{x^2}\cdot x^2$ $\quad y'=3\frac{y}{x}$

$$y'_{iz.}=\frac{\sqrt{3}+3\frac{y}{x}}{1-\sqrt{3}\cdot 3\frac{y}{x}}=\frac{x\sqrt{3}+3y}{x-3\sqrt{3}y} \qquad \Big| \frac{y}{x}=u,\ y'=u+x\frac{du}{dx}$$

$$y'=u+x\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{3}+3u}{1-3\sqrt{3}\cdot u}$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{3}+3u-u+3\sqrt{3}\cdot u^2}{1-3\sqrt{3}\cdot u}$$

$$\frac{1-3\sqrt{3}u}{\sqrt{3}-2u+3\sqrt{3}u^2}\,du=\frac{dx}{x}$$

$u=\varphi(x;c)=\frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y=x\cdot\varphi(c)$ súst. čiar izog. k $y=ax^3$

2. ortogonálne :

$$y' = 3\frac{y}{x}$$

$$y'_{ort.} = -\frac{1}{3\frac{y}{x}} = -\frac{x}{3y}$$

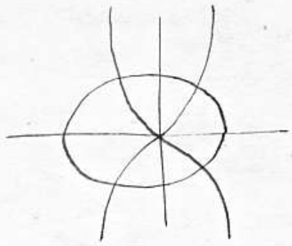
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

$$3y\,dy = -x\,dx$$

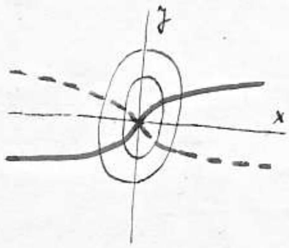
$$\frac{3}{2}y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = C \quad ; \quad C > 0$$

$$\frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{\frac{2C}{3}} = 1$$ ~ sústava elíps.



Pr. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{3a} = 1 \quad a > 0$ nájdi ortogonálne trajektórium.



$$3x^2 + y^2 - 3a = 0$$

$$y' = \frac{-6x}{2y} = -\frac{3x}{y}$$

$$y'_{ort.} = -\frac{1}{-\frac{3x}{y}} = \frac{y}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x}$$

$$3x\,dy = y\,dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{3x}$$

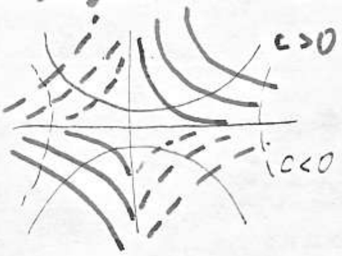
$$\ln y = \frac{1}{3}\ln x + \ln c$$

$$y = c \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

$$y^3 = c^3 x = dx \rightarrow x = dy^3$$

Pr. Nájdi ort. trajekt. v súst. čiar daných rovnicou:

$y = \frac{a}{x}$



$$y' = -\frac{a}{x^2} = -\frac{yx}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

$$y'_{ort} = -\frac{1}{y'} = \frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = x \cdot dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c$$

$$\frac{y^2}{2c} - \frac{x^2}{2c} = 1 \quad / c \neq 0$$

hyperb.

§7 Základné pojmy o d.r. vyšších rádov. 28.X.1969.

$F(x;y;y' \cdots y^{(n)}) = 0$ (1) $\quad y = y(x)\ \ y' = y'(x) \ \dots \ y^{(n)} = y^{(n)}(x)$.

Ak sa (1) dá napísať: $y^{(n)} = f(x;y,y',\dots y^{(n-1)})$ (2)
potom hov. že (1) je riešiteľná vzhl. na $y^{(n)}$

Sústavu n+1 čísel $(x_0;\ y_0 = y(x_0) \dots\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$
nazývame počiatočnými podmienkami:

Riešenie rovnice (2) $y = \varphi(x)$ vyhovuje poč. podmienkam (3) ak platí: x_0 $\varphi(x_0) = y_0$ $\varphi'(x_0) = y_0'$ $\dots \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Cauchy v. : Nech f. $f(x;y;y' \dots y^{(n-1)})$ je spojitá v $O(P) \subset E_{n+1}$ a má v tomto okolí spoj. parc. deriváciu: $\frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial y'}; \dots \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$.

Potom ex. také okolie bodu P (môže byť rôzne od pôvodného okolia) $O_1(P)$, že cez toto okolie prechádza práve 1 riešenie d.r. (2) vyhovujúce poč. podmienkam (3)

F. $y = \varphi(x;c_1;c_2;\dots c_n)$ sa nazýva všeobecným riešením d.r. (2) ak je jej riešením pre ľub. hodnoty konštánt $c_1; c_2 \dots c_n$.

Ak do všeob. riešenia za konšt. $c_1 \dots c_n$ zvolíme pevné hodnoty, dostávame partikulárne riešenie.

Všeob. rieš. v implicitnom tvare : $F(x; y; c_1 \dots c_n) = 0$ sa naz. všeobecným integrálom d.r. (2).

§8. Rovnice vyšších rádov, dovoľujúci znížiť rád.

1.) $y^{(n)} = f(x)$ ... $f(x)$ spoj. pre $\forall x \in J \subset E_1$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int\left\{\int f(x)\,dx + c_1\right\} + c_2 = \int\left\{\int f(x)\,dx\right\}dx + c_1 x + c_2$$

$$y = \underbrace{\int dx \cdot \int dx \dots \int}_{n} f(x)\,dx + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_{n-1}x + c_n .$$

Pr: $y^{(3)} = e^{2x}$ poč. p. $x_0 = 0$ $y_0 = 1$ $y_0' = -1$ $y_0'' = 0$

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad \text{— všeob. rieš.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1 = \frac{1}{8} + c_3 & \rightarrow & \frac{7}{8} = c_3 \\ -1 = \frac{1}{4} + c_2 & \rightarrow & -\frac{5}{4} = c_2 \\ 0 = \frac{1}{2} + c_1 & \rightarrow & -\frac{1}{2} = c_1 \end{array}\right\} \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right) + \left(-\frac{5}{4}x\right) + \frac{7}{8}$$

2.) $y^{(n)} = f(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \dots y^{(n-1)})$ $k < n$

$$y^{(k)} = w \;;\; y^{(k+1)} = w' \;;\; y^{(k+2)} = w'' ; \dots \; y^{(n-1)} = w^{(n-k-1)}$$

$$w^{(n-k)} = g(x; w'; w'' \dots w^{(n-k-1)})$$

$(n-k)$ krát integrujeme.

$$w = \xi(x; c_1; c_2; \dots c_{n-k}) = y^{(k)}$$ – integrujeme (k) krát

Dostaneme všeob. rieš. : $y = \varphi(x; c_1 \dots c_n)$

Pr: $y''' = y'' \frac{1}{x}$ $\quad | \; y'' = u \quad y''' = u'$

$$\frac{du}{dx} = u \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln u = \ln x + \ln c_1$$

$$u = c_1 x \qquad = y''$$

$$y' = \frac{c_1}{2} \cdot x^2 + C_2$$

$$\underline{y = \frac{c_1}{6} x^3 + C_2 x + c_3}$$

3. $y^{(n)} = f(y; y'; y''; \dots y^{(n-1)})$

$y' = p$ .... p - funkcia závislá od y

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$p^{(n-1)} = g(y; p; p'; \dots p^{(n-2)})$$

$$p = Z(y; c_1; \dots c_{n-1}) \qquad = y' \quad / \text{int.}$$

$$y = \varphi(x; c_1; \dots c_n)$$

Pr: $y'' = \frac{y'^2}{y} + 4y'$ $\quad | \; y' = p \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = \frac{p^2}{y} + 4p \quad / : p \quad p \neq 0$$

$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y} + 4$ $\quad \sim$ homog. rovn. $\quad | \; \frac{p}{y} = u \rightarrow p = y \cdot u$

$$\cancel{\frac{dp}{dy} = \frac{p + 4y}{y}}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dy}{dy} \cdot u + y \cdot \frac{du}{dy}$$

$$u + y \frac{du}{dy} = u + 4$$

$$du = \left(4/y\right) dy$$

$$u = 4 \ln|y| + \ln c_1$$

$$u = 4 \ln|c_1 y|$$

$$\frac{p}{y} = 4 \ln|y c_1| \rightarrow p = 4y \ln|y c_1| = \frac{dy}{dx}$$

$\frac{dy}{y} \cdot \frac{1}{\ln(y c_1)} = 4 dx$ $\; / \text{int.} \; : \ln|\ln|c_1 y|| = 4x + C_2$

§9. Lineárne d. r. vyšších rádov.

D.r. n-tého rádu $F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$ (1)

naz. sa lineárnou ak je lineárna vzhl. na $y; y'; \dots y^{(n)}$.

[lineárne .... 1. stupeňa sú premenné ; napr. $y''' + \frac{1}{x^2} y' = 3y$]

Ak r. (1) je lin., potom môžeme písať vo tvare:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_n(x) y = q(x) \quad (2)$$

pričom $p_1(x) \dots p_n(x)$; $q(x)$ sú spoj. f. premennej x na J.

Ak $q(x) \neq 0$ potom r. (2) je nehomogenná.

Ak $q(x) \equiv 0$ pre vš. $x \in J$ potom (2) je homogenná.

Označme: $L(y) = y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots p_n(x)(y)$

Nazveme $L(y)$ lineárnym dif. operátorom.

$$L(y) = q(x) \qquad (3) \text{ nehomog.}$$

$$L(y) = 0 \qquad (4) \text{ homog.}$$

Pr.: $y'' + 5xy' + e^x y = 0$ $\quad L(5) = 0 + 5x \cdot 0 + 5e^x = 5e^x$

Vlastnosti operátora:

1. Nech c = konšt ; potom $L(cy) = cL(y)$

Dôk:
$$L(cy) = c(y)^{(n)} + p_1(x)(cy)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)(cy) =$$
$$= c\left\{ y^{(n)} + p(x) y^{(n-1)} + \dots p_n(x) y \right\} = L(y) \cdot c$$

2. Nech $y_1; y_2$ majú der. až n-tého r. ; Potom $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

Dôk:
$$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= \left\{ y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_1 \right\} +$$
$$+ \left\{ y_2^{(n)} + \dots + p_n(x) y_2 \right\} = L(y_1) + L(y_2).$$

Pozn.: vlastnosť (2) sa dá rozšíriť na ľubov. konečný počet funkcií: $L(y_1 + \dots + y_n) = L(y_1) + \dots + L(y_n)$.

Z týchto 2 vlastn. vypl. pre rieš. l. d. r. homogénnej tieto vlastnosti:

1.) Ak y_1 je rieš. (4) potom aj $c \cdot y_1$ je riešením (4)

2.) Ak y_1; y_2 sú riešeniami (4), aj $c_1 y_1 + c_2 y_2$ sú rieš. (4)

Z toho vypl. že ak rovnica (4) má rieš. $y_1 \dots y_n$ potom je riešením aj $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$.

§10. Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií. Wronskeho determinant.

Majme f. $\varphi_1(x) \dots \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$ def. na int. J.

Def. 1. funkcie $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$ sa naz. lin. závislé ak existujú také čísla $\alpha_1; \alpha_2; \dots \alpha_n$ z ktorých aspoň 1. $\neq 0$ a pre vš. $x \in J$ platí $\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots \alpha_n \varphi_n(x) = 0$.

Ak f. $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$ sú lin. záv. potom aspoň 1 z nich je lineárnou kombináciou ostatných. Nech napr. v (1) je $\alpha_n \neq 0$.

$$\varphi_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\varphi_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n}\varphi_2(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\varphi_{n-1}(x)$$

$$\varphi_n(x) = \beta_1 \varphi_1(x) + \beta_2 \varphi_2(x) + \dots + \beta_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

β - čísla.

D. 2. f. $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$ sú lin. nezávislé, keď zo vzťahu $\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$ vyplýva: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Pr. $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; 1 $\quad$ / $\alpha \sin^2 x + \alpha \cdot \cos^2 x - \alpha \cdot 1 = 0$

$\alpha(\sin^2 x + \cos^2 x - 1) = 0$ lin. záv.

Ak sú f. lin. nez., potom ani 1. z nich nie je lin. kombináciou iných.

Nech $y_1 \dots y_n$ sú funkcie def. na int. I.
Nech majú der. 1. až $(n-1)$-ho rádu.
Potom determinant:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 ; & y_2 ; & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' ; & y_2' & \dots & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ak $y_1 \dots y_n$ sú f. premennej x; potom Wr. determinant sa označuje $W(x)$.

V.1. Nech f. y_1 až y_n sú lin. závislé na int. I. potom W. det. z nich utvorený sa rovná 0.

Dôkaz: Predp. y_1 až y_n lin. záv. ; Potom aspoň 1. je lin. komb. ostatných. Nech je to $y_{(n)}$:

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} y_n &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots \beta_{n-1} y_{n-1} \\ y_n' &= \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \dots \beta_{n-1} y_{n-1}' \\ &\dots \\ y_n^{(n-1)} &= \beta_1 y_1^{(n-1)} + \beta_2 y_2^{(n-1)} \dots \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Utvorme W pre $y_1 \dots y_n$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots \beta_{n-1} y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \dots \beta_{n-1} y_{n-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & \beta_1 y_1^{(n-1)} + \dots \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = \emptyset$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & 0 \\ y_1' & y_2' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[vynás 1 stl. s $-\beta_1$; ....]

V2. Nech $y_1 \cdots y_n$ sú rieš. d.r. $L(y)=0$
a sú lin. nezáv. na int. J. potom $W(x) \neq 0$ pre $\forall x \in J$.

Dôkaz. (nepriamy)

predp. že ex. bod $x_0 \in J$ v ktorom W utvorený z f. $y_1 \cdots y_n$ je nula.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0), & y_2(x_0); & \cdots & y_{(n)}(x_0) \\ y_1'(x_0), & y_2'(x_0), & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0), & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

uvažujme syst. n. lin. rov., alg. homogenných s neznámymi $\alpha_1 \cdots \alpha_n$.:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots\ldots \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ &\alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \cdots \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} (S)$$

[α - neznáme]

System S má nenulové riešenie, pretože jeho det. sústavy $W(x_0)=0$. Nech to riešenie je:

$$\bar{\alpha}_1; \bar{\alpha}_2; \cdots \bar{\alpha}_n$$ ~ konštanty

utvoríme f.: $\bar{y} = \bar{\alpha}_1 y_1 + \bar{\alpha}_2 y_2 + \cdots + \bar{\alpha}_n y_n$

f. je lin. kombináciou riešení ~~[illegible]~~ $L(y)=0$

Preto je tiež riešením tejto rovnice aj $\bar{y}$:$[L(y)=0]$

Pretože: $\bar{y} = \bar{\alpha}_1 y_1 + \bar{\alpha}_2 y_2 + \cdots \bar{\alpha}_n y_n$

$$\bar{y}' = \bar{\alpha}_1 y_1' + \bar{\alpha}_2 y_2' + \cdots \bar{\alpha}_n y_n'$$

$$\bar{y}^{(n-1)} = \bar{\alpha}_1 y_1^{(n-1)} + \bar{\alpha}_2 y_2^{(n-1)} + \cdots \bar{\alpha}_n y_n^{(n-1)}$$

pre $x = x_0$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{\alpha}_1 y_1(x_0) + \cdots + \bar{\alpha}_n y_n(x_0) = 0$$ / α - sú rieš!

$$\bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \bar{\alpha}_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \bar{\alpha}_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

to zn. že rieš. $\bar{y}$ rov. $L(y)=0$ vyhov. poč. podm. $x_0; 0; 0; 0 \ldots 0$

~~Podľa vety o ex. a jednoznačnosti~~ →

Vieme že každá lin. alg., hom. rovn. má nulové rieš.: $y = 0$.

Toto rieš. tiahlieč vyhov. zač. podmienkam $x_0; 0; 0$.–

Potom podľa vety o ex. a jednoznačnosti rieš. pre rov. $L(y) = 0$ udané poč. podmienky jednoznačne určujú riešenie. To znam. že rieš. $\bar{y}$ je totožné s riešením rovnic identicky 0.

$$\text{Potom } \bar{\alpha}_1 y_1 + \bar{\alpha}_2 y_2 + \dots \bar{\alpha}_n y_n \equiv 0.$$

Pretože medzi číslami $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ ex. rôzne od nuly (tvoria nenulové riešenie) $\Rightarrow$ $y_1 \dots y_n$ sú lin. závislé čo je v spore s predpokladom V2.

$\Downarrow$

W. det. $\neq 0$ pre vš. x v int. J.

Fundamentálny systém riešení lin. hom. rovn. n-tého rádu je systém $y_1 \dots y_n$ ľubov. n riešení ktoré sú lin. nezávislé.

Z V1 V2 vypl. že preto aby rovn.

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad L(y) = 0 \quad (*)$$

mala f. rieš.; $y_1 \dots y_n$ je nutnou a post. podmienkou:

$$W(x) \neq 0 \text{ aspoň v 1 bode int. } J.$$

V3. Nech $y_1 \dots y_n$ je fund. systém riešení rovnice (*) na int. J, potom lin. kombinácia $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ je všeobecným riešením tejto rovnice.

Dôkaz. Podľa predp. sú $y_1 \dots y_n$ rieš. rovnice (*), Potom podľa §9 je aj $y = c_1 y_1 + \dots c_n y_n$ riešením (*)
Treba dok. že toto rieš. je aj všeobecným riešením. → Ukázať že každé rieš. (*) dostaneme z neho pri urč. hodnotách konštánt $c_1 \dots c_n$.

→ Nech $\bar{y}$ je ľubov. rieš. (*). Zoberme $x_0 \in J$.
Utvorme

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= \bar{y}(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) &= \bar{y}'(x_0) \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= \bar{y}^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}\right\} \quad (S_1)$$

Det. sústavy (S_1) je W. determinant. a pretože $y_1 \dots y_n$ sú lin. nezáv. je $W(x_0) \neq 0$ ⟹
Podľa Kramerovho prav. sústava (S_1) má jediné rieš.: $\bar{c}_1; \bar{c}_2; \dots \bar{c}_n$.

→ Uvaž. rieš. (*) také že namiesto c dávame $\bar{c}$:

$$y = \bar{c}_1 y + \bar{c}_2 y_2 + \dots + \bar{c}_n y_n$$

Z výberu konšt. $c_1 \dots c_n$ ⟹ že $y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \dots + \bar{c}_n y_n(x_0) = \bar{y}(x_0)$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = \bar{c}_1 y^{(n-1)}(x_0) + \dots \bar{c}_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}^{(n-1)}(x_0)$$

To znam. že rieš.:

$y = \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 + \dots \bar{c}_n y_n$ vyhov. tým istým podmienkam ako riešenie $\bar{y}$.

Podľa v. o ex. a jednoznačnosti riešenia (Cauchy v.) tieto riešenia sú identické: $y \equiv \bar{y}$.

§11. Lin. dif. rovn. 2ř.

$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \qquad (1)$ $\qquad \Big/ \begin{matrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{matrix}$ funkcie spojité na int. I.

Všeobecný vzorec na rieš. neex.

Ak poznáme 1 part. riešenie, potom rovnicu riešime:

subst.: $y = u \cdot y_1 \quad \rightarrow \quad y' = u' y_1 + u y_1'$

$$y'' = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$$

$$u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' + p_1(x)\left[u' y_1 + u y_1'\right] + p_2(x)\, u \cdot y_1 = 0$$

$$u'' y_1 + \left\{2y_1' + p_1(x)\, y_1\right\} \cdot u' + \Big\{\underbrace{y_1'' + p_1(x)\, y_1' + p_2(x) \cdot y_1}_{0}\Big\}\, u = 0$$

$\leftarrow$ partik. riešenie (1) !

$$u'' y_1 + u'\left\{2y_1' + p_1(x)\, y_1\right\} = 0$$

$u' = v$

$u'' = v'$

$$v' y_1 + v\left(2y_1' + p_1(x)\, y_1\right) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dv}{dx}\, y_1 = -\left(2y_1' + p_1(x)\, y_1\right) \cdot v$$

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} - p_1(x)\right) dx$$

$$\ln v = -2 \ln y_1 - \int p_1(x)\,dx + \ln C_1$$

$$v = \frac{C_1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)\,dx} \qquad \Big/ v = u'$$

$$u = \int \frac{C_1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)\,dx}\, dx + C_2$$

$$\underline{y = C_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p(x)\,dx}\, dx + C_2 y_1}$$

Všeob. riešenie (1)

Pr: $\quad y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0 \quad ; \; y_1 = \frac{\sin x}{x} \qquad x \neq 0$

$$y_1 = x^{-1} \sin x$$

$$y_1' = -x^{-2} \cdot \sin x + x^{-1} \cdot \cos x$$

$$y_1'' = 2x^{-3} \cdot \sin x - x^{-2} \cos x - x^{-2} \cdot \cos x - x^{-1} \cdot \sin x$$

$$2x^{-3} \sin x - 2x^{-2} \cos x - x^{-1} \sin x + \frac{2}{x}\left(-x^{-2} \sin x + x^{-1} \cos x\right) + x^{-1} \sin x = 0 \qquad 0 = 0$$

$y = u \cdot y_1 = u \frac{\sin x}{x}$ | y' y'' vyp. a dos. do rovn. :

$$\frac{\sin x}{x} \cdot u'' + 2\frac{\cos x}{x} u' = 0 \qquad / \; u' = z \quad u'' = z'$$

$$\frac{\sin x}{x} z' + 2\frac{\cos x}{x} \cdot z = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -2\frac{\cos x}{\sin x} \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = -2 \operatorname{cotg} x \, dx$$

$$\ln z = -2\ln|\sin x| + \ln C_1$$

$$z = \frac{C_1}{\sin^2 x}$$

$$u = C_1 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + C_1 = -C_1 \operatorname{cotg} x + C_2 x$$

$$y = \frac{\sin x}{x}\left(-C_1 \operatorname{cotg} x + C_2 x\right)$$

$$\underline{y = -C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}}$$

§ 12. Nehomogenná dif. lineárna rovn. n-tého rádu

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_n(x) y = Q(x) \qquad (1)$$

$p_1 \dots$ – sú spoj. funkcie

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad \text{homogenná} \quad (2)$$

$$L(y) = Q(x)$$
$$L(y) = 0$$

V1. Nech funkcie y a z sú riešeniami rovnice (1) potom $y - z$ je riešením rovnice (2)

Dôk.: $L(y) \equiv Q(x)$
$L(z) \equiv Q(x)$

$L(y) - L(z) = 0$

$$0 = L(y) - L(z) = L(y - z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$y - z$ je riešením (2)

V2. Nech y^* je riešením (pevne určeným) rovnice (1).
Nech $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ je všeob. rieš. rovnice (2)
Potom všeob. riešenie rov. (1) má tvar:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n + y^*$$

Dôkaz:

$$L(y^* + c_1y_1 + \dots + c_ny_n) = L(y^*) + L(\underbrace{c_1y_1 + \dots + c_ny_n}_{0}) \equiv Q(x)$$

$$L(y^*) \equiv Q(x)$$

Treba ešte dok, že každé iné rieš. (1) dostaneme z $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n + y^*$ iba voľbou konštant.

Predp.: $z = \bar{c}_1y_1 + \dots y_n\bar{c}_n + y^*$ je rieš. (1)

$$L(z) \equiv Q(x)$$

$$L(z - y^*) = 0 \qquad \text{podľa V1} \qquad \Rightarrow L(z - y^*) = L(z) - L(y^*)$$

$$z - y^* = c_1y_1 + \dots + c_ny_n \rightarrow$$

$$z = c_1y_1 + \dots + c_ny_n + y^*$$

§13. Lin. dif. rovn. n^r homogenná s konštantnými koeficientami.

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + y'a_{n-1} + a_ny = 0 \quad (1)$$

$a_1 \dots a_n$ – sú čísla

predp.: $y = e^{kx}$ je riešením (1)

$$y' = ke^{kx} \quad y'' = k^2e^{kx} \quad y''' = k^3e^{kx} \quad \dots \quad y^{(n)} = k^ne^{kx}$$

$$k^ne^{kx} + a_1k^{n-1}e^{kx} + a_2k^{n-2}e^{kx} + \dots + a_{n-1}ke^{kx} + a_ne^{kx} = 0$$

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0 \qquad (2)$$

algebr. rovn. n-tého stupňa.

charakteristická rovnica pre (1)

VI. Nech sú korene $k_1, k_2 \dots k_n$ rovn(2) sú reálne a rôzne, potom všeob. rieš. (1) má tvar:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$

Dôkaz:

$$e_1^{k_1 x}, \; e^{k_2 x}, \dots e^{k_n x} \quad - \text{ sú nezávislé } ; \; W(x) \neq 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & \dots & k_n^2 e^{k_n x} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot \dots e^{k_n x}}_{\neq 0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = D$$

$$D = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1) \dots (k_n - k_1) \cdot$$
$$\cdot (k_3 - k_2)(k_4 - k_2) \dots \cdot (k_n - k_2) \dots (k_n - k_{n-1}) \neq 0$$

lebo k – sú rôzne.

$$\Downarrow$$

$$W(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{k_1 x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$

Pr. 1.

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

ch. rovn. : $k^2 + 5k + 6 = 0 \quad \Big| \begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \end{array}$

$$\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

Pr. 2.

$$y''' - 7y'' + 6y' = 0$$

ch. rovn.: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0$

$k(k^2 - 7k + 6) = 0 \quad \Big| \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 6 \end{array}$

$$y_1 = e^{0x} \quad y_2 = e^{1 \cdot x} \quad y_3 = e^{6x}$$

$$\underline{y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{6x}}$$

2.) Ak char. rovnica (2) má ℓ-násobný reálny koreň k; $\ell > 1$ potom k tomuto koreňu patria tieto riešenia rovn (1)

$$e^{kx}, \quad xe^{kx}, \quad x^2e^{kx}, \quad x^{\ell-1}\cdot e^{kx}$$

3.) Ak ch. r. (2) má jednoduchý komplexný koreň $\alpha + i\beta$ (potom má aj koreň združený: $\alpha - i\beta$) vtedy k tejto dvojici patria riešenia:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\ ; \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

4.) Ak ch. r. má ℓ-nás. kompl. koreň $\alpha + i\beta$ (potom má aj ℓ-nás. $\alpha - i\beta$) potom k týmto koreňom patria riešenia:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\ ; \ xe^{\alpha x}\cos\beta x\ ; \ \dots\ x^{\ell-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x\ ; \ xe^{\alpha x}\sin\beta x\ ; \ \dots\ x^{\ell-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Pr.

1.)
$$\left.\begin{aligned} &y'' - 4y' + 4y = 0 \\ &k^2 - 4k + 4 = 0 \end{aligned}\right\} (2)$$
$$(k-2)^2 = 0 \quad k_1 = k_2 = 2$$
$$y_1 = e^{2x} \quad y_2 = xe^{2x}$$
$$y = c_1e^{2x} + xc_2e^{2x} = e^{2x}(c_1 + c_2x) \quad ///$$

$$y' = 2c_1e^{2x} + c_2e^{2x} + 2c_2xe^{2x}$$
$$y'' = 4c_1e^{2x} + 2c_2e^{2x} + 2c_2e^{2x} + 4c_2xe^{2x}$$

$$4c_1e^{2x} + 4c_2e^{2x} + 4c_2xe^{2x} - 8c_1e^{2x} - 4c_2e^{2x} - 8c_2xe^{2x} + 4c_1e^{2x} + 4xc_2e^{2x} = 0$$
$$0 = 0$$

2.)
$$y^{(5)} + 2y^{(4)} + 2y''' = 0$$
$$k^5 + 2k^4 + 2k^3 = 0 = k^3(k^2 + 2k + 2) \quad \left| \begin{aligned} &k_1 = k_2 = k_3 = 0 \\ &k_{4,5} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \end{aligned} \right\} (3-2)$$
$$\alpha = -1 \quad \beta = 1$$
$$y_1 = e^{0x} \quad y_2 = xe^{0x} \quad y_3 = x^2e^{0x}$$
$$y_4 = e^{-1 \cdot x}\cdot\cos 1 \cdot x \quad y_5 = e^{-1x}\cdot\sin 1 \cdot x$$

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}\cos x + c_5e^{-x}\sin x \quad ///$$

P.3. $y^{(4)} + 4y^{(2)} + 4y = 0$

$k^4 + 4k^2 + 4 = 0$ $\quad\Big|\ k_{12} = \pm i\sqrt{2}$ $\quad k_1 = k_3 = i\sqrt{2}$

$(k^2+2)^2 = 0$ $\quad\Big|\ k_{34} = \pm i\sqrt{2}$ $\quad k_2 = k_4 = -i\sqrt{2}$ $\quad$ (4) $\quad \alpha = 0 \quad \beta = \sqrt{2}$

$e^{0x}\cos\sqrt{2}x \; ; \; xe^{0x}.\cos\sqrt{2}x$

$e^{0x}.\sin\sqrt{2}x \; ; \; xe^{0x}.\sin\sqrt{2}x$

$$y = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2x.\cos\sqrt{2}x + c_3\sin\sqrt{2}x + c_4x\sin\sqrt{2}x$$

$$y = (c_1 + c_2x)\cos x\sqrt{2} + (c_3 + c_4x)\sin x\sqrt{2}$$ ///

§14. Lin. dif. rov. n^r nehomog. s konšt. koeficientami.

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x) \qquad (1)$$

$$y^{n} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0 \qquad (2)$$

hľadáme vš. rieš. (1).

$$y = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n}_{\text{vš. r. } (2)} + y^*$$ — parl. rieš. (1)

V1. Ak pravá časť r. (1) má tvar: $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, kde $P(x)$ je polynom stupňa m, potom $y^* = x^r.e^{\alpha x}.Q(x)$ kde $Q(x)$ je polynom s neurčitými koef. stupňa m a číslo r nám udáva násobnosť koreňa α char. rovnici pre rovnicu (2)

Pr. $\quad y'' - y = xe^{2x}$

$y'' - y = 0$

$k^2 - 1 = 0 \;\Big|\; \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{matrix}$ $\qquad y = \overbrace{c_1e^{1x} + c_2e^{-1x}}^{\text{vš. rieš. hom. r.}} + y^*$

$y^* = (Ax+B).x^0.e^{2x} = e^{2x}(Ax+B)$

$y'^* = 2e^{2x}(Ax+B) + e^{2x}.A$

$y''^* = 4e^{2x}(Ax+B) + 2e^{2x}.A + 2e^{2x}.A$

$e^{2x}(4Ax+4B) + e^{2x}.4A - e^{2x}(Ax+B) = xe^{2x}$

$x(4A-A) + 4B - B + 4A = x$

$x \quad 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$x^0 \quad 3B + 4A = 0 \Rightarrow B = -\frac{4}{3}A = -\frac{4}{9}$

$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right)e^{2x}$ všeob. riešenie.

Pr. 2. $y'' - 2y' + y = 3 \cdot e^x$

ch. r. $k^2 - 2k + 1 = 0 \;\Big|\; k_{1,2} = 1$ $\qquad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + y^*$$

$$y^* = A e^x x^2$$ / 1 je dvojnás. koreňom $\rightarrow x^2$

$$y^{*\prime} = 2Axe^x + Ax^2 e^x$$

$$y^{*(2)} = 2Ae^x + \underline{2Axe^x + 2Axe^x} + Ax^2 e^x$$ / dos do rov. (1)

$$2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x - 4Axe^x - 2Ax^2 e^x + Ax^2 e^x = 3e^x$$

$$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

vš. rieš.:

$$y = e^x (c_1 + c_2 x) + \frac{3}{2} x^2 e^x$$

V2. Nech pravá strana r. (1) má tvar: $f(x) = e^{\alpha x} \{ P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x \}$
kde $P_1(x)$ $P_{(2)} x$ sú polynomy stupňa m_1; m_2
Potom $y^* = x^r e^{\alpha x} \{ Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \}$ kde
$Q_1(x)$; $Q_2(x)$ sú pol. s neurčitými koef., stupňa
$m = \max(m_1; m_2)$ a r nám udáva, koľko-krát
je $\alpha + \beta i$ koreňom ch. r. pre rovnicu (2)

Pr. $y'' - y = 3e^{2x} \cdot \cos x$ $\qquad \alpha = 2;\ \beta = 1$

$y'' - y = 0$

$k^2 - 1 = 0 \;\Big|\; \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{matrix}$ $\qquad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + y^*$$

$$y^* = e^{2x} \{ A \cdot \cos x + B \cdot \sin x \}$$ / $\alpha + \beta = 2 + i$ nie je koreňom, $\rightarrow r = 0$

$$y^{*\prime} = 2e^{2x}(A\cos x + B \sin x) + e^{2x}(-A \sin x + B \cos x)$$

$$y^{*\prime\prime} = 4e^{2x}(A\cos x + B \sin x) + 2e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) + 2e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(-A\cos x - B\sin x)$$

$$4e^{2x}\{A\cos x + B\sin x\} + 4e^{2x}\{-A\sin x + B\cos x\} + e^{2x}\{-A\cos x - B\sin x\} - e^{2x}\{A\cos x + B\sin x\} = 3e^{2x}\cos x$$

$$\cos x\{4A + 4B - A - A\} + \sin\{4B - 4A - B - B\} = 3\cos x + 0.\sin x$$

$$2A + 4B = 3 \qquad 2B - 4A = 0$$

$$10B = 6 \rightarrow B = \frac{3}{5} \qquad A = \frac{B}{2} = \frac{3}{10}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}\left\{\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right\}$$

Pr. 2. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x^2\cos 3x + \sin 3x)$ / $\alpha = 2 \quad \beta = 3$

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

$$k_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm 3i$$

$2+3i$ – 1 nás. koreň $\Rightarrow r = 1$

$$y = c_1 e^{2x}.\cos 3x + c_2 . e^{2x}\sin 3x + y^*$$

$$y^* = x^1 e^{2x}\{(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 3x\}$$

$$y^* = e^{2x}\{(Ax^3 + Bx^2 + Cx).\cos 3x + (Dx^3 + Ex^2 + Fx).\sin 3x\}$$

der. – dosad. $\cos x$ $\sin x$ porovn. koef.

Pozn.: Ak pravá strana nehom. rovn. je súčet, (rozdiel) z viacerých funkcií, potom pri kládaní y^* postupujeme tak že kládame y_1^*; y_2^* … y_k^* a celkové $y^* = y_1^* + y_2^* + \ldots + y_k^*$.

Pr.: $y'' - 4y' + 13y = x^2 e^x + e^{3x}\cos x - 5x$

$2+3i$

$$y_1^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x$$

$$y_2^* = e^{3x}(A\cdot\cos x + B\sin x)$$

$$y_3^* = Ax + B$$

[vždy poč. len 1 y^* naraz.]

§15. Metóda variácie konštánt.

V §14 môže d.r. obsahovať pravú stranu.
Platí pre vš. lin. rovnice:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_n(x) \cdot y = Q(x) \quad (1)$$

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (2)$$

Keď $n=2$:

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = Q(x) \quad (3)$$

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) \cdot y = 0 \quad (4)$$

nech poznáme y_1 i y_2 – tvoria fund. systém rovn. (4)

Všeob. rieš. (4) : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Chceme nájsť vš. r. (3).

Predp., že $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je aj riešením (3); uvaž. že: $c_1 = c_1(x)$
$c_2 = c_2(x)$.

Treba nájsť podmienky, ktoré splňujú $c_1(x)$ i $c_2(x)$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ rieš(3) – predpoklad.

$y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$ / nech $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$

$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$

$y'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$ / y; y'; y'' dos. do (3)

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p_1(x)\{c_1 y_1' + c_2 y_2'\} + \overset{p_2(x)}{\{c_1 y_1 + c_2 y_2\}} = Q(x)$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 \underbrace{\{y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + \overset{p_2(x)}{y_1}\}}_{y_1 \text{ – je riešením rovn.}} + c_2 \underbrace{\{y_2'' + p_2(x) y_2' + \overset{p_2(x)}{y_2}\}}_{0} = Q(x)$$

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = Q(x)$$

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ ~ funkcie tvoria fund. systém.

⇓ môžme vyp. c_1 ; c_2 : (Kramerovo pravidlo)

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-y_2 Q(x)}{W}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{y_1 Q(x)}{W}$$

$$c_1 = -\int \frac{y_2 Q(x)}{W} dx + A \qquad c_2 = \int \frac{y_1 Q(x)}{W} dx + B$$

všeob. rieš. (3) :
$$y = -y_1 \underbrace{\int \frac{y_2 \cdot Q(x)}{W} dx}_{c_1} + A y_1 + y_2 \underbrace{\int \frac{y_1 Q(x)}{W}}_{c_2} + B y_2$$

Príkl.: $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

$y'' + y = 0$

$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_{12} = \pm i$ / $\alpha = 0$ $\beta = 1$

$y = c_1 e^{0x} \cos x + c_2 \sin x$

$$\left.\begin{aligned} c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}\right\} \text{podm.}$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} : 1 = -1$$

$$c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} : 1 = \operatorname{cotg} x$$

$c_1 = \int -1.dx + A = -x + A$; $c_2 = \int \operatorname{cotg} x \, dx + B = \ln|\sin x| + B$

vš. r. $y = (-x + A.)\cos x + (\ln|\sin x| + B)\sin x$

$$y = \underbrace{A \cos x + B \sin x}_{\text{všeob. rieš.}} \underbrace{- x\cos x + \sin x \ln|\sin x|}_{y^* \text{ - part. rieš.}}$$

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = Q(x) \qquad (1)$$
$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0 \qquad (2)$$

Predp.: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ je všeob. rieš. (2) (5)
Chceme najsť vš. r. (1). Predp. že v (5) $c_1 = c_1(x) \ldots$; a že (5) je všeob. rieš. r. (1). Budeme n-krát derivovať, a pre $c_1 \ldots c_n$ si zvolíme týchto $(n-1)$ podmienok:

$$\left.\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n' &= 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + \cdots + c_n' y_n'' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' y^{(n-2)} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{keď dos., dostaneme posledná podm.}$$

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_3^{(n-1)} = Q(x)$$

c_1' ; c_2' ... neznáme.

Determ. sústavy: $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_n \\ \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$; fund. systém.

Potom: $c_1^{*} = \int \frac{D_1}{W} dx + A_1 \quad \cdots\cdots \quad c_n^{*} = \int \frac{D_n}{W} dx + A_n$ } dos. do (5) $\Downarrow$ všeob. r.

§16 Eulerove rovnice

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

$a_1 \dots a_n$ – konstanty

substitúcia: $x = e^t \quad \rightarrow t = \ln x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left[\frac{d^2y}{dt^2} \cdot e^{-t} - \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right] \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \cdot e^{-2t}$$

$$y''' = \left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right] \cdot e^{-3t}$$ / po dos. sa e vypadia:

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} y' + b_n y = 0 \quad (2)$$ / $y = y(t) \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$

riеš.: $y = e^{kt} = e^{k \ln x} = e^{\ln x^k} = x^k$

Riešenie rovnice (1) : $y = x^k$

$y' = k \cdot x^{k-1}$

$y'' = k(k-1)x^{k-2}$

$y''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$

$\cdots$

$y^{(n)} = k(k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n}$ / predp. $n < k$

dos.: $x^m k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{k-m} + \cdots + a_{m-1}x \cdot k\, x^{k-1} + a_m x^k = 0 \quad / \cdot \frac{1}{x^k}$

$$k(k-1)\cdots(k-m+1) + a_1 k(k-1)\cdots(k-m+2) + \cdots + a_{m-1}k + a_m = 0 \quad (3)$$

(3) charakteristická rovnica pre r. (1). Neznáma: k.

Napr.: $m=3$: $k(k-1)(k-2) + a_1 k\cdot(k-1) + a_2 k + a_3 = 0$

$$k^3 - 3k^2 + 2k + a_1(k^2 - k) + a_2 k + a_3 = 0 \quad \sim \text{rovn. 3. stupňa}$$

1.) Ak ch. r. (3) má reálne rôzne korene $k_1 \dots k_m$ potom všeob. rieš. (1):

$$y = c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + \cdots + c_m x^{k_m}$$

2.) Ak r. (3) má násobné korene napr. $k_1 \dots$ 3 nás. potom všeob. riel. (1):

$$y = x^{k_1}(c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x) + c_4 x^{k_4} + \cdots + c_m x^{k_m}$$

3.) Nech r. (3) má komplexne združené korene:

$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

všeob. r. (1):

$$y = x^\alpha \{c_1 \cos \beta(\ln x) + c_2 \sin \beta(\ln x)\} + c_3 x^{k_3} + \cdots c_m x^{k_m}.$$

4.) Nech $k_{1,2} = \alpha + i\beta$ je trojnásobný koreň rovn. (3); ost. reáln. rôzne

$$y = x^\alpha \{c_1 \cdot \cos\beta(\ln x) + c_2 \sin\beta(\ln x) +$$
$$+ c_3 \ln x \cdot \cos\beta(\ln x) + c_4 \ln x \cdot \sin\beta(\ln x) +$$
$$+ c_5 (\ln x)^2 \cos\beta(\ln x) + c_6 (\ln x)^2 \sin\beta(\ln x)\} + c_7 x^{k_7} + \cdots + c_m x^{k_m}.$$

Príklad: $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

$k(k-1) - 4k + 6 = 0$ ch. r.

$k^2 - 5k + 6 = 0$

$k_1 = 2$

$k_2 = 3$

vš. r. $c_1 x^2 + c_2 x^3 = y$

$y' = 2c_1 x + 3c_2 x^2$

$y'' = 2c_1 + 6xc_2$

Sk:

$2c_1x^2 + 6c_2x^3 - 8c_1x^2 - 12c_2x^3 + 6c_1x^2 + 6c_2x^3 = 0$

$0 = 0$

Pr.:
$$x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y = 0$$

Ch.r. $k(k-1)(k-2) - 3k(k-1) + 7k - 8 = 0$
$$k^3 - 3k^2 + 2k - 3k^2 + 3k + 7k - 8 = 0$$
$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$$
$$(k-2)^3 = 0$$
$k_{1,2,3} = 2$ – trojnás. reálny koreň.

VŠ.r.: $y = x^2\{c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x\}$

§17.

Sústavy dif. rovníc.

$$y' + 3y - z + 2x = 0 \quad (1)$$
$$z' + 2z + 3y + 6x = 0 \quad (2)$$
$\Big|$ $y = y(x)$, $z = z(x)$

systém 2 r. – lin.; konšt. koef.

Eliminačná metóda:

z(1): $z = y' + 3y + 2x$
$$z' = y'' + 3y' + 2$$

dos. do (2): $y'' + 3y' + 2 + 2y' + 6y + 4x + 3y + 6x = 0$
$$y'' + 5y' + 9y = (-10x - 2)e^{0x} \quad / \text{ d.r. 2-hé}$$

$$y'' + 5y' + 9y = 0$$
$$k^2 + 5k + 9 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-36}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{11}\,i}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{11}\,i}{2}$$
$$y = e^{-\frac{5}{2}x}\left\{c_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot x + c_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot x\right\} + y^*$$

$y^* = Ax + B$
$y'^* = A$
$y''^* = 0$

$5A + 9Ax + 9B = -10x + 2$
$$A = -\frac{10}{9}$$
$$B = \frac{32}{9 \cdot 9}$$

rieš.

v. r. $\quad y = e^{-\frac{5}{2}x}\left\{c_1\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right\} - \frac{10}{9}x + \frac{32}{81}$

$$z = -\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}x}\left\{c_1\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right\} + e^{-\frac{5}{2}x}\left\{-\frac{\sqrt{11}}{2}c_1\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x + \frac{\sqrt{11}}{2}c_2\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x\right\} - \frac{10}{9}\ ; +$$
$$+ 3e^{-\frac{5}{2}x}\left\{c_1\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right\} - \frac{10}{3}x + \frac{32}{27} + 2x$$

Poznámka: rieš. sme 2 d.r. 1ř; po eliminácii sme dostali 1 d.r. 2ř. Všeobecne: systém n lin. rovníc 1ř po n funkciách sa dá previesť na 1 lin. d.r. nř. Všeobecné rieš. tohto systému obsahuje n ľubov. funkcií ~~sa~~ n ľubov. konštant.

Okrem elimin. sú aj iné spôsoby, ako riešiť d. systémy. (Napr. operátorová metóda).

[Hronec: Dif. rovnice II]

Pr.: $\frac{dy}{dx} + 7y - z = 0 \quad (1) \quad / \ y = y(x)$

$\frac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0 \quad (2) \quad / \ z = z(x)$

$z = y' + 7y$

$z' = y'' + 7y'$

Dos. do (2):

$y'' + 7y' + 2y + 5y' + 35y = 0$

$y'' + 12y' + 37y = 0$

$k^2 + 12k + 37 = 0$

$k_{12} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 148}}{2} = -6 \pm i$

$y = e^{-6x}\cdot(c_1\cos x + c_2\sin x)$

$z = -6e^{-6x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-6x}(-c_1\sin x + c_2\cos x) + 7e^{-6x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$

$z = e^{-6x}(-6c_1\cos x - 6c_2\sin x - c_1\sin x + c_2\cos x + 7c_1\cos x + 7c_2\sin x)$

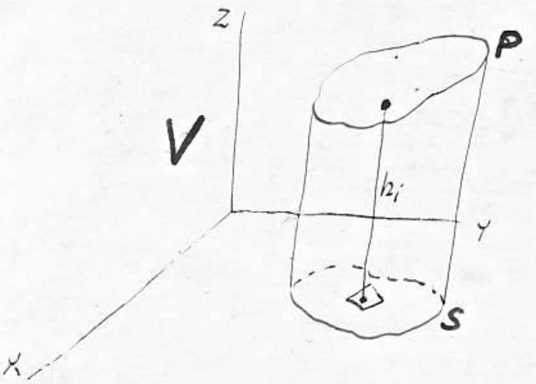
$z = e^{-6x}(c_1\cdot\cos x + c_2\cos x - 6c_2\sin x - c_1\sin x + 7c_2\sin x)$.

13. XI. 1969.

II. Dvojné integrály

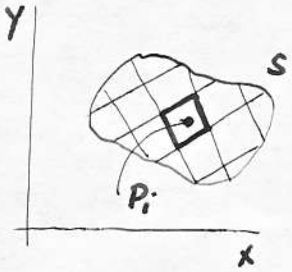
§1. Objem valcového telesa.

Odteraz budeme nazývať množinu v rovine oblasťou.



$z = f(x;y)$ $\qquad$ $f(x;y)$ je spoj. v S

P je grafom $z = f(x;y)$



$\Delta S_1 ; \Delta S_2 \dots \Delta S_n$ ~ pokrývajú oblasť S.
Žiadne 2 nemajú spoločný vnútorný bod.
Zvolme ΔS_i ; v ňom bod $P_i(\xi_i;\eta_i) \in \Delta S_i$

$$h_i = f(\xi_i;\eta_i)$$

$$V_i \doteq f(\xi_i;\eta_i).\Delta S_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i).\Delta S_i$$

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i).\Delta S_i$$

§2. Definícia dvojného integrálu.

Nech S je oblasť (s konečnou plochou) priestoru E_2 (rovina). Nech na S je def. f. $f(x;y)$. Rozdeľme S: $\Delta S_1; \Delta S_2; \dots \Delta S_n$. Nech ΔS_i pokrývajú celú oblasť S a neprekrývajú sa.

Rozdelenie nazveme D rozdelením.

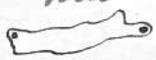
V každom ΔS_i zvolme $P_i(\xi_i;\eta_i) \in \Delta S_i$

Utvorme:
$$J(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i).\Delta S_i \qquad (1)$$

integrálny súčin v f. $f(x;y)$ pri rozdelení D.

$I(D)$ závisí od delenia (D) a od voľby P_i.

Priemer ΔS_i – nazveme najväčšiu zo vzdialeností 2 ľubov. bodov.



Norma delenia – $N(D)$ oblasti S je najväčší zo vš. priemerov čiastočných oblastí.

D1. Číslo J naz. limitou int. súčtu $I(D)$ ak k ľubov. $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$ také že pre ľubov. rozdelenie D oblasti S, pre ktoré je $N(D) < \delta$ platí nerovnosť:

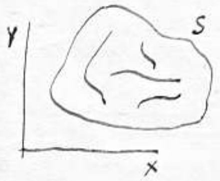
$$|I(D) - J| < \varepsilon .$$

$$\lim_{N(D)\to 0} I(D) = J \iff \lim_{N(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \vartheta_i) . \Delta S_i = J$$

Označ.: $J = \iint\limits_S f(x;y) . ds$ ~ dvojný integrál

V1. Ak $f(x;y)$ je funkcia spoj. v uzavr. oblasti S potom ex. dvojný int. cez oblasť S $f(x;y)$

V2. Ak $f(x;y)$ je ohraničená na uz. obl. S a je spoj. na S, okrem bodov nespojitosti, ktoré vyplňajú konečný počet kriviek (ktoré sú grafmi spoj. funkcií tvaru: $y = \varphi(x)$; $x = \psi(y)$). – čiast. spoj.



Dvojný integrál má tieto vlastnosti: (8)

1.) Dvojný i. - nezávisí od označ. premenných v podintegrálnych funkciách. $\iint\limits_S f(x;y)\,ds = \iint\limits_S f(t;z)\,ds$

2.) D. i cez S. : $\iint\limits_S k\, f(x;y)\,ds = k \iint\limits_S f(x;y)\,ds$ k - konštanta

3.) $\iint\limits_S \{f(x;y) \pm g(x;y)\}\,ds = \iint\limits_S f(x;y)\,ds \pm \iint\limits_S g(x;y)\,ds$

4.) Nech $S = S_1 \cup S_2$ Potom:

$$\iint\limits_S f(x;y)\,ds = \iint\limits_{S_1} f(x;y)\,ds + \iint\limits_{S_2} f(x;y)\,ds$$

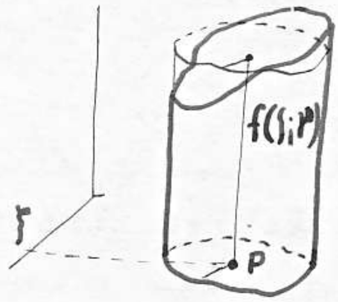
5.) Ak na celej oblasti S je $f(x;y) \geq 0$ potom $\iint\limits_S f(x;y)\,ds \geq 0$

6.) Ak na celej obl. je $f(x;y) \leq g(x;y)$ potom aj $\iint\limits_S f(x;y)\,ds \leq \iint\limits_S g(x;y)\,ds$

7.) $\left| \iint\limits_S f(x;y)\,ds \right| \leq \iint\limits_S |f(x;y)|\,ds$. 8.) $\iint\limits_S ds = S$

V3. (veta o strednej hodnote)

nech $f(x;y)$ je spoj. na uzavr. obl. S. Potom v S ex. $P(\xi;\eta)$ že $\iint\limits_S f(x;y)\,ds = f(\xi;\eta).S$



Dôkaz: m – minimum $f(x;y)$ pre $(x;y)\in S$

M – maximum $f(x;y)$ keď $(x;y)\in S$

$$m \leq f(x;y) \leq M$$

$$\iint\limits_S m.\,ds \leq \iint\limits_S f(x;y)\,ds \leq \iint\limits_S M\,ds \qquad /6.\ vl.$$

$$m.\iint\limits_S ds \leq \iint\limits_S f(x;y)\,ds \leq M\iint\limits_S ds \qquad /2\ vl$$

$$mS \leq \iint\limits_S f(x;y)\,ds \leq M.S \qquad /\cdot\frac{1}{S} \qquad /vl.\ 8$$

$$m \leq \underbrace{\frac{\iint\limits_S f(x;y)\,ds}{S}}_{f(\xi;\eta)} \leq M \quad \Big\} \quad \iint\limits_S f(x;y)\,ds = f(\xi;\eta).S$$

§3. Vyčíslenie dvojného integrálu.

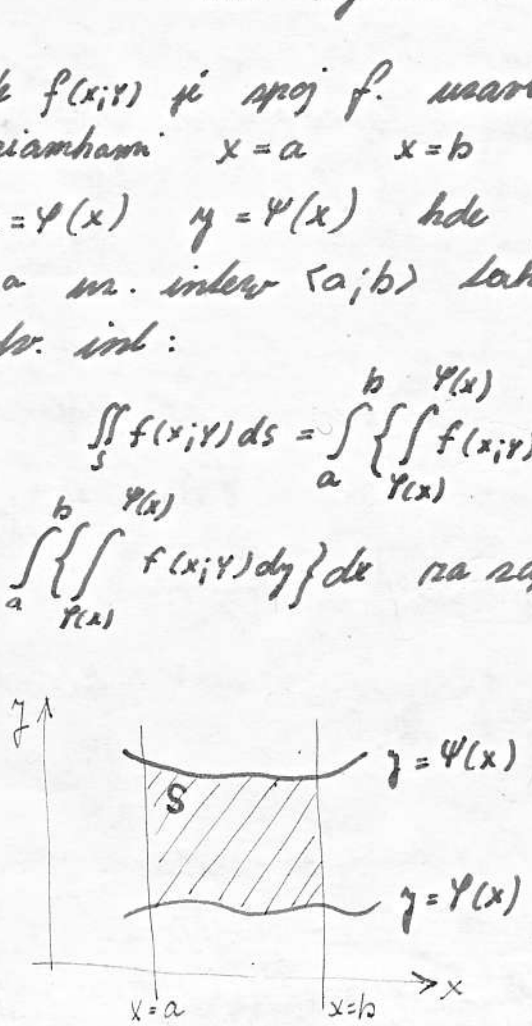
V1. Ak $f(x;y)$ je spoj. f. uzavretej oblasti S ohraničenej priamkami $x=a$ $x=b$ $(a<b)$ a krivkami $y=\varphi(x)$ $y=\psi(x)$ kde f. $\varphi(x)$; $\psi(x)$ sú spoj. na uz. interv. $\langle a;b\rangle$ takej že $\varphi(x)\leq\psi(x)$ na $\langle a;b\rangle$.

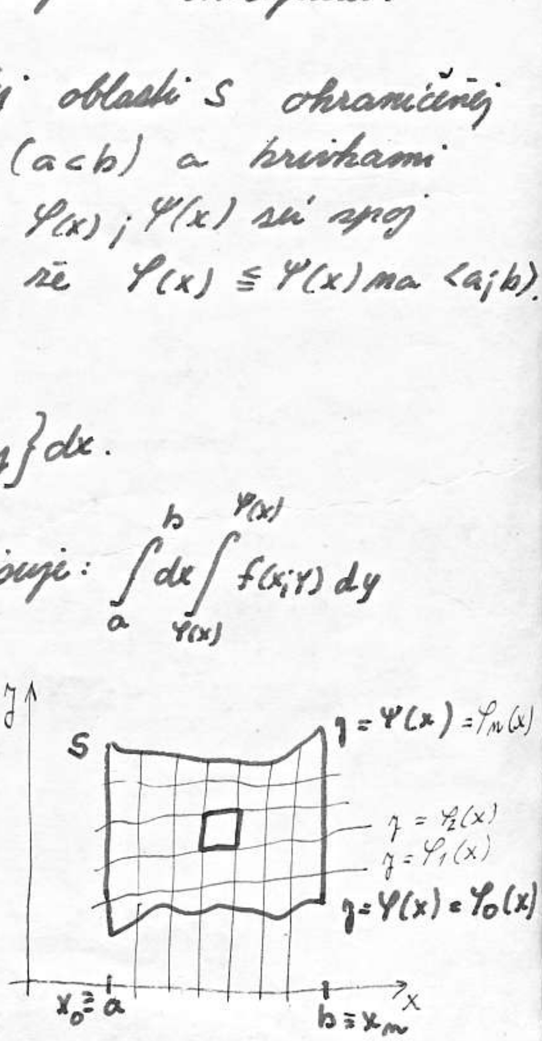
Potom dv. int.:

$$\iint\limits_S f(x;y)\,ds = \int_a^b\Big\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy\Big\}dx.$$

Pozn.: $\int_a^b\Big\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy\Big\}dx$ sa zapisuje: $\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy$

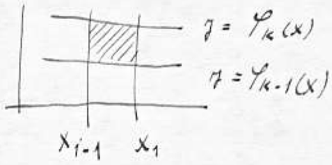
Dôkaz





$$\left.\begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b \\ \varphi(x) = \varphi_0(x) < \varphi_1(x) \cdots < \varphi_m(x) = \psi(x) \end{array}\right\} \text{rozdelíme } S.$$

Vyberieme ΔS_{ik} $\left\{ \begin{array}{l} x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \varphi_{k-1}(x) \leq y \leq \varphi_k(x) \end{array} \right.$



$$m_{ik} = \min f(x;y) \qquad (x;y) \in \Delta S_{ik}$$

$$M_{ik} = \max f(x;y) \qquad (x;y) \in \Delta S_{ik}$$

Potom pre ΔS_{ik} platí:

$$m_{ik} \leq f(x;y) \leq M_{ik} \quad \Big/ \text{integr. podľa } y \text{ v intervale } \langle \varphi_{k-1}(x) ; \varphi_k(x) \rangle$$

$$\int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)} m_{ik}\, dy \leq \int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)} f(x;y)\, dy \leq \int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)} M_{ik} \cdot dy$$

$$m_{ik}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] \leq \int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)} f(x;y)\, dy \leq M_{ik}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$$

Nerovnosť int. podľa x v $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} m_{ik}\left[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)\right] dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ \int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)} f(x;y)\, dy \right\} dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} M_{ik}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]\, dx$$

$$m_{ik} \cdot \Delta S_{ik} \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ \int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)} f(x;y)\, dy \right\} dx \leq M_{ik} \cdot \Delta S_{ik} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 0,1 \cdots m \\ i = 0,1 \cdots n \end{array}\right\} \text{ sčítame najprv pre } k:$$

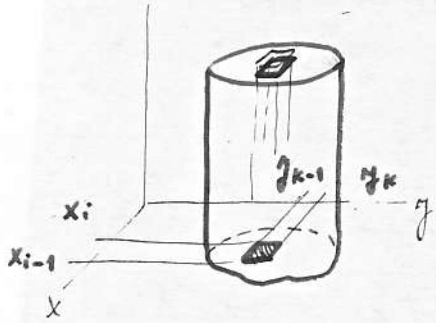
$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, \Delta S_{ik} \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Bigg\{ \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \int_{\varphi_{k-1}(x)}^{\varphi_k(x)} f(x;y)\, dy}_{\int_{\varphi_0(x) = \varphi(x)}^{\varphi_m(x) = \psi(x)} f(x;y)\, dy} \Bigg\} dx \leq \sum_{k=1}^{m} M_{ik} \cdot \Delta S_{ik}$$

$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, \Delta S_{ik} \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\, dy \right\} dx \leq \sum_{k=1}^{m} M_{ik} \cdot \Delta S_{ik} \quad \Big/ \text{ sčítať pre } i = 1,2,\dots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, \Delta S_{ik} \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cdot \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\, dy \right\} dx \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_{ik} \cdot \Delta S_{ik}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, \Delta S_{ik} \leq \int_{a}^{b} \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\, dy \right\} dx \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} M_{ik} \cdot \Delta S_{ik}$$

→



ΔS_{ik}

$$m_{ik} \cdot \Delta S_{ik} \quad (\sim \text{vpísaný hranol}) \leq f(\xi_i; \vartheta_k) \cdot \Delta S_{ik}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} m_{ik} \cdot \Delta S_{ik} \leq \sum_i \sum_k f(\xi_i; \vartheta_k) \cdot \Delta S_{ik} \leq \sum \sum M_i \cdot \Delta S_{ik}$$

$$\underline{S}(D) \leq \quad \mathcal{J}(D) \quad \leq \bar{S}(D)$$

Podľa predp. f $f(x;y)$ je spoj.; potom podľa V1 z nej ex. dvojný integrál $\rightarrow \lim\limits_{N(D)\to 0} \underline{S}(D) = \lim\limits_{N(D)\to 0} \bar{S}(D) =$ integrál.

Poznámka: ak vo dv. int. v podintegr. funkcie vystupujú premenné $(x;y)$ potom dv. i. zapisujeme:

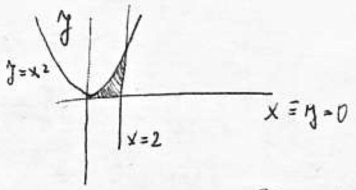
$$\iint_S f(x;y)\, dS = \iint_S f(x;y)\, dx\, dy$$

Poznámka: $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\, dy$ naz. dvojnásobným integrálom.

[dvojný int. prevedieme na dvojnásobný, to vyčíslime]

$\Longrightarrow$ V2

Príklad: $\iint_S (x-y)\, dx\, dy \qquad y=0 \quad y=x^2 \quad x=2$

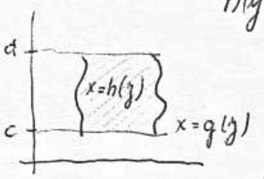


$$S \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

$$\iint_S (x-y)\, dy\, dx = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x-y)\, dy = \int_0^2 \left\{ x.y - \frac{y^2}{2} \right\}_0^{x^2} dx = \int_0^2 \left\{ x.x^2 - \frac{x^4}{2} - x.0 + \frac{0^2}{2} \right\} dx$$

$$= \int_0^2 \left\{ x^3 - \frac{x^4}{2} \right\} dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^2 = \frac{16}{4} - \frac{32}{10} = 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

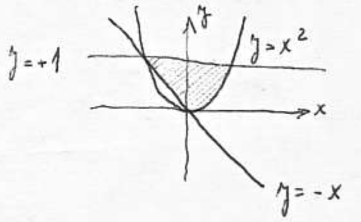
V2. Nech f $f(x;y)$ je spoj. v uzavr. obl. S, ktorá je ohran. priamkami: $y=c$ $y=d$ $(c<d)$ a krivkami $x=h(y)$ $x=g(y)$ kde $h(y)\leq g(y)$ $h(y)$; $g(y)$ sú spoj. na $\langle c;d\rangle$. Potom:



$$\iint_S f(x;y)\,dx\cdot dy = \int_c^d \left\{\int_{h(y)}^{g(y)} f(x;y)\,dx\right\} dy = \int_c^d dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x;y)\,dx$$

[vymenila sa x; y]

Pr.: $\iint_S (2x-3y)\,dx\,dy$ $\quad S\{\ y=-x \quad y=1 \quad y=x^2\ \}$



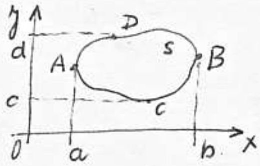
$$S\begin{cases} 0\leq y\leq 1 \\ -y\leq x\leq \sqrt{y} \end{cases}$$

$$\iint_S (2x-3y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} (2x-3y)\,dx = \int_0^1 \left\{x^2-3yx\right\}_{-y}^{\sqrt{y}} dy =$$

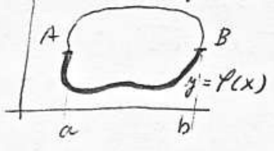
$$= \int_0^1 \left(y-3y\sqrt{y}-y^2-3y\cdot y\right) dy = \int_0^1 \left(y-3y^{3/2}-4y^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{6}{5}-\frac{4}{3} = \frac{15-36-40}{30} = \frac{61}{30};$$

Poznámka: Nech $f(x;y)$ je spoj. na nasled. oblasti:

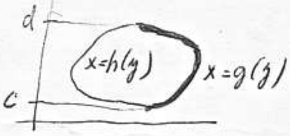


Podľa V1



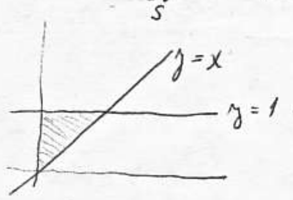
$$\iint_S f(x;y)\,dx;dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;y)\,dy$$

Podľa V2



$$\iint_S f(x;y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x;y)\,dx$$

Príklad: $\iint_S e^{-y^2}\,dx\,dy$ $\quad$ Sohr. $y=x$ $\quad y=1$ $\quad x=0$



Podľa V1: $S\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x\leq y\leq 1 \end{cases}$

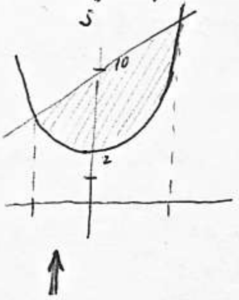
$$\iint_S e^{-y^2}dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy \quad \int_0^1 \left\{\underbrace{\int_x^1 e^{-y^2} dy}\right\} dx \quad \text{neriešiteľný}$$

Podľa V2: $S\begin{cases} 0\leq y\leq 1 \\ 0\leq x\leq y \end{cases}$

$$\iint_S e^{-y^2}dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2}dx = \int_0^1 \left\{\int_0^y e^{-y^2}dx\right\} dy = \int_0^1 \left\{x.e^{-y^2}\right\}_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 \left[y e^{-y^2} dy\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Př. $\iint\limits_S (\lg x - 3^y)\,dx\,dy$ $y = x^2+2$, $y = x+10$



$$x^2+2 = x+10$$

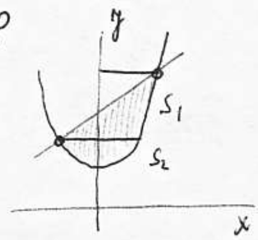
$$x^2 - x - 8 = 0 \quad \longrightarrow \quad x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{2} = \dots \left\langle \begin{matrix} 1{,}9 \\ -1{,}4 \end{matrix} \right.$$

$$S: \begin{cases} -1{,}4 \leq x \leq 1{,}9 \\ x^2+2 \leq y \leq x+10 \end{cases}$$

$$\iint\limits_S (\lg x - 3^y)\,dx\,dy = \int_{-1,4}^{1,9} dx \int_{x^2+2}^{x+10} (\lg x - 3^y)\,dy = \int_{-1,4}^{1,9} \left\{ y \lg x - \frac{3^y}{\ln 3} \right\}_{x^2+2}^{x+10} dx =$$

$$= \int_{-1,4}^{1,9} \left\{ (x+10)\cdot \lg x - \frac{3^{x+10}}{\ln 3} - (x^2+2)\lg x + \frac{3^{x^2+2}}{\ln 3} \right\} dx \qquad \int 3^{x^2} \text{ – neriešiteľný}$$

Podľa V2



$$y = x^2+2$$
$$y = x+10 \rightarrow x = y-10 \quad \Big| \quad y = (y^2 - 20y + 100) + 2$$

$$y = y^2 - 20y + 102$$

$$y^2 - 21y + 102 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 408}}{2} \approx \left\langle \begin{matrix} 11 \\ 9 \end{matrix} \right.$$

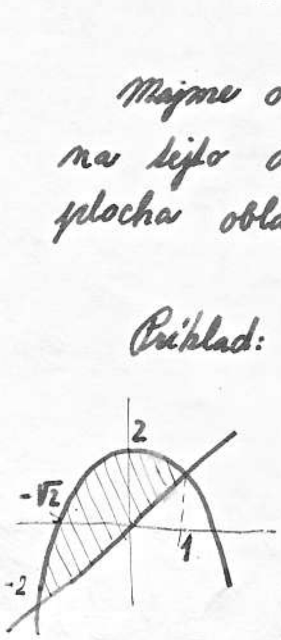
$$S_1 \begin{cases} 9 \leq y \leq 11 \\ y-10 \leq x \leq \sqrt{y-2} \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} 2 \leq y \leq 9 \\ -\sqrt{y-2} \leq x \leq \sqrt{y-2} \end{cases} \qquad \dots\dots$$

§4. Geometrické aplik. dvojného int. 20. XI. 1969. *

1. Majme oblasť uzavretú S a na nej def. f. $f(x;y) \geq 0$., spoj. na tejto oblasti. Potom na zákl. vlastnosti 8 v 2.§ $\Rightarrow$, že plocha oblasti S je $P = \iint\limits_S dx\,dy$

Príklad: Vyp. obsah rov. útvaru ohran.: $y = 2 - x^2$; $y = x$



$$2 - x^2 = x$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

$$S \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2 - x^2 \end{cases}$$

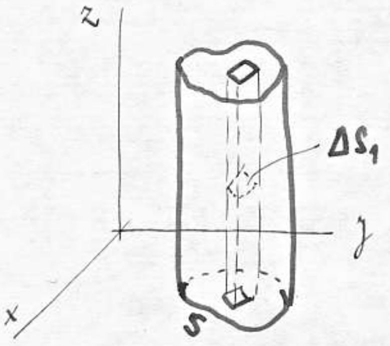
$$P = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy = \int_{-2}^{1} [y]_x^{2-x^2} dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

11. Objem telesa:

Nech na uzavr. oblasti S je def. funkcia $f(x;y) \geq 0$ a spoj. na S.
Vypočítame objem, ktorý je ohraničený:

$z = f(x;y)$; S ; priamkou $\parallel z$;



$S \rightarrow \Delta S_1 ; \Delta S_2 \ldots\ldots \Delta S_n$

D .. (delenie D)

$\Delta V_i = \Delta S_i \cdot f(\xi_i ; \eta_i)$

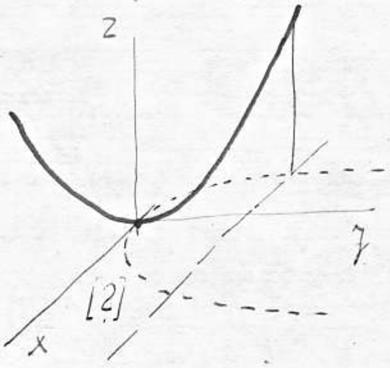
$m_i \cdot \Delta S_i \leq \Delta S_i \cdot f(\xi_i ; \eta_i) \leq M_i \cdot \Delta S_i \quad \Big/ \sum_{i=1}^{n}$

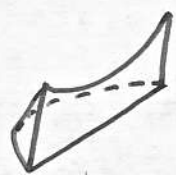
$\underline{S}(D) \leq J(D) \leq \bar{S}(D)$

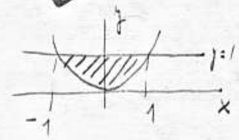
Ak $N(D) \rightarrow 0$:

$$\lim \underline{S}(D) = \lim \bar{S}(D) = \lim J(D) = \iint_S f(x;y)\, dx\, dy$$

Pr: Nájsť objem telesa ohran. plochami: $y = x^2$ $y = 1$ $z = 0$ $z = x^2 + y^2$





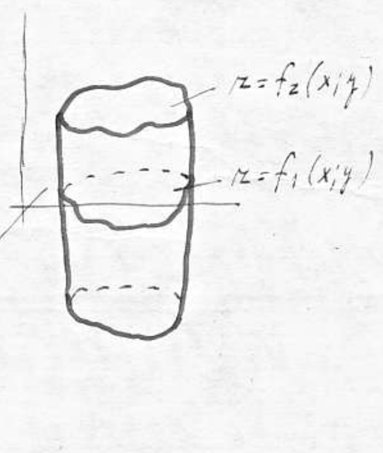


$S \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$V = \iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 2\int_0^1 dx \cdot \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)\, dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{1} dx = 2\int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right] dx = \ldots$$

Objem telesa V, ktorý je ohraničené z hora plochou $z = f_2(x;y)$ a z dola $z_1 = f_1(x;y)$; $f_2(x;y) \geq f_1(x;y)$ na S



$V_2 = \iint_S f_2(x;y) \cdot dx \cdot dy$

$V_1 = \iint_S f_1(x;y)\, dx \cdot dy$

$V = V_2 - V_1 = \iint_S [f_2(x;y) - f_1(x;y)]\, dx \cdot dy$

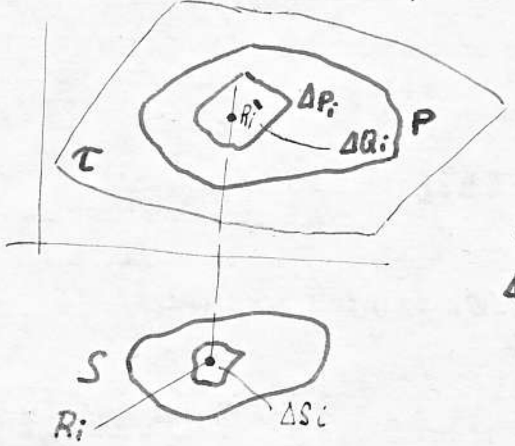
→

III. **Plošný obsah zakrivenej plochy**

Majme v rovine nejakú uzavr. oblasť S a na nej def. spoj. fc. $f(x;y)$; a nech má spoj. parc. der. $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$;
a rovnicou $z = f(x;y)$ — je daná určitá zakrivená plocha P.

Zvolme D: ΔS_1 ; ΔS_2 .... ΔS_n ;
Vyberme ΔS_i ; bod $R_i \in \Delta S_i$; $i = 1, 2, \dots n$

ΔP_i na P $\quad R_i \rightarrow R_i' \in \Delta P_i$



K R_i' zostroj. dotykovú rovinu k ploche P; je to τ. Premietneme pom. $\parallel$ s osou z. ΔS_i do τ — priemet ΔQ_i

Pre malé ΔS_i : $\Delta Q_i \doteq \Delta P_i$

$\Delta S_i = \Delta Q_i \cdot \cos\alpha$ — kde α uhol medzi τ a rovinou $(x;y)$
Ak zostrojíme normálu na τ (n) v bode R_i' ; potom uhol α je aj medzi „n" a osou $\underline{z}$.

$\bar{a}$; $\bar{b}$; $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a\cdot b}$

Rovnica dot. rov τ:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) - z.(z_0) = 0$$

Pre bod $R_i(x_0; y_0; z_0)$

$\bar{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right)$ ~ vektor normály.

vektor vo smere osi z: $\bar{k}(0;0;1)$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right)\cdot(0;0;1)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

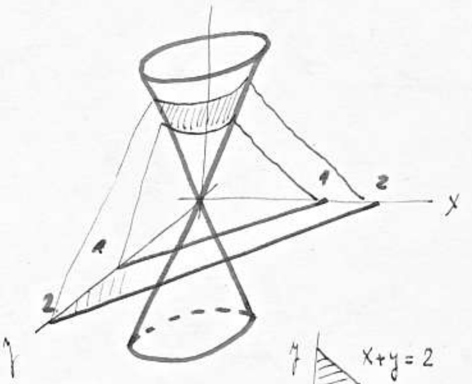
$$\Delta Q = \frac{\Delta S_i}{\cos\alpha} = -\Delta S_i \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \doteq \Delta P_i$$

$$P \doteq \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

ak $N(D) \to 0$:

$$P=\iint_S \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,.dx.dy$$

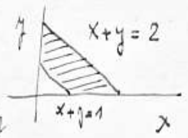
Pr: Vyp. plochu vyťatú z plochy: $z^2=x^2+y^2$ s rovnicami $x=0;\ y=0;\ x+y=2$
$x+y=1$



$$z=\sqrt{x^2+y^2}=f(x;y) \qquad x+y=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}=\sqrt{2}$$



priemet plochy do $(x\,y)$

$$P=\iint_S \sqrt{2}\,dx\,;dy=\iint_{S_2}\sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$S_2\begin{cases}0\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq 2-x\end{cases} \qquad \iint_{S_1}\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}.2-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$S_1\begin{cases}0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 1-x\end{cases}$$

$$\sqrt{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy=\sqrt{2}\int_0^2[2-x]\,dx=\sqrt{2}\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\sqrt{2}[4-2]=2.\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\int_0^1(1-x)\,dx=\sqrt{2}\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pozn. :

Analogicky platia tieto vzťahy:

$$P=\iint_\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+1}\,.dx.dz \qquad /\ \sigma \text{ je oblasť v rov } (x;z)$$
$$y=f(x;z)$$

$$P=\iint_\tau \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,.dy.dz \qquad /\ \tau \text{ je obl. roviny } (y;z)$$
$$x=f(y;z)$$

§5. Niektoré fyzikálne aplikácie dvojného integrálu.

S_x – statický moment homog. dosky vzhľadom na os x
S_y —— // —— os y

I_x – moment zotrvačnosti tejto dosky k osi x
I_y —— // —— k osi y

x_T ; y_T – súradnice ťažiska ; m – hmotnosť ; $\mu^{(x;y)}$ – hustota

$$S_x = \iint_S y \cdot \mu(x;y) \cdot dx \cdot dy \qquad S_y = \iint_S x \cdot \mu(x;y) \cdot dx \cdot dy$$

$$I_x = \iint_S y^2 \cdot \mu(x;y) \cdot dx \cdot dy \qquad I_y = \iint_S x^2 \cdot \mu(x;y) \cdot dx \cdot dy$$

$$m = \iint_S \mu(x;y) \cdot dx \cdot dy \qquad x_T = \frac{S_y}{m} \qquad y_T = \frac{S_x}{m}$$

§6. Transformácia dvojného integrálu.

Majme v rovine $(x;y)$ nejakú oblasť O a na nej def. f. $f(x;y)$. Dvojný integrál cez túto oblasť O : $\iint_S f(x;y)\, dx \cdot dy$.

Nech v rovine $(x;y)$ sú dané nové súradnice ξ a τ (môžu byť aj polárne).

Chceme prepísať tento integrál pom. súradníc ξ ; τ.

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(\xi;\tau) \\ y &= \psi(\xi;\tau) \end{aligned}\right\}$$ transformačné rovnice, ktoré nám zobrazujú oblasť O na O'.

Predp. : f. φ a ψ sú spojité a majú sp. parc. der.

Označme: $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} ; & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} ; & \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \end{vmatrix} \neq 0$$ ... Jacobi-ho determinant.

Veta: Nech $f(x;y)$ je spojitá v oblasti O a nech $\frac{\partial x}{\partial \xi}$; $\frac{\partial x}{\partial \tau}$; $\frac{\partial y}{\partial \xi}$; $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ sú spojité a nech $J \neq 0$. Potom:

$$\iint_O f(x;y)\, dx \cdot dy = \iint_{O'} f[\varphi(\xi;\tau) ; \psi(\xi;\tau)] \cdot |J| \cdot d\xi \cdot d\tau$$

Transformácia dvojn. int. do polárnych súradníc:

$x = \rho \cdot \cos\varphi$ / $0 \le \rho < +\infty$

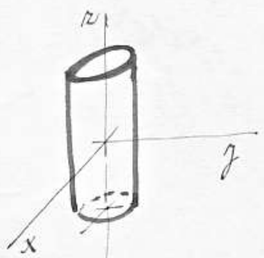
$y = \rho \cdot \sin\varphi$ / $0 \le \varphi < 2\pi$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \rho\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cdot\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

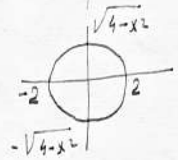
$$\iint_D f(x;y)\cdot dx\cdot dy = \iint_{D'} f[\rho\cdot\cos\varphi;\ \rho\cdot\sin\varphi]\cdot\rho\cdot d\varphi\cdot d\rho$$

Pr.: Máme vyp. objem telesa ohran. s rovn.:

$x^2+y^2=4 \qquad z=0 \qquad z=2x+3y+4$



$$V = \iint_S (2x+3y+4)\cdot dx\cdot dy = \int_{-2}^{2} dx \cdot \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (2x+3y+4)\, dy$$



Akonáhle je oblasť kruh, prepočítame na polárne súradnice:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^2 [2\rho\cdot\cos\varphi + 3\cdot\rho\cdot\sin\varphi + 4]\cdot\rho\cdot d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\tfrac{2}{3}\rho^3\cos\varphi + \rho^3\sin\varphi + 2\rho^2]\, d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} [\tfrac{16}{3}\cos\varphi + 8\sin\varphi + 8]\, d\varphi = 4[\tfrac{16}{3}\sin\varphi - 8\cos\varphi + 8\varphi]_0^{\pi/2} = \underline{4\left(\tfrac{16}{3} + 4\pi + 8\right)}.$$

Niekedy sa použ. tieto súradnice:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\xi \\ y &= b\cdot\eta \end{aligned}\right\}$$ čo znamená zmenu meradla na osi x a y.

Keď predp.: $a>0$, $b<0$: $\qquad J' = \begin{vmatrix} a\,;0 \\ 0\,;b \end{vmatrix} = a.b$

Pr: Vyp. plochu elipsy: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ / Transf. vz.: $x = 3\xi$, $y = 4\eta$

Dosad. do vz. elipsy: $\xi^2 + \eta^2 = 1$

$$P = 4\int_0^1 d\xi \cdot \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \boxed{12}\, d\eta = 48\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\cdot d\xi = 48\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 48\,\frac{\pi}{4} = \underline{12\pi}.$$

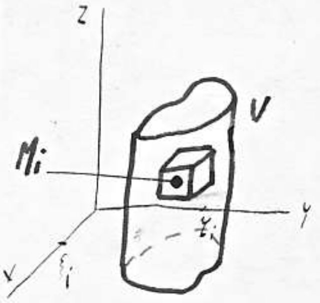
$\xi = \sin\varphi$

27. XI. 1969.

III. Trojný integrál

1§. Def. a zákl. vlastnosti.

Majme v priest. oblasť V a nech na tejto obl. je def. f. $f(x;y;z)$. Nech obl. V má konečný objem a kon. povrch.
Zvolíme delenie D. $V \to \Delta V_1 ; \Delta V_2 \dots \Delta V_n$



na ΔV_i zvol. $M_i(\xi_i ; \eta_i ; \zeta_i)$

utvorme $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i \; \eta_i \; \zeta_i) . \Delta V_i = J(D)$ int. súčet pre delení D z f. $f(x;y;z)$

$\Delta V_i = \Delta x_i . \Delta y_i . \Delta z_i \rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i ; \eta_i ; \zeta_i) . \Delta x_i . \Delta y_i . \Delta z_i = J(D)$$

ak $N(D) \to 0$ .... $\lim_{N(D)\to 0} J(D) = \iiint_V f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz$

V1. Nech f. $f(x;y;z)$ je spoj. na uzavr. obl. V ; potom trojný integrál z $f(x;y;z)$ existuje.

Vlastnosti trojn. int. :

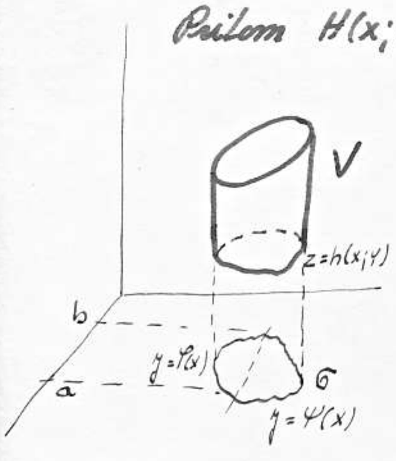
1. Tr. i. nezávisí od znač. premenných v podintegrál. nej funkcii: $\iiint_V f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V f(t;w;\rho)\, dt\, dw\, d\rho$
2. $\iiint k\, f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz = k \iiint_V f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz$
3. $\iiint_V \{f(x;y;z) \pm g(x;y;z)\}\, dx\, dy\, dz = \iiint_V f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz \pm \iiint_V g(x;y..)$
4. Nech $V = V_1 \cup V_2$

   $\iiint_V f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V_1} f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{V_2} \dots$ ~~$+ \iiint_{V_3}$~~
5. ak $f(x;y;z) \geq 0$ na celej V, potom $\iiint_V f(x;y \dots) \dots \geq 0$
6. ak na celej V $f(x;y;z) \geq g(x;y;z)$ potom:

   $$\iiint_V f(x;y;z) \geq \iiint_V g(x;y;z)$$
7. $\left| \iiint_V f(x;y;z)\, dx\, dy\, dz \right| \leq \iiint_V |f(x;y;z)|\, dx\, dy\, dz$
8. $\iiint_V dx\, dy\, dz =$ objem oblasti V $\sim$ geom. aplikácia

2 §. Vyčíslenie tr. int.

Nech $f(x;y;z)$ je spoj. f. na uzavr. obl. V; danej takto:
zhora ohran. plochou $z = H(x;y)$
zdola $z = h(x;y)$; zo strán valcovou plochou $\parallel z$.
Pritom $H(x;y) \geqq h(x;y)$ sú spoj.



$$\iiint_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma \left\{ \int_{h(x;y)}^{H(x;y)} f(x;y;z)\,dz \right\} dx\,dy =$$

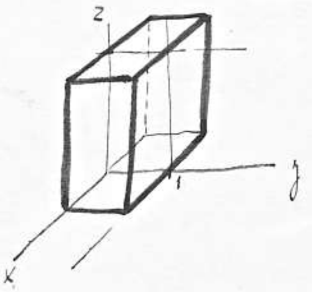
$$\iint_\sigma dx\,dy \cdot \int_{h(x;y)}^{H(x;y)} f(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x;y)}^{H(x;y)} f(x;y;z)\,dz \sim \text{trojnásobný int.}$$

$$V \begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x) \\ h(x;y) \leqq z \leqq H(x;y) \end{cases}$$

Pr. Vyp. trojný int.: $\iiint_V (x+y-z)\,dx\,dy\,dz$; V je ohran.: $x=-1$ $y=1$ $x=1$ $z=0$ $y=0$ $z=2$

$$V \begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 \leqq z \leqq 2 \end{cases}$$



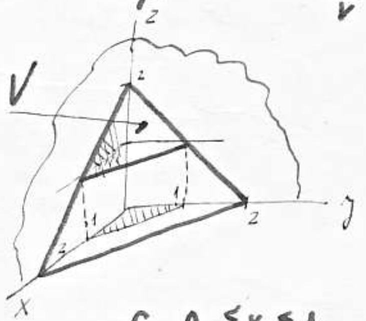
$$\iiint_V (x+y-z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{+1} dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y-z)\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 dy \left[xz + zy - \frac{z^2}{2} \right]_0^2 = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 \{2x + 2y - 2\}\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \{2xy + y^2 - 2y\}_0^1\,dx = \int_{-1}^{1} [2x + 1 - 2]\,dx = [x^2 - x]_{-1}^{+1} = 1 - 1 - 1 - 1$$

$$\iiint_V = -2$$

Pr. Vyp.: $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$ V: $x+y+z=2$; $z=1$; $x=0$; $y=0$



alg: $x+y+1 = 2 \to x+y = 1$

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} x\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{-(x-1)} [xz]_1^{2-x-y}\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{-(x-1)} [x(2-x-y) - 1(x)]\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \{-x^2 - yx + x\}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{y^2 x}{2} + yx \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left\{ -(1-x)x^2 - \frac{(1-x)^2}{2}x + x(1-x) \right\} dx =$$

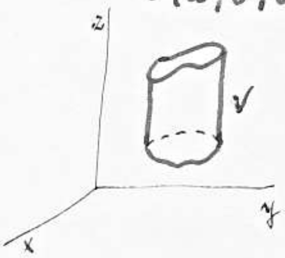
$$= \int_0^1 \left[-x^2 + x^3 + x - x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_1 dx =$$

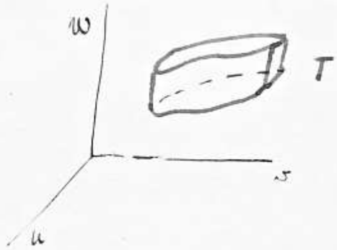
$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$V \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq -(x-1) \\ 1 \leqq z \leqq 2 - x - y \end{cases}$$

3. § Transformácia trojného integrálu

Nech f. $f(x;y;z)$ je spoj. na uzavr. obl. V ; a nech f. $\xi(u;v;w)$, $\eta(u;v;w)$ a $\zeta(u;v;w)$ majú spoj. parc. der. 1^{v}.





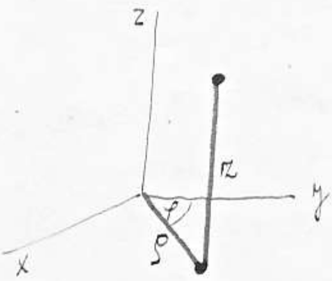
Nemusí byť nutne pravouhlý s. s.

Nech $x=\xi(u;v;w)$, $y=\eta(u;v;w)$, $z=\zeta(u;v;w)$ sú transf. rovnice ktoré zobrazujú obl. V na oblasť T.

Potem $\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T f[\xi(u;v;w);\eta(u;v;w);\zeta(u;v;w)]\cdot|J|\cdot du\,dv\,dw$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$$

1. Transf. trojn. int. do valcových súradníc.



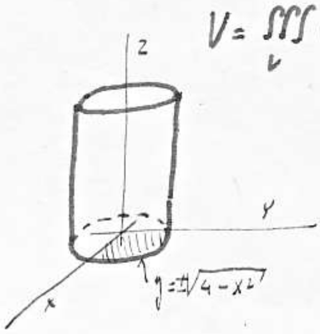
$A(\rho;\varphi;z)$ $\quad 0\le\rho<+\infty \quad x=\rho\cos\varphi$
$A(x;y;z)$ $\quad 0\le\varphi\le 2\pi \quad y=\rho\sin\varphi$
$\quad -\infty\le z\le\infty \quad z=z$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho$$

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T f[\rho.\cos\varphi;\rho.\sin\varphi;z]\cdot\rho\cdot d\rho.d\varphi.dz$$

Pr. Vyp. objem telesa ohr. rovinami: $x^2+y^2=4$ $\quad z=0$; $z=10$

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{\ }}^{+\sqrt{\ }}dy\int_0^{10}dz$$

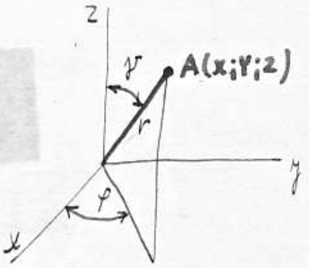


$$V\begin{cases}-2\le x\le +2\\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\\ 0\le z\le 10\end{cases}\qquad T\begin{cases}0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le 2\\ 0\le z\le 10\end{cases}$$

$$V=\iiint\limits_T = 4\int_0^{\pi/2}d\varphi.\int_0^2 d\rho.\int_0^{10}\rho.dz = 4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2[\rho z]_0^{10}d\rho = 4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2[10\rho]d\rho =$$

$$=40\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho = 40\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^2}{2}d\varphi\right]_0^2 = 80\int_0^{\pi/2}d\varphi = \underline{40\pi}.$$

11. Transf. trojn. int. do sférických súradníc.



$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta$$
$$0 \leq \vartheta \leq \pi \qquad y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta$$
$$0 \leq r \leq +\infty \qquad z = r\cdot\cos\vartheta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\vartheta \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \end{vmatrix} - r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}}_{-1}\cos\vartheta - r^2\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}}_{1} =$$

$$= -r^2\sin\vartheta\cdot\cos^2\vartheta - r^2\sin^3\vartheta = -r^2\sin\vartheta\cdot(1-\sin^2\vartheta) - r^2\sin^3\vartheta =$$

$$= -r^2\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta - r^2\sin^3\vartheta = -r^2\sin\vartheta;$$

$$|J| = r^2\sin\vartheta \qquad / \sin \text{ od } 0 \to \pi \text{ je vždy kladný.}$$

$$\iiint_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f\{r\cos\varphi\cdot\sin\vartheta;\ r\sin\varphi\sin\vartheta;\ r\cdot\cos\vartheta\}\cdot r^2\sin\vartheta\cdot d\varphi\,d\vartheta\,dr.$$

Pr. Objem gule:

$$T\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq R \end{cases} \qquad T'\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

$$\iiint_T r^2\sin\vartheta\cdot d\varphi\cdot d\vartheta\cdot dr = 8\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^R r^2\sin\vartheta\,dr =$$
$$= 8\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\sin\vartheta\right]_0^R d\vartheta = \frac{R^3 8}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,d\vartheta =$$
$$= \frac{8R^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \frac{8R^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{8}{3}R^3\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}R^3\pi}}$$

Poznámka: Z fyzikálnych aplik. trojn. int. vyberáme tieto:

$S_{xy} = \iiint_V z\,\mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ — stat. moment ~~tel.~~ oblasti V vzhľ. k $(x;y)$

$S_{xz} = \iiint_V y\,\mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ — " — $(x;z)$

$S_{yz} = \iiint_V x\,\mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ — " — $(y;z)$

$J_x = \iiint_V (y^2+z^2)\,\mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ moment zotrv. obl. V vzhľ. k x

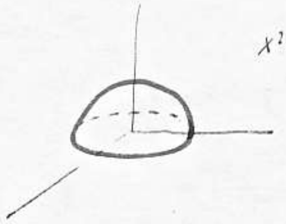
$J_y = \iiint_V (x^2+z^2)\,\mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ — " — y

$J_z = \iiint_V (x^2+y^2)\,\mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ — " — z

$m = \iiint_V \mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ — hmota oblasti V s hustotou $\mu(x;y;z)$

$x_T = \frac{S_{yz}}{m}$ $y_T = \frac{S_{xz}}{m}$ $z_T = \frac{S_{xy}}{m}$

Pr. Je daná pologuľa so stredom v počiatku, ležiaca na rov. $x;y$ o polom. $\underline{a}$. Jej hustota $= 1$. Vyp. súr. ťažiska polgule.



$x^2+y^2+z^2=a^2$

$z=\sqrt{a^2-y^2-x^2}$

$\mu(x;y;z)=1$

$$S_{xy} = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint_T \cdots = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cdot \int_0^a r\cdot\cos\vartheta\cdot(r^2\sin\vartheta)\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^a r^3 \sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\right]_0^a d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a^4}{8}\cdot 2\pi = \frac{\pi a^4}{4}$$

$$S_{yz} = \iiint_V x\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$S_{yx} = 0$$

$m = \iiint_V dx\,dy\,dz$ / $\mu = 1$

$$m = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cdot \int_0^a r^2 \sin\vartheta\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\sin\vartheta\right]_0^a d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3}\sin\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\,[-\cos\vartheta]_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3$$

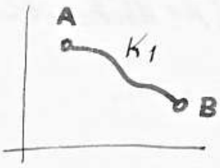
$x_T = 0$ $y_T = 0$ $z_T = \frac{3\pi a^4}{8\pi a^3} = \frac{3}{8}a$

$\boxed{J_x \text{ na 31. str. hore.}}$

IV. Krivkový integrál

1§. Kr. i. prvého druhu

Majme interval v rov ⟨α; β⟩ ; sú dané f $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$ — sú spoj. a majú spoj. deriv. 1r.

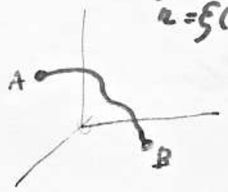


$A[\varphi(\alpha);\psi(\alpha)]$
$B[\varphi(\beta);\psi(\beta)]$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot x^2_{(t)}+\dot y^2_{(t)}}\,dt$$ ~ dĺžka $\widehat{AB}$.

Ak ex. integrál s — krivka K je rektifikácie-schopná.

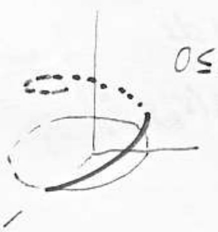
K: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\xi(t)$ $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$, A pre α, B pre β



predp. $\varphi(t)$ $\psi(t)$ $\xi(t)$ spoj der. 1r.

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)+\dot z^2(t)}\,dt$$

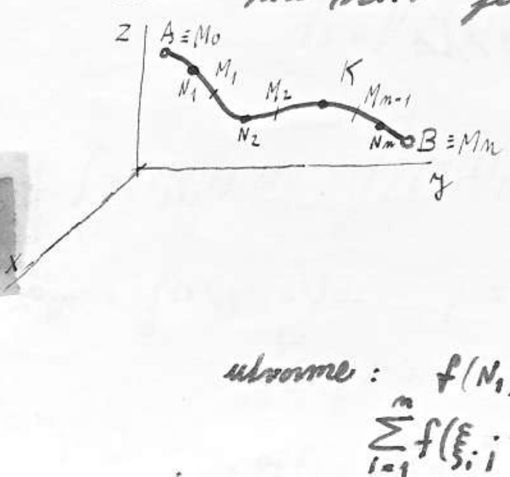
Pr. vyp. dĺžku skrutkovice: $x=\cos t$ $y=\sin t$ $z=2t$



$0\le t\le 2\pi$ $$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+4}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt5\,dt=\sqrt5\,[t]_0^{2\pi}=2\pi\cdot\sqrt5$$

Majme po priest. kr. K — danú param. rovnicami: $x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $z=\xi(t)$. Predp. $\varphi(t)$ $\psi(t)$ $\xi(t)$ majú sp. d. 1r v intervale ⟨α, β⟩. Nech A je poč. bod ... $t=\alpha$
B je koncový bod ... $t=\beta$

Nech na kr. K je def. funkcia $f(x;y;z)$



zvoľme delenie D: $M_0, M_1, \dots M_n$

$\widehat{M_0M_1}=\Delta s_1$
$\widehat{M_1M_2}=\Delta s_2$
$\dots\dots$ } K: $\Delta s_1; \Delta s_2; \dots \Delta s_n$

$N_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\in\Delta s_i$

utvorme: $f(N_1).\Delta s_1+f(N_2).\Delta s_2+\dots+f(N_n).\Delta s_n$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i).\Delta s_i=I(D)$$ ~ i. f. $f(x;y;z)$ na krivke K

I — závisí od delenia, od f.

Def. Číslo I naz. limitu int. súčtov $I(D)$ ak platí
k ľubov. $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$ také, že pre každý I,
pre ktorý je $N(D) < \delta$ je splnené:

$$|I(D) - I| < \varepsilon \qquad \Big[\,\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta s_i - I\Big| < \varepsilon\Big].$$

$$\lim_{N(D)\to 0} I(D) = I \quad ; \quad I = \int_K f(x;y;z)\,ds$$ ~ kr. i. prvého druhu (po dĺžke oblúka krivky

§2. Vlastnosti kr. int.

1. Hodnota kr. i. nezávisí od orientácie krivky

$$\int_{AB} f(x;y;z)\,ds = \int_{BA} f(x;y;z)\,dz$$

2. $\int_{AB} k\, f(x;y;z)\,ds = k\int_{AB} f(x;y;z)\,ds$. k - číslo

3. Ak kr. $K = K_1 + K_2$:

$$\int_K f(x;y;z)\,ds = \int_{K_1} f(x;y;z)\,ds + \int_{K_2} f(x;y;z)\,ds$$

4. $\int [f(x;y;z) \pm g(x;y;z)]\,ds = \int f(x;y;z)\,ds \pm \int g(x;y;z)\,ds$

5. Ak v bodoch kr. K platí: $f(x;y;z) \geq g(x;y;z) \Rightarrow$

$$\int_K f(x;y;z)\,ds \geq \int_K g(x;y;z)\,ds$$

6. $\Big|\int_K f(x;y;z)\,ds\Big| \leq \int_K |f(x;y;z)|\,ds$

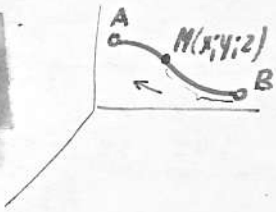
7. ak $f(x;y;z) \equiv 1 \rightarrow \int_K ds = s$ ... dĺžka krivky K.

8. Nech $f(x;y;z)$ je spoj. na K. $\Rightarrow$ ex. na K bod $M(\xi;\eta;\zeta)$
že kr. i: $\int_K f(x;y;z)\,ds = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot s$

Nech kr. K v priestore je rektifikácieschopná.

$K:\quad x=\varphi(t)\quad y=\psi(t)\quad z=\xi(t)\quad t\in\langle\alpha;\beta\rangle$ . . .

Nech na kr. K je def. f. $f(x;y;z)$ — spojitá.



zvolme $M(x;y;z)$ $\quad s=\widehat{BM}$ ~ premenné číslo

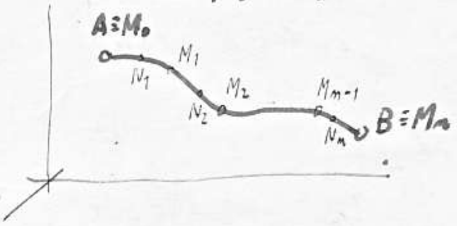
$$x=x(s)$$
$$y=y(s)$$
$$z=z(s)$$

Ak $s=0$ $\quad B[x(0);y(0);z(0)]$

$\qquad A[x(S);y(S);z(S)]$

- - -

$f[x(s);y(s);z(s)]$ . . . . premenn. s.



Označ.: s_i – hodnotu parametra v bode M_i

$$\Delta s_i = \widehat{M_{i-1}M_i}$$

σ_i – h. par. v bode N_i

$$s_{i-1}\leq\sigma_i\leq s_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\psi_i;\zeta_i)\cdot\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n} f\{x(\sigma_i);y(\sigma_i);z(\sigma_i)\}\cdot\Delta s_i$$

Ak $N(D)\to 0$: $\quad \int_K f[x(s);y(s);z(s)]\,ds=\int_K f(x;y;z)\,ds$

$\rightsquigarrow$

Vyjadríme kr. K pom. iného parametra t:

$$x=x(t)\qquad t\in\langle\alpha;\beta\rangle\qquad A\ldots\ t=\alpha$$
$$y=y(t)\qquad\qquad\qquad B\ldots\ t=\beta$$
$$z=z(t)$$

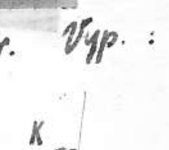
$$\int_\alpha^\beta f[x(t);y(t);z(t)]\cdot ds=\int_K f(x;y;z)\,ds$$

predp. $x(t);y(t);z(t)$ majú spoj. der.:

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\cdot dt.$$

$$\int_K f(x;y;z)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x(t);y(t);z(t)]\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt.\qquad (1)$$

Pr. Vyp.: $\int_K (x^2+y^2+z^2)\,ds$; $x=\cos t$; $y=\sin t$; $z=t$ — 1 závit: $0\leq t\leq 2\pi$



$$=\int_0^{2\pi}[\cos^2 t+\sin^2 t+t^2]\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot(1+t^2)\,dt=\sqrt{2}\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}=$$

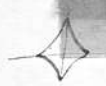
$$=\sqrt{2}\left[2\pi+\frac{8}{3}\pi^3\right]=2\sqrt{2}\cdot\pi\left[1+\frac{4}{3}\pi^2\right].$$

Ak kr. K je daná v rovine par. rovn.: $x=x(t)$ $y=y(t)$

$t\in\langle\alpha;\beta\rangle$; na K je def. spoj. funkcia $f(x;y)$, potom

z (1) :

$$\int_K f(x;y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[x(t);y(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$



Pr. vyp. $\int_K x^{4/3}ds$ po asteroide $x=8\cos^3 t$ $y=8\sin^3 t$

$0\leq t\leq 2\pi$.

$$\int_K x^{4/3}ds = \int_0^{2\pi} 2\cos t\cdot\sqrt{(-24\cos^2 t\sin t)^2+(24\sin^2 t\cos t)^2}\,dt = 48\int_0^{2\pi}\cos t|\cos t\sin t|(\ldots$$

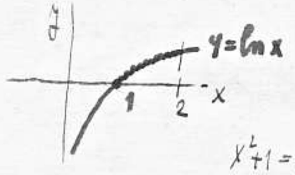
$$= 48\int_0^{2\pi}\cos^2 t.\sin t\,dt = 16.\sqrt{2}$$

Nech K v rov. je daná: $y=\varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ má spoj. der. v $\langle a;b\rangle$.

Nech na K je def. spoj. f. $f(x;y)$.

$$\int_K f(x;y)\,ds = \int_a^b f[x;\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,.dx$$

Pr. $\int_K x^2 ds$ kde K je časť logaritmickej krivky $y=\ln x$, $(1<x<2)$

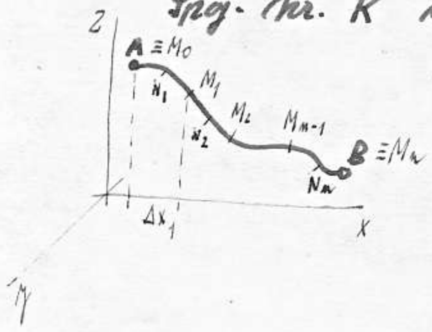


$$\int_K x^2 ds = \int_1^2 x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 x.\sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$x^2+1=z^2$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{3}\left[5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right].$$

3§ Kr. int. druhého druhu.



Spoj. kr. K v priest. Na kr. nech je def. f. $f(x;y;z)$.

$N_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$

$f(N_1).\Delta x_1 + f(N_2).\Delta x_2 + \ldots + f(N_n).\Delta x_n$

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i).\Delta x_i = J(D)$ int. súčet po del. D na kr. K po súr. x

$$\lim_{\nu(D)\to 0} J(D) = \lim\sum_{i=1}^n f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i).\Delta x_i = \int_K f(x;y;z)\,dx$$ — kr. i. 2. dr. po súr.

Pozn.: Budeme použ.: $\int_K P(x;y;z)\,dx$.

Krivkový int. podľa premennej x naz. kr. int. druhého druhu.
Pretože pri priemete oblúka ΔS_i do osi x musíme prihliadnuť aj na znamienko → hodnota kr. integrálu 2. dr. závisí od orientácie krivky. [druhého druhu]

$$pr_x \, \widehat{M_{i-1} M_i} = - pr_x \, \widehat{M_i M_{i-1}}$$

$$\int_{AB} P(x;y;z)\,dx = -\int_{BA} P(x;y;z)\,dx \qquad \text{alebo:} \quad \int_{K} P(x;y;z)\,dx = -\int_{-K} P(x;y;z)\,dx.$$

Analogicky:

$$\int_K Q(x;y;z)\,dy = \lim_{N(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) . \Delta y_i \qquad \text{– kr. i po súradnici } y$$

$$\int_K R(x;y;z)\,dz = \lim_{N(D)\to 0} \sum R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta z_i$$

$$\int_K P(x;y;z)\,dx = \lim_{N(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta x_i$$

$$\int_K P(x;y;z)\,dx + \int_K Q(x;y;z)\,dy + \int_K R(x;y;z)\,dz = \int_K P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz$$

Skrátený zápis: $\int_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

§4. Vlastnosti krivkového int. 2. druhu

1. $\int_{AB} = -\int_{BA}$

2. $\int_K kP\,dx = k\int_K P\,dx \qquad k$ – konšt.

3. $\int_K (P_1 \pm P_2)\,dx = \int_K P_1\,dx \pm \int_K P_2\,dx$

4. Nech K je zlož. z $K_1; K_2$ potom:

$$\int_{\substack{K \\ AC}} P\,dx = \int_{\substack{K_1 \\ AB}} P\,dx + \int_{\substack{K_2 \\ BC}} P\,dx$$

5. Nech kr. K je uzavretá. Potom kr. i. 2. druhu po krivke K nezávisí od voľby počiatočného bodu, ale len od smeru (orientácie) po ktorom prechádzame po krivke K.

$$\oint_K P\,dx = \oint_{BmAnB} \overset{4}{=} \int_{BmA} + \int_{AnB} \quad \Big| \quad \oint_K = \oint_{AmBnA} = \int_{AnB} + \int_{BmA} \quad \Big| \quad \Rightarrow \oint_{A\ldots A} = \oint_{B\ldots B}$$

Ak kr. K je uzavretá a sama seba nepretína v rovine $x;y$ potom za kladný smer budeme považovať ten pri ktorom pri obieh. po krivke zachovávame smer proti pohybu hodinových ručičiek.

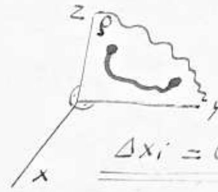
(Uzavr. obraz rozlávn po ľavej strane).

Opačný smer záporný.

6. Ak krivka K leží v rov. ϱ, a $\varrho \perp x$ potom

$$\int_K P(x;y;z)\,dx = 0$$

$$\int_K P(x_i;y_i;z)\,dx = \lim_{N(D)\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\ y_i;\ z_i)\,\Delta x_i$$



$\Delta x_i = 0$

Analogicky: $K \ldots \varrho \perp y$: $\int_K Q(x;y;z)\,dy = 0$ | $K \ldots \sigma \perp z$ $\int_K R(x;y;z)\,dz = 0$

Krivka K sa nazýva hladkou ak je daná par. rovnicami

$x = x(t)$ $\quad t \in \langle \alpha;\beta \rangle$

$y = y(t)$

$z = z(t)$ $\quad x'(t)\ y'(t)\ z'(t)$ sú spoj

Spojitá krivka AB sa naz. po kusoch hladká, ak ju možno rozložiť na konečný počet hl. oblúkov.

V (postač. podm. pre kr. i 2.druhu)

Nech kr. AB je po kusoch hladká, a nech f. $P(x;y;z)$ $Q(x;y;z)$ $R(x;y;z)$ sú na nej spoj. Potom existujú:

$$\int_{AB} P(x;y;z)\,dx \qquad \int_{AB} Q(x;y;z)\,dy \qquad \int_{AB} R(x;y;z)\,dz$$

$$\int_{AB} P(x;y;z)\,dx \quad Q(x;y;z)\,dy \quad R(x;y;z)\,dz.$$

$$J_x = \iiint_V (y^2+z^2)\cdot \mu(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T (r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\vartheta)\cdot 1\cdot r^2\sin\vartheta\cdot d\vartheta\cdot d\varphi\cdot dr =$$

$$= \iiint_T r^4 \sin\vartheta\left(\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta\right)dr\,d\vartheta\cdot d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cdot \int_0^a r^4\sin\vartheta\left(\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta\right)dr = \frac{a^5}{5}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\vartheta\left[\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta\right]\sin\vartheta =$$

$$= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi\cdot\vartheta + \cos^2\varphi\cdot\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \dots = \frac{2}{15}\pi a^5$$

11. XII. 1969.

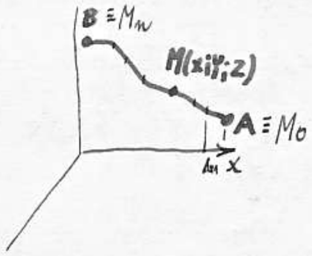
§5. Vyčíslenie krivk. int. 2. druhu

Nech kr. AB je d. parametrických rovnicami: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ (1)

$x(t)$ .... majú spoj der. v interv $\langle\alpha;\beta\rangle$

A .... $t=\alpha$ - počiatočný

B .... $t=\beta$ - koncový bod.



Nech na kr. sú definov. spoj f: $P(x;y;z)$ $Q(x;y;z)$ $R(x;y;z)$

M_i — pre $t=t_i$, $t_i\in\langle\alpha;\beta\rangle$ | $\langle\alpha=t_0;t_1;t_2\dots t_n=\beta\rangle$

M_n — $t=t_n=\beta$

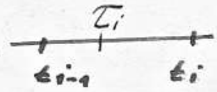
M_i dost., keď do (1) dos. $t=t_i$

Zvolme N_i — leží na oblúku (M_{i-1},M_i) | $N_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$

$x(t_i)-x(t_{i-1})=\Delta x_i$ $t_i-t_{i-1}=\Delta t_i$

Pretože $x(t)$ má spoj. der. — platí Lagr. veta:

$$x(t_i)-x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$$



$$\Delta x_i = x'(\tau_i)\cdot\Delta t_i$$

Utvorme: [zvol. si $\tau_i\equiv N_i$!]

$$\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot x'(\tau_i)\cdot\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n}P[\xi(\tau_i);\eta(\tau_i);\zeta(\tau_i)]\,x'(\tau_i)\,\Delta t_i$$

Ak $N(D)\to 0$ ... $t_{i-1}\to t_i$

$$\Sum\dots = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t);y(t);z(t)]\,x'(t)\,dt = \int_{AB}P(x;y;z)\,dx$$

analogicky:

$$\int_{AB} Q(x;y;z)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q\{x(t);y(t);z(t)\}\, y'(t)\,dt$$

$$\int_{AB} R(x;y;z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} R\{x(t);y(t);z(t)\}\, z'(t)\,dt.$$

$$\int_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[x(t);y(t);z(t)]\,x'(t) + R[x(t);y(t);z(t)]\,y'(t) \ldots\ldots \}\,dt$$

Pr: $\int_{AB} x^2dx - yz\,dy + z\,dz$ po úс. AB $A(1;2;-1)$ $B(3;3;2)$

$x = 1+(3-1)t \rightarrow x = 1+2t$
$y = 2+(3-2)t \rightarrow y = 2+t$
$z = -1+(2+1)t \rightarrow z = -1+3t$
} par. rovn. priamky p

$1 = 1+2t \rightarrow t = 0$
$2 = 2+t \rightarrow t = 0$
$-1 = -1+3t \rightarrow t = 0$
} $\Rightarrow \alpha[0]$

$3 = 1+2t \rightarrow t = 1$ } $\Rightarrow \beta = [1]$

$$t \in \langle 0;1 \rangle$$

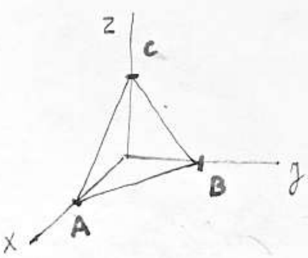
$$J = \int_0^1 \{(1+2t)^2 \cdot 2\,dt - (2+t)(-1+3t)\,dt + (-1+3t)3\,dt\} =$$

$$= \int_0^1 \{2(1+2t)^2 - (2+t)(-1+3t) + (-1+3t)3\}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \{2+8t+8t^2+2+t-6t-3t^2-3+9t\}\,dt = \int_0^1 \{5t^2+12t+1\}\,dt = \left[\frac{5}{3}t^3+6t^2+t\right]_0^1 =$$

$$= \frac{26}{3}$$

Pr: Vyp. kr. int. po uzavr. krivke K: $\oint_K (x+y+z)\,dx$; kde K je lomená čiara ABCA (obv. Δ):
$A=(1;0;0)$ $B=(0;1;0)$ $C=(0;0;1)$



$$\oint_K = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$ $\int_{BC} = 0$ pretože BC leží v rov $(y;z) \perp x$

AB: $x = x_1 + (x_2-x_1)t$
$x = 1+(-t)$
$y = 0+t$
$z = 0$
| $t \in \langle 0;1 \rangle$

CA: $x = 0+t$
$y = 0+0$
$z = 1-t$
| $t \in \langle 0;1 \rangle$

$$\oint_K (x+y+z)\,dx = \int_0^1 \{(1-t)+t\}\,\cancel{dx}(-dt) + \int_0^1 \{t+(1-t)\}\,dt =$$

$$= \int_0^1 -dt + \int_0^1 dt = 0$$

Vyčíslenie v rovine:

nech v rov $(x;y)$ je K daná $\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}$ | $x(t);\ y(t)$ der. sú spojité v $\langle \alpha;\beta\rangle$

$P(x;y)$ $Q(x;y)$ sú spoj na K.

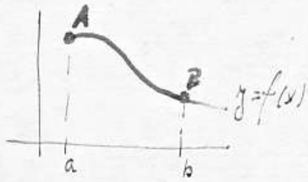
$$\int_K P(x;y)\,dx = \int_\alpha^\beta P[x(t);y(t);]\,.x'(t)\,dt$$

$$\int_K Q(x;y)\,dy = \int_\alpha^\beta Q[x(t);y(t)]\,.y'(t)\,dt$$

$$\int_K P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_\alpha^\beta \{P[x(t);y(t)]\,x'(t) + Q[x(t);y(t)]\,.y'(t)\}\,dt$$

nech v rov $(x;y)$ ... K $y=f(x)$ $f'(x)$ je spoj v $\langle a;b\rangle$

Nech $Q(x;y)$ $P(x;y)$ sú spoj na K.

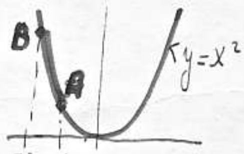


$$\int_K P(x;y)\,dx = \int_a^b P\{x;f(x)\}.dx$$

$$\int_K Q(x;y)\,dy = \int_a^b Q\{x;f(x)\}\cdot f'(x)\,dx$$

$$\int_K P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_a^b \{P[x;f(x)] + Q[x;f(x)].f'(x)\}\,dx$$

Pr: $\int_{AB} xy\,dx - (x-y)\,dy$ po obl. paraboly $y=x^2$ $\quad x\in\langle -1;-2\rangle$



$A[-1;1]$
$B[-2;4]$

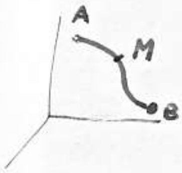
$$\int_{AB} = \int_{-1}^{-2} [x\cdot x^2 - (x-x^2)\cdot 2x]\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\right]_{-1}^{-2} \cancel{dx} = \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{-2} =$$

$$= \left[12 + \frac{16}{3} - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right] = \frac{191}{12}$$

§6. Vzťahy medzi kr. int. 1. a 2. druhu.

Nech kr. AB je hladká. Jej par. rovn.: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ | s – je element dĺžky krivky AB.



Dĺžka krivky: S ; $0 \leq s \leq S$.

Zvolme ľubov. $M(x;y;z)$; $M[x(s);y(s);z(s)]$

Ozn.: α ∡ dotyčn. bodu M s osou x; β s y; γ s z – vo smere rastu parametra s.

$\cos\alpha = x'(s)$
$\cos\beta = y'(s)$
$\cos\gamma = z'(s)$

$$\int_{AB} P(x;y;z)\,dx = \int_0^S P[x(s);y(s);z(s)].x'(s)\,ds$$

analog.:

$$\int_{AB} Q(x;y;z)\,dy = \int_0^S Q[x(s);y(s);z(s)].y'(s)\,ds$$

$$\int_{AB} R(x;y;z)\,dz = \int_0^S R[x(s);y(s);z(s)].z'(s)\,ds$$

dosad.:

$$\int_{AB} \ldots dx = \int_0^S P[x(s);y(s);z(s)]\cdot\cos\alpha\cdot ds$$

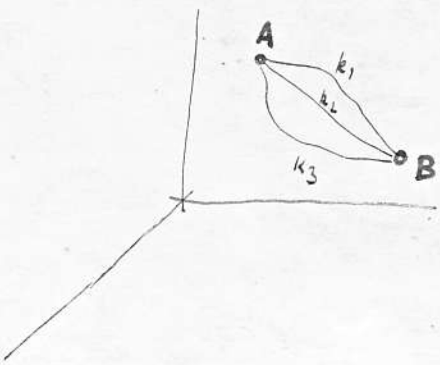
$$\int_{AB} \ldots dy = \int_0^S Q[x(s);y(s);z(s)].\cos\beta\cdot ds$$

$$\int_{AB} \ldots dz = \ldots$$

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^S \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R.\cos\gamma\}\,ds$$

kr. int. 2. druhu (po súradniciach) — kr. int. 1. druhu (špec. tvar) (po parametri)

§7. Podmienky nezávislosti kr. i. 2. druhu na integračnej ceste.



krivky ležia v uzavr. oblasti D.

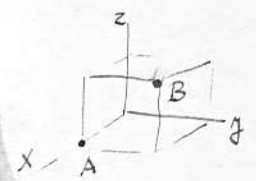
v obl. D def. f. $P(x;y;z)$ $Q(x;y;z)$ $R(x;y;z)$ nech sú tam spojité.

$\Downarrow$

existujú $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ aj po k_1, aj k_2 ....

či sa hodnota int. líši?

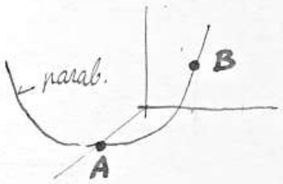
Pr.: $\int_{AB} x\,dx + xy\,dy + y\,dz$ — po úś. $\overline{AB}$; $A(1;0;0)$ $B(1;1;1)$



$$\left.\begin{aligned} x &= 1-(1-1)t \\ y &= 0+(1-0)t \\ z &= 0+(1-0)t \end{aligned}\right\} \text{par. rovn. úś.} \qquad t\in\langle 0;1\rangle$$

$$\int_{AB} = \int_0^1 (0+1.t+t)\,dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1$$

Poč. po oblúku paraboly: $\begin{aligned} x&=1 \\ z&=y^2 \end{aligned}$ | zvoľ $y=t$: $\begin{aligned} x&=1 \\ y&=t \\ z&=t^2 \end{aligned}$ | poč. $\begin{aligned} 0&=t \\ 0&=t^2 \end{aligned}$ konc. $\begin{aligned} 1&=1 \\ 1&=1 \\ 1&=1 \end{aligned}$ $\Big\}$ $t\in\langle 0;1\rangle$



$$\int_{AB} = \int_0^1 [0+1.t+t.2t]\,dt = \left[\frac{t^2}{2}+\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{2}{3} \neq 1$$

$\Downarrow$ i. závisí od integračnej cesty.

Vyp. ďalší int. po tých istých cestách:

[↙ dosadíme par. rovn. hore]

po pr. $\int_{AB}(yz+1)\,dx + (xz-2)\,dy + xy\,dz = \int_0^1[0+(t-2)+t]\,dt = [-2t+t^2]_0^1 = -1$

po par. $\int_{AB}(yz+1)\,dx + (xz-2)\,dy + xy\,dz = \int_0^1[t^2-2+t.2t]\,dt = [t^3-2t]_0^1 = -1$

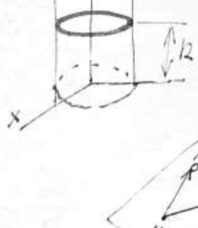
výsledky sú rovnaké → integrál nezávisí od obidvoch int. ciest.

Budeme hovoriť že $\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ v oblasti D nezávisí od tvaru int. cesty, ak jeho hodnota po rôznych krivkách ležiacich v D, ktoré majú spoločný poč. a koncový bod, je tá istá.

Potom tento integrál závisí len od poč. a koncového bodu. Píšeme: $\int_A^B P\,dx+Q\,dy+R\,dz$; $\int_{(x_1;x_2;x_3)}^{(x_1;x_2;x_3)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$.

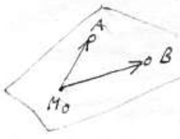
Nezávislosť krivkového int. $\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ po oblasti D od integr. cesty je rovnocenná tomu že tento int. po každej uzav. krivke prechádzajúce AB je $=0$.

$$\oint_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = 0$$



$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2 \\ z&=h \end{aligned}\right\} \text{kruž.}$$

$x^2+y^2=1$



$$\left.\begin{aligned} \bar a&(1-x_0;\ 0-y_0;\ 0-z_0) \\ \bar b&(1-x_0;\ 1-y_0;\ 1-z_0) \end{aligned}\right\} \quad \bar n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-x_0 & 0-y_0 & 0-z_0 \\ 1-x_0 & 1-y_0 & 1-z_0 \end{vmatrix} \overset{\text{zvol. ľ. str.}}{=} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-1(y-1)+1(z-1)=0 \rightarrow \underline{\underline{-y+z=0}}$$

V1. Nech f. $P(x;y;z)$ $Q(x;y;z)$ $R(x;y;z)$ sú spoj. v oblasti D. Nutnou a post. podm. preto aby kr. int. po AB $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ nezávisel od integračnej cesty je aby $Pdx + Qdy + Rdz$ bol totálny diferenciál nejakej f.

Dôkaz:

Podmienka postač.

Predpokladáme že $Pdx + Qdy + Rdz$ je úplný diferenciál → že v obl. D ex. f $U(x;y;z)$ taká že $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

Máme dok, že ⇒ nezávislosť integrálu od integr. cesty.

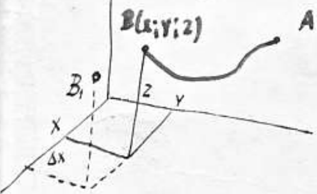
Nech $A;B$ sú body krivky (A začiatočný; B konc.)

krivka: $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} dU(x;y;z) = \int_{t_A}^{t_B} dU[x(t);y(t);z(t)] = U[B] - U[A]$$

Nutná podmienka:

Predp. že $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ nezávisí v oblasti D od integr. cesty. Máme doh., že $Pdx + Qdy + Rdz$ je úpl. diferenciál.



$B_1(x+\Delta x;y;z)$ A – pevné.

$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = U(x;y;z)$$ / lebo B je „premenné"

$$\int_{x_0y_0z_0}^{xyz} Pdx + Qdy + Rdz = U(x;y;z)$$

$$\int_A^{B_1} Pdx + Q\,dy + Rdz = U(x+\Delta x;y;z)$$

Utvorme: $U(x+\Delta x;y;z) - U(x;y;z) = \Delta_x U$

$$\Delta_x U = \int_{x_0y_0z_0}^{x+\Delta x;y;z} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{x_0y_0z_0}^{xyz} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{x_0y_0z_0}^{x+\Delta x;y;z} Pdx + Qdy + Rdz +$$

$$+\int_{xyz}^{x_0y_0z_0} Pdx + Qdy + Rdz = \underbrace{\int_{x;y;z}^{x+\Delta x;y;z} Pdx + Qdy + Rdz}_{\text{kriv. int. po úsečke kolmej na } zy} = \int_{xyz}^{x+\Delta x\,y\,z} P(x;y;z)dx$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} P(x;y;z)dx = \int_x^{x+\Delta x} P(t;y;z)dt = P(x+\Theta\Delta x;y;z).\Delta x \quad / 0 \le \Theta \le 1$$

$$\Delta_x U = P(x+\Theta\Delta x;y;z).\Delta x \quad / : \Delta x \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x+\Theta\Delta x;y;z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\Theta\Delta x;y;z) = P(x;y;z). \quad \rightarrow$$

Podobne: $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y;z)$

$\frac{\partial U}{\partial z} = R(x;y;z)$

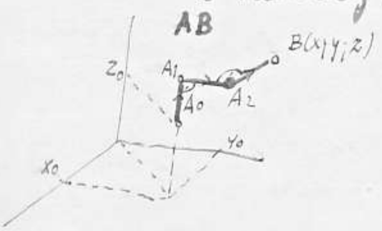
Dosaď: $P dx + Q dy + R dz = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz = dU.$

V2 Nech f $P(xyz)$ $Q(xyz)$ $R(xyz)$ sú spoj. v oblasti D. Nech majú spoj. parc. der. 1.r. Potom nutnou a post. podmienkou preto aby $Pdx + Qdy + Rdz$ bolo tot. diferenciálom je splnenie týchto rovníc:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

- - - - -

$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$



Nech platia rovnice z V2. Chceme nájsť f. U.

$$U(x;y;z) = \int_{x_0}^{x} P(x;y;z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0;y;z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0;y_0;z)\,dz$$

$A_0(x_0;y_0;z_0)$
$A_1(x_0;y_0;z)$
$A_2(x_0;y;z)$
$B \equiv A_3(x;y;z)$

Integrovanie totálnych difer.

Zisť či $(2xy^3 - 2z)dx + (3x^2y^2+1)dy + (3-2x)dz$ je úpl. difer. ak áno, nájdi f. $U(x;y;z)$ ku ktorej patrí.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2\end{array}\right\} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \left.\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial z} = -2 \\ \frac{\partial R}{\partial x} = -2\end{array}\right\} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \left.\begin{array}{l}\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$U(x;y;z) = \int_{x_0}^{x}(2xy^3-2z)\,dx + \int_{y_0}^{y}(3x_0^2y^2+1)\,dy + \int_{z_0}^{z}(3-2x_0)\,dz =$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2}y^3 - 2zx\right]_{x_0}^{x} + \left[x_0^2y^3 + y\right]_{y_0}^{y} + \left[3z - 2x_0z\right]_{z_0}^{z} =$$

$$= x^2y^3 - 2zx \cancel{- x_0^2y^3} + 2zx_0 \cancel{+ x_0^2y^3} + y - x_0^2y_0^3 - y_0 + 3z \cancel{- 2x_0z} - 3z_0 + 2x_0z_0$$

$$= x^2y^3 - 2zx + y + 3z + C$$

Previerka:

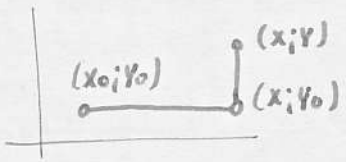
$$dU = (2xy^3 - 2z)dx + (3x^2y^2 + 1)dy + (3 - 2x)dz.$$

1.) Nech $P(x;y)$ $Q(x;y)$ sú spoj v oblasti D, potom nutná a postač. podmienka preto, aby int. po AB — $\int_{AB} Pdx + Qdy$ nezávisel od integr. cesty je, aby $Pdx + Qdy$ bolo úplne. difer.

2.) Nech f $P(x;y)$ $Q(x;y)$ sú spoj a majú spoj parc. der 1^r. v oblasti D, potom nutn. a postač. podmienkou preto aby $Pdx + Qdy$ bol úplne. dif. je splnenie rovn.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$U(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(x;y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0 y)\,dy$$



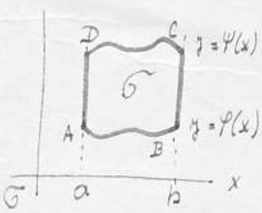
Pr: $(\underbrace{yx^3 - 2}_{P})dx + (\underbrace{\frac{x^4}{4} + 1}_{Q})dy$ — je úpl. dif.?

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= x^3\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= x^3\end{aligned}\right\}\text{ úpl. dif.}\qquad U(x;y) = \int_0^x (yx^3 - 2)\,dx + \int_0^y (1)\,dy = \left[\frac{x^4}{4}y - 2x\right]_0^x + [y]_0^y =$$

$$= \frac{x^4}{4}y - 2x + y + C$$

§8 Vzťah medzi dv. i. a kriv. i. 2. druhu

Majme v rov. oblasť σ, ktorá je ohran. uzavr. krivkou L:



$$\sigma \begin{cases} y = \psi(x) \\ y = \varphi(x) \\ \varphi(x) \leq \psi(x) \quad \text{pre } x \in \langle a; b\rangle \end{cases} \quad ; a < b$$

Nech na σ je f. $P(x;y)$ a $\frac{\partial P(x;y)}{\partial y}$ spojité.

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}\,dy = \int_a^b \left\{[P(x;y)]_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\right\} dy =$$

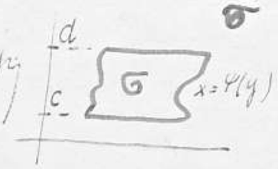
$$= \int_a^b P\{x;\psi(x)\}\,dx - \int_a^b P\{x;\varphi(x)\}\,dx = \int_{DC} P(x;y)\,dx - \int_{AB} P(x;y)\,dx$$

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}\,dy\,dx = -\int_{CD} P(x;y)\,dx - \int_{AB} P(x;y)\,dx - 0 - 0 =$$

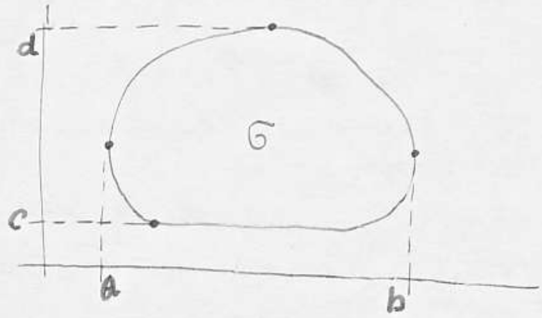
$$= -\int_{AB} P(x;y)\,dx - \int_{BC} P(x;y)\,dx - \int_{CD} P(x;y)\,dx - \int_{DA} P(x;y)\,dx = -\oint_L P(x;y)\,dx$$

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_L P(x;y)\,dx \qquad (2)$$

Analyticky:



$$\iint_{\sigma} \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_L Q(x;y)\,dy \qquad (1)$$



Nech $y = \varphi(x)$ .... oblúk ACB

$y = \psi(x)$ . . . BDA

$x = \Phi(y)$ . . . DAC

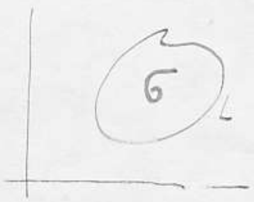
$x = \Psi(y)$ . . . CDA

z (1):
$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_L P(x;y)\,dx$$

z (2):
$$\iint_{\sigma} \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_L Q(x;y)\,dy$$

$$\iint_{\sigma} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy$$ ~ Greenova formula

Použitie:



Položíme: $P(x;y) = -y \quad Q(x;y) = 0$

$$\iint_{\sigma} [0 - (-1)]\,dx\,dy = \oint_L (-y)\,dx + 0.dy$$

$$\underbrace{\iint_{\sigma} dx\,dy}_{\text{plocha obl.}} = -\oint y\,dx$$

Položíme: $P(x;y) = 0 \quad Q(x;y) = x$

$$\iint_{\sigma} \underbrace{[1-0]\,dx\,dy}_{\text{plocha obl.}} = \oint_L 0.dx + x.dy$$

$$\text{plocha obl.} = \oint_L x\,dy$$

$$2\,\text{plocha}\ \sigma = \oint_L x\,dy - y\,dx$$

$$P = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx$$

Pr. plocha elipsy:

$x = a\cos t$
$y = b\sin t$ $\quad | \; 0 < t < 2\pi$

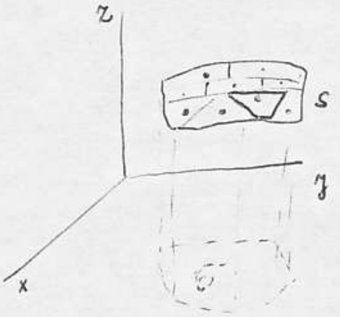
$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t . b\cos t\,dt - b.\sin t.(-a\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{ab.\pi}}$$

PLOSNÉ INTEGRÁLY

18. 11. 1970.

1§ Plošný int. 1. druhu



Na S (pl.) je def. f: $F(x;y;z)$.
zvolme delenie: D. $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots \Delta S_n$
zvol. $N_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ $i = 1, \dots, n$

Utvorme: $\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) . \Delta S_i = J(D)$ ~ integr. súčet z f. $F(x;y;z)$ pri del. D na ploche S.

Priemer oblasti ΔS_i – ρ ~ najväčšia vzd. z vzd. 2 bodov
ρ_i = supremum d

Norma delenia: $N(D) = \max\{\rho_1; \dots \rho_n\}$

Ak pre $N(D) \to 0$ ex. konečná limita z $J(D)$, potom ju nar. plošným int. 1-ho druhu z f. $F(x;y;z)$ na ploche S:

$$\lim_{N(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) . \Delta S_i = \iint_S F(x;y;z)\, dS$$

Platia analogické vety pre určitý a krivkový integrál. napr. veta o strednej hodn.:

Nech $F(x;y;z)$ je spoj. na S. Potom ex. $P_0(\xi_0; \eta_0; \zeta_0)$ že platí:

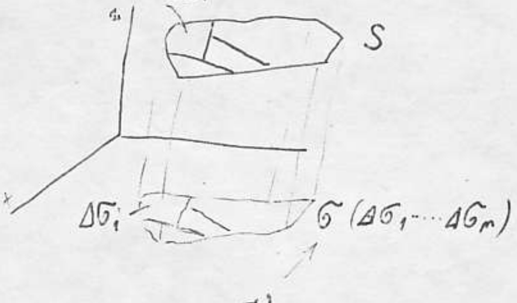
$$\iint_S F(x;y;z)\, dS = F(\xi_0; \eta_0; \zeta_0) \cdot S \qquad / \ S \text{ - veľkosť plochy}$$

2§. Vyčíslenie pl. int. 1-ho druhu

V1. Nech plocha S je daná rovnicou $z = f(x;y)$; pričom f. $f(x;y)$; $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ sú spojité na oblasti σ (σ- pravoúhl. pr. S). Nech f. $F(x;y;z)$ je spoj. na pl. S.

Potom ex. pl. i.: $\iint_S F(x;y;z)\, dS$

Vyčísl. pl. i. prevádzame tak, že ho preved. na špec. dvojný int. za predpokladu V1, nasledujúcim spôsobom.



Ak $N(D) \to 0 \Rightarrow N(D') \to 0$
[ak $N(D') \to 0 \Rightarrow N(D) \to 0$]

$$\Delta S_i = \iint_{\Delta\sigma_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

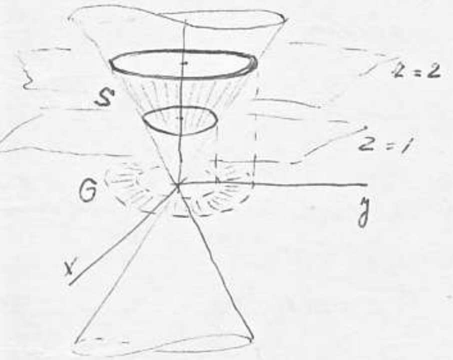
$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_i; \eta_i)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_i; \eta_i)}{\partial y}\right)^2} . \Delta\sigma_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) . \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} F\{\xi_i; \eta_i; f(\xi_i; \eta_i)\} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} . \Delta\sigma_i$$

ak $N(D) \to 0 \Rightarrow N(D') \to 0$; limity ex. $\rightarrow$

$$\iint_S F(x;y;z)\,dS = \iint_\sigma \underbrace{F\{x;y;f(x;y)\}}_{\text{funkcia}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy}_{\text{plocha}}$$

pr. Vyčísl. int. cez pl. S $\iint_S z\,dS$ po časti kužeľa $x^2+y^2=z^2$ vyťatej rovinami $z=1$; $z=2$



$$\sigma \begin{cases} x^2+y^2=1^2 \\ x^2+y^2=2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 1 \le \rho \le 2 \end{cases}$$

$$\iint_S z\,dS = \iint_\sigma \underbrace{+\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x;y)} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\;dx\,dy =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \dots$$

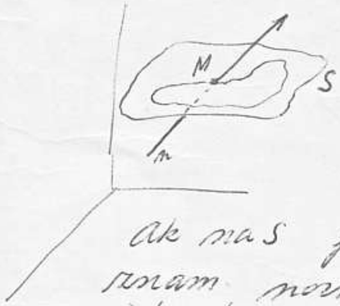
$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 \rho.\rho.\sqrt{2}\,.\,d\rho = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{7}{3}\,d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi .$$

3§ Orientované plochy

Majme pl. S v priestore E_3. Pl. S nazveme hladkou, ak v každom jej bode ex. dotyková rovina a normála, a keď so spoj. zmenou dot. bodu mení sa spojite aj poloha normály a dotyk. roviny.

Zvolme na S bod M a týmto bodom veďme normálu, na ktorej zvol. pevnú orientáciu.



Meňme polohu bodu po uzavr. krivke, ktorá sama seba nepretína a celá leží na ploche S. - popisujme v každom bode polohu a orient. normály.

Ak na S je aspoň 1 taký bod, že pri zmene bodu M znam. normály sa zmení na opačné — plochu S nazývame jednostrannou.

Ak sa znam. norm. nemení, pl. naz. dvojstrannou.

Moebius  - jednostranná plocha.

príklady dvojstr. pl.: každá rovina, guľa, elipsoidy, paraboloidy a ľubov. plocha, daná rovnicou:

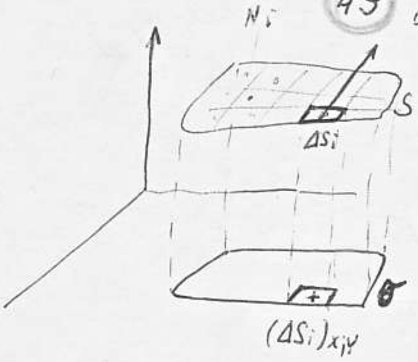
$z = f(x;y)$; $\underbrace{F(x;y),\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}}_{\text{spoj.!}}$

Predp. že S je dvojstranná pl., a nech je ohranič. krivkou L. Základný smer kr. L považujeme len, pri ktorom pri obehu po kr. zostáva S po ľavej strane.

Opačný smer je záporný.

Dvojstranná pl. s kladným smerom obehu krivick sa naz. orientovaná plocha.

4§ Plošný int. 2-ho druhu (po súradniciach)



Majme dvojstr. plochu: $S: z = f(x;y)$.
Nech na S je def. f. $R(x;y;z)$.
Zoberme z dvojstr. pl. hornú časť:

$D: \quad \Delta S_1 \ldots \Delta S_n$

$(\Delta S_i)_{x;y}$ – je plocha priemetu ΔS_i do roviny (xy)

Ak norm. zviera s osou z ostrý uhol, priemet je $+$
Ak –"– –"– –"– tupý uhol, –"– má $-$

zvol. $N_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \in \Delta S_i$

utvor. $\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} = J(D)$ ~ int. súčet pre f. R. pri delení D pre hornú časť S (premenné $x;y$)

Ak pre $N(D) \to 0$ ex. konečná limita z $J(D)$ – potom ju naz. plošným integr. 2 dr. z f. $R(x;y;z)$ vzhľadom na premenné $x;y$ po hornej časti S.

$$\lim_{N(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)(\Delta S_i)_{x;y} = \iint_S R(x;y;z)\,dx\,dy \qquad (1)$$

Analogicky možno odvodiť vzťahy:

$$\lim_{N(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} = \iint_S Q(x;y;z)\,dz\,dx \qquad (2)$$

$$\lim_{N(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)(\Delta S_i)_{zy} = \iint_S P(x;y;z)\,dy\,dz \qquad (3)$$

Ak S je taká plocha že na nej ex. súčasne integrály (1)...(3), môžeme písať:

$$\iint_S P(x;y;z)\,dy\,dz + Q(x;y;z)\,dz\,dx + R(x;y;z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_S P\,dy\,dz + \iint_S Q\,dz\,dx + \iint_S R\,dx\,dy$$

Vlastnosti pl. integrálov 2-ho druhu.

1° Pl. i. 2-ho dr. mení znamienko pri zmene strany plochy, po ktorej integrujeme.

napr. ak horná + strana S; dolná $-S$; platí:

$$\iint_S R(x;y;z)\,dy\,dx = -\iint_{-S} R(x;y;z)\,dy\,dx$$

2° $$\iint_S k\,R\,dy\,dx = k\iint_S R\,dy\,dx \qquad - k \text{ reálne číslo}$$

3° $$\iint_S \{R_1(x;y;z) + R_2(x;y;z)\}\,dx\,dy = \iint_S R_1\,dx\,dy + \iint_S R_2\,dx\,dy$$

4° $S = S_1 + S_2$:

$$\iint_S R(x;y;z)\,dx\,dy = \iint_{S_1} R\,dx\,dy + \iint_{S_2} R\,dx\,dy$$

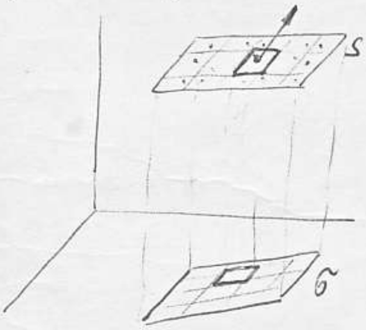
5° Ak S je rovnobežná s osou z: $\iint_S R(x;y;z)\,dx\,dy = 0$

$S \parallel y$; $\iint_S Q(x;y;z)\,dx\,dz = 0$

$S \parallel x$; $\iint_S P(x;y;z)\,dy\,dz = 0$

5§ Vyčíslenie pl. int. 2-ho druhu.

Nech pl. S je dvojstranná a je daná rovn. $z = f(x;y)$ pričom f. $f(x;y)$ je spoj. v oblasti σ (σ pravouhl. priem do xy).



$z = f(x;y)$ - spoj.

$R(x;y;z)$ - spoj na S

D ... $\Delta s_1 \dots \Delta s_m$ pravouhl. priem: D' ... $\Delta\sigma_1 \dots \Delta\sigma_m$

zvol. $N_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \in \Delta S_i$

Ak normála s ΔS_i zviera s z ostrý uhol: $(\Delta S_i)_{xy} = \Delta\sigma_i$

$$\sum_{i=1}^{m} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^{m} R\{\xi_i;\eta_i;f(\xi_i;\eta_i)\}\,\Delta\sigma_i$$

Ak pri $N(D)\to 0$ ex. lim. z ľavej strany $\to$ ex. aj z pravej:

$$\iint_S R(x;y;z)\,dx\,dy = \iint_\sigma R\{x;y;f(x;y)\}\,dx\,dy$$

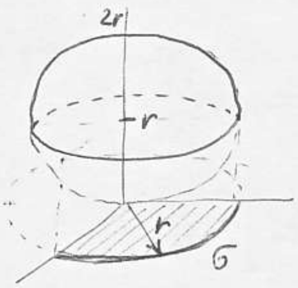
analog: $$\iint_S P(x;y;z)\,dy\,dz = \iint_\tau P\{g(x;y);y;z\}\,dy\,dz$$

$$\iint_S Q(x;y;z)\,dx\,dz = \iint_\rho Q\{x;h(x;z);z\}\,dx\,dz$$

plošný int. 2-druhu

pr. $\iint\limits_S (z-r)^2\,dx\,dy$ S - horná časť pologule : $x^2+y^2+z^2=2rz$

$x^2+y^2+(z-r)^2=r^2$



$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=2rz\\ z&=r\\ \hline x^2+y^2&=r^2\end{aligned}$$

$$\iint\limits_S (z-r)^2\,dx\,dy = \iint\limits_G \left[r+\sqrt{r^2-x^2-y^2}-r\right]^2 dx\,dy = \iint\limits_G (r^2-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

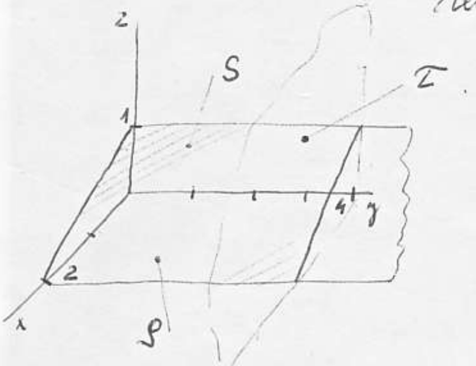
vyp. z rovn. g.

$(z-r)=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^r (r^2-\rho^2)\rho\,d\rho = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^r (r^2\rho-\rho^3)\,d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \left[\frac{r^2\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r = 4\int_0^{\pi/2}\frac{r^4}{4}\,d\varphi = 4\cdot\frac{r^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = r^4\frac{\pi}{2}$$

pr. Vypočítať I: $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$ po hornej strane roviny $x+2z=2$ lež. v 1 oktante, a vyťatej rovinou $y=4$.



$\frac{x}{2}+\frac{z}{1}+\frac{0}{1}=1$

$\iint\limits_S y\,dz\,dx = 0$!

$I=\iint\limits_S x\,dy\,dz + \iint\limits_S z\,dx\,dy$

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz = \iint\limits_\tau (2-2z)\,dy\,dz = \int_0^4 dy\int_0^1 (2-2z)\,dz = \int_0^4 dy\,[2z-z^2]_0^1 =$$

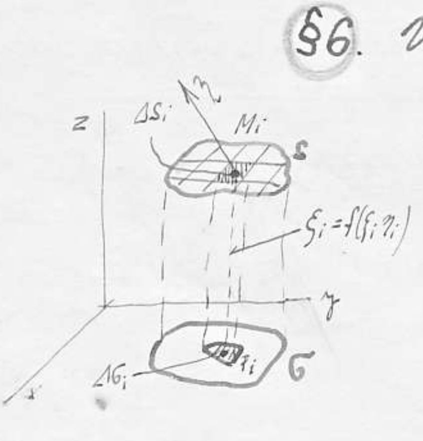
$$= \int_0^4 dy\,[2-1] = 4$$

$$\iint\limits_S z\,dx\,dy = \iint\limits_\rho \left(1-\frac{x}{2}\right)dx\,dy = \int_0^4 dy\int_0^2\left(1-\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^4 dy\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \int_0^4 3\,dy = 12$$

$I = 4+12=16.$?

25. 11. 1970.

§6. Vzťah medzi pl. int. 1 a 2-ho druhu



$S\ldots z=f(x;y)$ pričom $f(x;y)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ sú spoj na G; G prav. priem S do x,y.

$R(x;y;z)$ spoj. na S.

$D:\ \Delta S_1;\Delta S_2\ldots\Delta S_m$ (1)

$D':\ \Delta G_1;\Delta G_2\ldots\Delta G_m$

$$\Delta S_i = \iint\limits_{\Delta G_i}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\left[\frac{\partial f(\xi_i;\eta_i)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f(\xi_i;\eta_i)}{\partial y}\right]^2}\cdot\Delta G_i$$

$P_i(\xi_i;\eta_i)\in\Delta G_i$

$M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \in \Delta S_i$

γ_i – ozn. ostrý uhol v M_i norm. o osa.

$$\cos\gamma_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta S_i} \longrightarrow \Delta\sigma_i = \Delta S_i \cdot \cos\gamma_i$$

$$\sum_{i=1}^{\tilde{n}} R[\xi_i; \eta_i; \zeta_i] \cdot (\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \cdot \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \cdot \Delta S_i \cdot \cos\gamma_i$$

ak $N(D) \to 0$ ex. integrály:

$$\underbrace{\iint_S R(x;y;z)\,dxdy}_{\text{pl. i. 2-ho dr.}} = \iint_S \underbrace{R(x;y;z)\cos\gamma \cdot dS}_{\text{pl. int. 1-ho dr. (špeciálny)}}$$

Ak by sme brali dolnú časť plochy S, potom by sme museli písať $(\Delta S_i)_{xy} = -\Delta\sigma_i$; γ_i – by bol tupý u $\Rightarrow \cos\gamma_i$ – záporný.

$\Downarrow$ Dostaneme ten istý výraz.

Analogicky aj v prípadoch, keby na pl. S boli def. f.: $P(x;y;z)$ $Q(x;y;z)$ a boli spoj., a pritom by sme S premietali do (xz) ; (yz). :

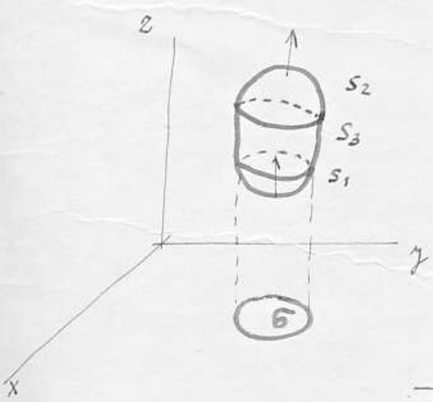
$$\iint_S P(x;y;z)\,dydz = \iint_S P(x;y;z)\cos\alpha\, dS$$
$$\iint_S Q(x;y;z)\,dxdz = \iint_S Q(x;y;z)\cos\beta\, dS$$

$\cos\alpha$ – smerový kosínus normály

Ak pl. S je taká, že na nej ex. súčasne vš. 3 pl. int. 2. dr.

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\,dS$$

§7 Vz. medzi pl. i. 2-ho dr. a trojným integr. [Gauss-ova veta]



$z = H(x;y)$

Valcová plocha je ∥ s z

$z = h(x;y)$

$H(x;y) \geq h(x;y)$ v obl. σ

S uzavr. ; ohraničuje oblasť V.

Predp.: $R(x;y;z)$ a $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ sú spoj. na V.

$$\iiint_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z}\,dxdydz = \iint_\sigma dxdy \int_{h(x;y)}^{H(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint_\sigma [R(x;y;z)]_{h(x;y)}^{H(x;y)}\,dxdy$$

$$= \underbrace{\iint_\sigma R\{x;y;H(x;y)\}\,dxdy}_{i_1} - \underbrace{\iint_\sigma R\{x;y;h(x;y)\}\,dxdy}_{i_2} =$$

$i_1 = \iint_{S_2} R(x;y;z)\,dxdy$ $\qquad$ $i_2 = -\iint R(x;y;z)\,dxdy$ ale meníme orient. $\ominus \to \oplus$

$$\iint_{S_3} R(x;y;z)\,dxdy = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\iiint_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S_1} R(x;y;z)\,dx\,dy + \iint_{S_2} R(x;y;z)\,dx\,dy + \iint_{S_3} R(x;y;z)\,dx\,dy$$

$$\iiint_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S R(x;y;z)\,dx\,dy$$ / integr. po vonk. povrchu telesa

$\rightsquigarrow$

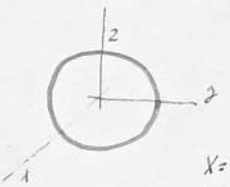
$$\iiint_V \frac{\partial P(x;y;z)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_S P(x;y;z)\,dy\,dz$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q(x;y;z)}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S Q(x;y;z)\,dx\,dz$$

ak obl. V je taká že vyhovuje vš. 3 prípadom; $\rightarrow$:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$ — G. vzorec

Pr.: $\iint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$ po vonk. str. $x^2+y^2+z^2=R^2$



$$= \iiint_V (3x^2+3y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$
$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$
$z = r\cos\vartheta$
$|J| = r^2\sin\vartheta$

$0 \leq r \leq R$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq \vartheta \leq \pi$

$$\left(= 3R^2 \iiint_V dx\,dy\,dz = 3R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{R} dr \cdot r^2 \sin\vartheta = \right.$$

$$= 3R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{R^3}{3}\right] = \frac{3R^3 \cdot R^2}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} =$$

$$\left. = R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[+1+1\right] = 2R^5 \cdot 2\pi = \cancel{4\pi R^5} \right) \quad \left(\frac{12\pi R^5}{5}\right)$$

$\rightsquigarrow$

Výpočet objemu ohran. uzavretou plochou.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dy\,dx$$ — G. v.

Označ.: $P = x$; $Q = R = 0$

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_S x\,dy\,dz$$

$P = 0 = R \quad Q = y$

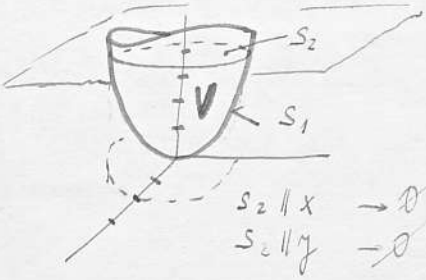
$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_S y\,dx\,dz$$

$P = Q = 0 \quad R = z$

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_S z\,dx\,dy$$

$$V = \frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

Pr: $x^2+y^2=z$ $\quad z=4$



$S_2 \parallel x \;\rightarrow 0$
$S_2 \parallel y \;\rightarrow 0$

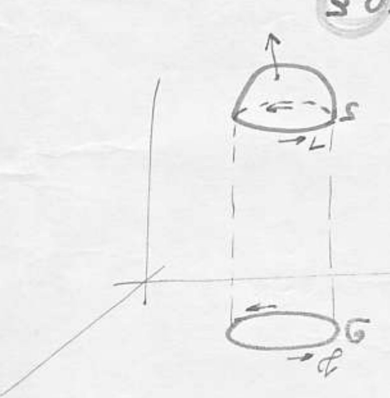
$$J_1=\frac{1}{3}\left\{\iint_{S_2} x\,dy\,dz+\iint_{S_2} y\,dx\,dz+\iint_{S_2} z\,dx\,dy\right\}=\frac{1}{3}\iint_{\sigma} 4\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2} 4\rho\,d\rho=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[8]\,d\varphi=\frac{16\pi}{3}$$

$$J_2=\frac{1}{3}\left\{\iint_{S_1} x\,dy\,dz+\iint_{S_1} y\,dx\,dz+\iint_{S_1} z\,dx\,dy\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\tau}\sqrt{z-y^2}\,dy\,dz+\frac{1}{3}\iint_{\nu}\sqrt{z-x^2}\,dx\,dz+\frac{1}{3}\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\ \dots\qquad \Big|\ \underline{V=J_1+}$$

§8. Vzť. medzi plošn. i. 2 ho dr. a krivk. int. 2 h
(Stokes-ov vzorec)



S... $z=f(x;y)$; $f(x;y)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojité

ℓ... $x=x(t)$ $\quad y=y(t)$ $\qquad \alpha<t<\beta$ — (
s rastúcim

L.... $x=x(t)$ $\quad y=y(t)$
$\qquad z=f[x(t);y(t)]$

Predp.: $Q(x;y;z)$; R ; R a ich parc. der. sú spojité

Uvažme:
$$\oint_L P(x;y;z)\,dx+Q(x;y;z)\,dy+R(x;y;z)\,dz=\int_\alpha^\beta\{P[x(t)y(t)z(t)]x'(t)+Q(t)y'(t)+R(t)z'(t)$$

$$z'=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=p\,x'(t)+q\,y'(t)$$

$$=\int_\alpha^\beta\Big\{P[x(t)y(t)f[x(t);y(t)]]\,x'(t)+Q\cdots\cdots+R[x(t)y(t)f[x(t);y(t)]][p\,x'(t)+$$

$$=\int_\alpha^\beta\Big\{\big[P(x(t)y(t)f(x(t)y(t)))+pR(x(t)y(t)f(x(t)y(t)))\big]x'(t)\cancel{dt}+$$

$$+\big[Q(x(t)y(t)f(x(t)y(t)))+qR(x(t)y(t)f(x(t);y(t)))\big]y'(t)\Big\}\,dt$$

$$=\oint_\ell\underbrace{\big[P(x;y\,f(x;y))+pR(x;y;f(x;y))\big]}_{„P"}dx+\underbrace{\big[Q(x;y;f(x;y))+qR(x;y;f(x;y))\big]}_{„Q"}dy$$

$$\iint\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy=\oint_\ell P_1dx+Q_1dy\quad\text{— Green. v.}$$

$$=\iint_\sigma\left[-p\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\quad=\quad\text{plošn.:}$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

$B \qquad\qquad C \qquad\qquad A$

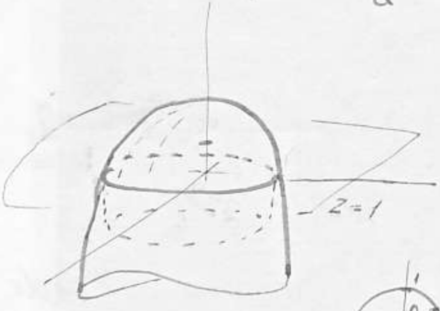
$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Ak Stokes-ovu vetu premietneme do rov. dost. Greenovu vetu.:

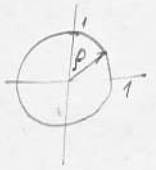
$z = 0$: $$\oint_l P\,dx+Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Pr: $\oint_l \underbrace{xy}_{P}\,dx + \underbrace{y^2}_{Q}\,dy + \underbrace{z}_{R}\,dz$ ..... l .... $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{array}\right\} L$

$2-z = x^2+y^2 \ \} S$



$$= \iint_S (0-0)\,dy\,dz + (0-0)\,dz\,dx + (0-x)\,dx\,dy = -\iint_S x\,dy =$$



$$= -\iint_G dx\,dy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\cos\varphi \cdot \rho \cdot d\rho = -\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi\ \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = 0$$

geom. aritm. rady.

II. Číselné rady.

4. III. 1970.

1§. Zákl. pojmy o č.r.

Pod radom budeme rozumieť nekonečný rad:

$a_1+a_2+a_3+\dots$ (1) | $a_1; a_2\dots$ je daná postupnosť čísel.

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+a_3+\dots$

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1+a_2$
$s_3 = a_1+a_2+a_3$
. . . . . .
$s_n = a_1+\dots+a_n$
. . . . . .

$s_1; s_2; s_3, \dots$ $\{s_n\}$ (2) je postupnosť čiastočných súčtov radu (1)

1) $\{s_n\}$ má konečnú limitu: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

potom rad (1) je konvergentný; s je súčet radu (1).

2) $\{s_n\}$ má nevlastnú lim; alebo nemá limitu, vtedy hov., že rad (1) nekonverguje (diverguje) a nepriraďuje nijaký súčet.

Ak rad 1 má súčet s; píšeme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$

Pr. 1 $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$

$$s_1 = \frac{1}{2} \qquad\qquad = 1-\frac{1}{2}$$

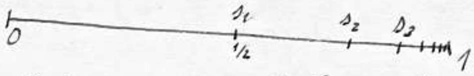
$$s_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad\qquad = 1-\frac{1}{4}$$

$$s_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8} \qquad\qquad = 1-\frac{1}{8}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$s_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n} \qquad = 1-\frac{1}{2^n}$$

$$\dots\dots\dots$$



$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

rad je konvergentný $s=1$.

Pr. 2 $\quad 1+1+1+\dots = \sum_{i=1}^{\infty} 1$

$s_1 = 1$
$s_2 = 2$
$s_3 = 3$
$s_n = n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

rad je divergentný

Pr. 3 $\quad 1-1+1-1+1-1+\dots$

$s_1 = 1$
$s_2 = 0$
$s_3 = 1$
$s_4 = 0$

$s_{2k+1} = 1 \qquad \lim s_{2k+1} = 1$

$s_{2k} = 0 \qquad \lim s_{2k} = 0$

$\{s_n\} = \{s_{2k+1}\} + \{s_{2k}\}$ — postupnosť s_n nemá limitu

rad je divergentný

V1 (Nutná podm. pre konvergenciu radu)

Ak $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje $\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dôkaz: predp.: rad konv. $\Rightarrow$ má súčet s

$s_1, s_2, s_3, s_4, \dots s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \dots \qquad \lim s_{n-1} = s$

$s_2, s_3, s_4, \dots s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots \qquad \lim s_n = s$

lebo rad konverg.

$(s_2-s_1), (s_3-s_2), \dots (s_n-s_{n-1}) \dots$

$$\lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s-s = 0$$

$$s_n = a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n$$
$$s_{n-1} = a_1+a_2+\dots\ a_{n-1}$$

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

Často sa používa obrátená veta k V1.

$$\lim (s_n - s_{n-1}) = \lim a_n = 0$$

Ak $\lim a_n \neq 0$ potom $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverguje.

2.§ Harmonický rad. Geometrický rad.

Rad tvaru $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$ nazv. harm. radom.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad ; \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad \rightarrow \quad e > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad / n>0$$

$$\ln e > n \ln\frac{n+1}{n}$$

$$1 > n\{\ln(n+1) - \ln n\}$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln(n) \qquad / n = \dots$$

$$1 > \ln 2 - \overset{0}{\ln 1}$$

$$\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$$

$$\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{n-1} > \ln n - \ln(n-1)$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n > \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) \qquad / \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = +\infty$$

$$\Downarrow$$

harmonický rad diverguje, nemá súčet

(hoci nutná podm. bola splnená)

Nech q je ľubov. číslo.

Geom. r.: $1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}+\dots$

$$s_n = 1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}$$

$$s_n = 1+q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2})$$

$$s_n = 1+q(s_n - q^{n-1})$$

$$s_n = 1+q\,s_n - q^n$$

$$(1-q)\cdot s_n = 1-q^n$$