

1.) Nech $|q| < 1$ $q \in (-1; +1)$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - 0$$

$$\underline{\underline{S = \frac{1}{1-q}}}$$

2.) Nech $|q| > 1$ $q \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = -\infty \quad \text{rad diverg.}$$

3.) Nech $q = 1$:

$1 + 1 + 1 + \dots$ diverguje (m. 2)

$q = -1$:

$1 - 1 + 1 - \dots$ diverguje (m. 3)

VI. Geom. rad konverguje právetedy keď $|q| < 1$.
V takomto prípade jeho súčet: $S = \frac{1}{1-q}$

Pozn. Na geom. rad budeme považovať aj rad:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots \quad / a \text{ ľubov. reáln. č.}$$

pre $|q| < 1$ konverguje: $S = \frac{a}{1-q}$

Pr. 1: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \quad \left| \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

Pr. 2: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots \quad \left| q = -\frac{1}{3} \right. \Rightarrow \text{rad konv.} \quad S = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

Pr. 3: $-4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \frac{4}{125} - \dots = -4 \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots \right) \quad \left| \begin{array}{l} a = -4 \\ q = +\frac{1}{5} \end{array} \right. \quad \text{r. konv.}$
 $S = \frac{-4}{1 - \frac{1}{5}} = -5$

3.8. Vlastnosti číselných radov

Majme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ (1)

VI.) Ak rad (1) má súčet S a c je ľ. reáln. č., potom r.
 $\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i = c a_1 + c a_2 + \dots$ (2) má súčet $c \cdot S$

Dôkaz: Predp. (1) má súčet $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ / ozn. n -ty čl. súčet r. (2) S_n
 $S_n = c a_1 + \dots + c a_n \quad \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right.$
 $\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot S}}$

V2. Nech $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ má súčet a

$\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ má súčet b ; potom rad $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + \dots$ je konvergentný a má súčet $a + b$.

Dôkaz:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \lim s_n = a$$

$$s'_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad \lim s'_n = b$$

$$\begin{aligned} s''_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = s_n + s'_n \end{aligned}$$

$$\lim s''_n = \lim (s_n + s'_n) = a + b$$

Pozn. V1 a 2 máme aj kombinovať, na predpokladov V1a? dá sa dok, že platí:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (c a_i + d b_i) = c a + d b$$

Niekedy sa niektorý rad od x -lého člena počnúc má ďalšie členy $= 0$. : $a_1 + a_2 + \dots + a_k + 0 + 0 + \dots$

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_k = a_1 + \dots + a_k$$

$$s_{k+1} = s_k$$

$$\dots \dots \dots$$

$$s_1; s_2; \dots s_k; s_k; s_k; \dots$$

$$\lim s_k = s_k$$

Pr.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + 0 + 0 + 0$$

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = \frac{4}{3}$$

$$s_3 = \frac{31}{27}$$

$$s_4 = \frac{31}{27}$$

$$\dots \dots$$

$$1) \frac{4}{3}, \frac{31}{27}, \frac{31}{27}; \dots$$

$$\lim \boxed{} = \frac{31}{27}$$

V3.

Nech rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je konv. Ak v ňom posuneme koniec počít členov, konvergentný rad bude znovu konvergentný, jeho súčet sa pritom môže zmeniť.

Dôkaz:

$$a_1 + a_2 + \dots a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$$

- konv. (1)

$$b_1 + b_2 + \dots b_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$$

konv. rad (2) / či konv.

$$(b_1 + a_1) + (b_2 + a_2) + \dots + (b_k + a_k) + 0 + 0 + \dots$$

$$s_k = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_k - a_k)$$

pretože s_k je konečné č., rad je konverg.

z V2 $\rightarrow$ aj (1)+(3) bude konverg.:

$$(1)+(3) = (2) \Rightarrow \text{aj rad 2 je konvergentný.}$$

Pozn.: Neexistuje jednotný postup pre výpočet súčtu radu.

Snažíme sa najskôr rozhodnúť či rad konverguje alebo nie. Ak konv. — hľadáme presnú hodnotu súčtu (takých je málo), alebo (hl.) približnú hodnotu súčtu.

Za pr. b. s. môžeme vziať s_m pre dost' veľké m .

4 § Rady s nerovnými členmi.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad a_i \geq 0 \quad (1)$$

pre čísl. súčty platí: $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ (2)

$\{s_m\}$ neklesajúca; patrí do monotonných postupností.

$$1 + \frac{1}{3} + 0 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots \quad / a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{1}{3} \dots$$

Ak je (2) ohraničená tak má vl. limitu, konverguje.

Ak je (2) neohr. $\rightarrow$ diverguje.

VI. [porovnávacie kritérium].

Majme 2 rady s nerovnými členmi: $a_1 + a_2 + \dots$ (1)

$$b_1 + b_2 + \dots \quad (2)$$

a nech pre každé prirodz. č. platí $a_n \leq b_n$

1.) Ak rad (2) konverguje $\rightarrow$ aj rad (1) konverguje

2.) Ak rad (1) diverguje $\rightarrow$ aj r. (2) diverguje

Dôkaz:

$$s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

$$S_m = b_1 + b_2 + \dots + b_m$$

1.) Predp. je (2) konverguje teda $\lim S_m$ exist. a je konečná potom $\{s_m\}$ je storo ohran. Pretože $S_m \geq s_m$ je aj postupnosť $\{s_m\}$ storo ohran. a má konečnú lim., čo $\Rightarrow$ je aj r(1) konverguje.

2.) Predp. je (1) diverg., teda $\{s_m\}$ je neohraničená, z nerovnosti $s_m \leq S_m \Rightarrow$ je neohr. aj $\{S_m\}$ a teda nemá vl. limitu $\Rightarrow$ je rad (2) diverguje.

Pr.

$$0,3572905\dots$$

$$0 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \dots \quad (1) \quad 0 \leq x_i \leq 9 \quad \left| \frac{x_i}{10^k} \right.$$

Ml. náčrtí rad:

$$0 \leq x_i < 10$$

$$\frac{10}{10} + \frac{10}{10^2} + \frac{10}{10^3} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \quad (2) \text{ geom. r. } / q = \frac{1}{10} < 1 \Rightarrow \text{rad konverg.}$$

Potom konverguje aj rad konver. (1).

Každé desatinné číslo mám vždy reálnu č., ktorú je súčtom tohoto desatinného čísla.

V2. [D'Alembertovo kritérium]

Majme rad s kladnými členmi $a_1 + a_2 + \dots$ (1) $a_i > 0$ 1. Ak pre k. prísl. č. n platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L < 1 \rightarrow$
rad (1) konverguje.2. Ak pre každé n platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, rad 1 diverguje

Dôkaz:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots \quad (1)$$

$$a_1 \left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_1} + \dots \right)$$

$$a_1 \left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_3} \frac{a_3}{a_2} \frac{a_2}{a_1} + \dots \right)$$

$$1) \quad a_1 (1 + L + L^2 + L^3 + \dots) \quad / \quad L < 1 \quad \text{g. r. - konv.}$$

konverg. aj rad (1) $\left[L \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \right]$ na zákl. V1

$$2) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{potomže do } a_1 [1 + L + L^2 + \dots] \quad L = 1$$

$$a_1 (1 + 1 + 1 + \dots)$$

~ rad diverguje
(ale je menšie než 1)



na zákl V1 diverguje aj (1).

Pozn.

Viemo si konv. alebo div. radu na nepoužiť ak zmeníme len konečný počet členov. $\Rightarrow$ Podielové kritérium môžeme použiť aj vtedy keď 1. podmienka platí len pre skoro vs. n .
Podobne aj s podmienkou 2.

Pr. 1 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} + \dots$

konv, alebo div. ?

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

d'Alembert. kr. : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right) > 1$

Pr. 2

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n+1} + \dots$$

↓
rad diverg.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} : \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

↓
rad konv.

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$a_3 = \frac{7}{2} + \frac{4}{3} = \frac{29}{6}$$

$$a_4 = \frac{29}{6} + \frac{5}{4} = \frac{73}{12}$$

$$2; \frac{7}{2}; \frac{29}{6}; \frac{73}{12}; \dots$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots$$

$$b_n = n \cdot 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\geq 1_n \geq n + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

II. III. 1970.

V3.

Nech vs. členy radu $a_1 + a_2 + \dots$ sú kladné čísla a nech $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

1) Ak $L < 1$ potom rad (1) konverguje

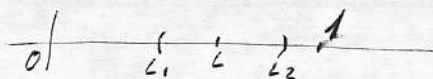
2) Ak $L > 1$ — " — (1) diverguje

3) $L = 1$ — " — potrebujeme rozhodnúť

Dôkaz: Podľa predp. veľy máme rad taký, že vs. čísla sú kladné.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L ; L < 1 \quad L_1 < 1$$

$$L_2 < 1$$

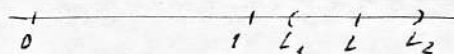


$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow$ vs. členy $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ ležia v $OL \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < L_2 < 1 \Rightarrow$
podľa V2 rad (1) konverguje. [platí pre vs. členy postupnosti.]

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$$

$$L_1 > 1$$

$$L_2 > 1$$



$\Downarrow$ vš. členy $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ leží v $OL \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ podíl VL sú divergentné.

$$Pr: \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

$$a_n = \frac{n}{2^n} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{konverg.}$$

V4: Cauchyho kritérium

Podrobľadajme, že rad $a_1 + a_2 + \dots (1)$ má kladné členy.

$$\text{predp.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

- 1.) Ak $l < 1$ rad konverguje
- $l > 1$ diverguje
- $l = 1$ neurčitý prípad.

Dôkaz: $a_1 + a_2 + \dots (1) \sim$ k nemu rastú. geom. rad.
 $l + l^2 + \dots + l^n + \dots (2).$

$$1.) \text{ nech } a_n < l^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < l$$

Ak $l < 1$ potom (2) konv. — aj (1) konverguje.

$$2.) \text{ nech } a_n > l^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > l$$

rad (2) pre $l \geq 1$ diverguje $\Rightarrow$ pre $l > 1$ diverguje aj rad (1).

$$Pr: \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3^2} \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3^3} \left(\frac{3}{4} \right)^3 + \dots + \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Integraľne kritérium:

V5: Mějme r. $a_1 + a_2 + \dots (1)$ v ktorom n -tý člen vieme vyjadriť ako $f(n)$: $a_n = f(n)$. Namísto $f(n)$ budeme uvažovať $f(x)$ a predp., že $f(x)$ je spoj., kladná, a klesajúca na intervale $(1, +\infty)$.

1.) Ak $\int_1^{\infty} f(x) dx$ je konečné číslo, potom rad (1) konverguje

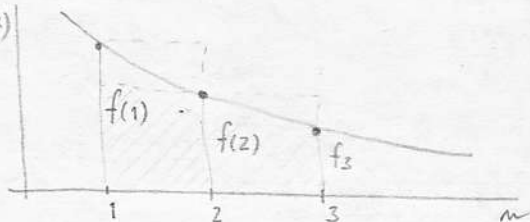
2.) Ak $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverguje, potom aj (1) diverguje.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \sim \text{harmon. rad.}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

Dôkaz: $f(x)$

18



namísto $a_1 + a_2 + \dots$ (1) môžeme uvažovať ekvív. nápis toho ist. radu: $f(1) + f(2) + \dots$

Dolný súčet: $\underline{S} = f(2) + f(3) + \dots + f(m) = \sum_{k=2}^m f(k) - f(1)$
 horný s. $\bar{S} = f(1) + f(2) + \dots = \sum_{k=1}^m f(k)$ } $\underline{S} \leq \int_1^m f(x) dx \leq \bar{S}$

1./2 predp.: $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverg. = konečné číslo

$$\sum_{k=1}^m f(k) \leq \int_1^m f(x) dx + f(1) < \int_1^{m+1} f(x) dx + f(1) - \text{je tiež integr. s kon. čísl.}$$

Ak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ je chr. m-tý čiastočný súčet (1) a ten je zhora ohran., má limitu a rad (1) je konvergentný.

2.) predp. že $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverguje:

$$\int_1^m f(x) dx \leq \sum_{k=1}^m f(k) - \text{int. diverguje, pretože nie je ohraničený} \Rightarrow \text{neohran. aj } \sum \Rightarrow \text{limita m-ého čiastočného súčtu nie je konečná} \Rightarrow \text{rad (1) diverguje.}$$

Pr: $1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \dots + \frac{1}{m^m} + \dots$ $f(m) = \frac{1}{m^m}$ / m reálne č. $f(x) = \frac{1}{x^m}$

$m=1 \dots 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ harm. $m=0 \dots 1 + 1 + 1 + \dots$ $m=-2 \dots 1 + 4 + 9 + \dots$ $m=4 \dots 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots$ - konv	$\left. \begin{array}{l} \dots \end{array} \right\} \text{div.}$	$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^m} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^m} dx \begin{cases} \text{pre } m > 1 \text{ konv} \\ \text{pre } m \leq 1 \text{ div} \end{cases}$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^m} dx = \int_1^{\infty} x^{-m} dx = \begin{cases} \ln x & \text{pre } m=1 \\ \frac{x^{-m+1}}{-m+1} & \text{pre } m \neq 1 \end{cases}$
--	--	--

1.) $m=1$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln b - \ln 1] = +\infty$ - diverg.

2.) $m > 1$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^m} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x^{m-1}(1-m)} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-m)b^{m-1}} - \frac{1}{1-m} = 0$ - konv.

3.) $m < 1$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^m} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{1-m} = +\infty$ - div.

$\Rightarrow$ rad konverg. pre $m > 1$.

Pozn.: Najlepšie výsledky (najvhodn. kritérium) dáva integr. krit.

§5

Absolútna a relatívna konverg. radov.

$$a_1 + a_2 + \dots \quad (1)$$

Členy môžu byť aj záporné.
Utvoríme k nemu rad s absolútnymi hodnotami jeho členov:

$$|a_1| + |a_2| + \dots \quad (2)$$

Dokážeme, že ak konverg. rad (2); potom bude konv. aj (1).

Hovoríme že rad (1) konverguje absolútne.

Môže nastať prípad že (1) konverg. a pritom (2) diverguje.

Hovoríme že r. (1) konverguje relatívne.

Pr: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ $q = -\frac{1}{2}$ — rad konv. absolútne.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ $q = \frac{1}{2}$... konverg.

Pr: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ dok. že konverguje (akom príp. že prv. rad konv. relatívne)
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ diverguje

V1. Ak konverg. r.: $|a_1| + |a_2| + \dots$ (1); potom konverguje aj r.: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ (2)

Dôkaz: Zastrojíme si dva pomocné rady:

$$b_i = a_i \quad \text{ak} \quad a_i > 0$$

$$b_i = 0 \quad \text{ak} \quad a_i \leq 0$$

$$\rightarrow c_i = -a_i \quad a_i < 0$$

$$c_i = 0 \quad a_i \geq 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad (3)$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots \quad (4)$$

Platí z r. (2)

Náporní z r. (2)

napr.: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + 0 - \frac{1}{20} + \dots$

$$b_i: 1 + 0 + \frac{1}{7} + 0 + \frac{1}{9} + 0 + 0 + \dots$$

$$c_i: 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{8} + 0 + 0 + \frac{1}{20} + \dots$$

Platí: $0 \leq b_i \leq |a_i|$

$0 \leq c_i \leq |a_i|$

Na zákl. porovn. kritéria konv. r. (1) potom konv. aj r. (3) a (4).

z konv. (4) $\Rightarrow$ že konv. aj rad $-c_1 - c_2 - c_3 - \dots$ (5)

Sčítame (5) + (3) $\rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ konverguje aj r. (2)

Nech čísla $a_1 + a_2 + a_3 \dots$ sú kladné. Uv.: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ (6).

Rad (6) max. radom so striedavými znamienkami (alternujúci r.)

pravdepodobne stried. znamienka

V2. Nech $a_1, a_2, a_3 \dots$ je klesajúca postupnosť kladných čísel.

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ potom r.: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ konverguje:

$a_1 > a_2 > a_3 \dots$ klesajúca postupnosť kladn. čísel.

Dôkaz: $\rho_1 = a_1$

$$\rho_3 = a_1 - (a_2 - a_3)$$

$$\rho_5 = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5)$$

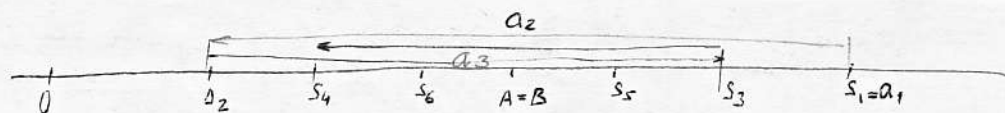
$$\{\rho_1, \rho_3, \rho_5, \dots\} \quad (7)$$

$$\rho_2 = a_1 - a_2$$

$$\rho_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$$

$$\rho_6 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$

$$\{\rho_2, \rho_4, \rho_6, \dots\} \quad (8)$$



↓ $\{s_{2m}\}$ je okr., a to ľubov. číslom $s_1; s_2; s_3; \dots$ pritom je to postupnosť rastúca $\Rightarrow$ má konečnú limitu $A = \sup\{s_2; s_4; \dots\}$.

$$A = \lim s_{2m} \quad (\text{z začiatku párneho počtu členov})$$

Postupnosť $\{M\}$ je klesajúca, z čoho okr. a ľub. čísl $s_2; s_4; \dots \Rightarrow$ má konečnú limitu $B = \inf\{s_1; s_3; \dots\}$

lim $s_{2m+1} = B$ preba ešte dok.: $A=B$

$$s_{2m+1} = a_1 - a_2 + \dots - a_{2m} + a_{2m+1}$$

$$s_{2m} = a_1 - a_2 + \dots - a_{2m}$$

$$s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1}$$

$$B - A = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

podľa predp. 1.6.1

$$\Downarrow A=B$$

Ukáz. že obidve vybrané postupnosti (7); (8) majú rovnakú limitu, potom tu i tá limitu má n -ty' číslomý' riadok radu (6) $\Rightarrow$ (6) je konverg.

Pr:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x} + \dots \quad (1) \text{ div. keď } x > 0 \quad |x| - \text{pevné číslo.}$$

$$2) \quad x < 0 \Rightarrow -x > 0$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$0 < \sin(-x) \leq 1$$

$$\frac{1}{\sin(-x)} \geq 1$$

$$\frac{1}{-\sin x} \geq 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{|\sin x|} + \frac{1}{|\sin 2x|} + \dots \quad \text{diverguje} \quad (2)$$

$$0 < |\sin x| \leq 1 \quad \text{pre } m x \neq k \pi$$

$$\frac{1}{|\sin x|} \geq 1$$

$$x \neq \frac{k}{n} \pi$$

$$1+1+1+\dots \quad (3) \text{ diverguje}$$

Pr: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad 0 < 1 \rightarrow$ daný rad konverguje

$$\begin{array}{r} 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ \frac{1}{2} = 0,5 \\ \dots \end{array}$$

Súčetom tohoto radu je e .

Pr: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} \dots$ konv.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ rad konv.

Pr: $\frac{\arcsin 1}{1!} + \frac{\arcsin 2^{-1}}{2!} + \frac{\arcsin 3^{-1}}{3!} + \dots + \frac{\arcsin n^{-1}}{n!} + \dots$ konv.

$$\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{array} \quad \left| \text{pre } -1 \leq x \leq 1 \right.$$

$0 < \arcsin \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{2} < 2$

$\frac{2}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{2}{n!} \dots$ rad väčší k pôvodnému konverguje

$2 \left\{ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \right\} = 2(e-1) \dots$ konečné číslo.

18. III. 1970.

§6 Krýšok radu

Majme číselný konv. rad: (1) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = S$
 Míchdy navrúme najť jeho súčet S , a preto is mnohých príp.
 A napradíme n -tým čiast. súčtom s_n - pre danú veľkú n .

$S = s_n + R_{n+1}$ $\left| \begin{array}{l} s_n - \text{súčet } n \text{ členov prvých} \\ R_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \end{array} \right.$

$R_{n+1} = S - s_n$

$|R_{n+1}| = |S - s_n| \sim$ absolutná chyba - míchdy ani toto nepoznáme.
 beríme preto jej horný odhad: c .

$|R_{n+1}| < c$.

a) alternujúce konvergentný rad.

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} - \dots$

$|R_{2m}| = |S - s_{2m-1}| = |-a_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} + \dots| < |-a_{2m}| = a_{2m}$

$|R_{2m}| < a_{2m}$

odhadn: $|R_{2m+1}| = |S - s_{2m}| = |a_{2m+1} - a_{2m+2} + \dots| < a_{2m+1}$

U altern. radov je chyba, ktorej sa dopustíme pri nachr. S číslom s_{2n} (s_{2n+1}), menšia než prvý člen rady v abs. hodnote.

Pr. hľadá členov radu treba sú. aby chyba $< 0,001$?

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

$$|R_n| < 0,001 = \frac{1}{1000} \rightarrow \frac{1}{1000} > \frac{1}{n!} \quad \begin{cases} 2! = 2 \\ \dots \\ 5! = 120 \\ 6! = 720 \end{cases} \quad \begin{matrix} 7! = 5040 \geq 1000 \\ \text{stačí prvých 6 členov ř.} \end{matrix}$$

b.) Majme abs. konv. ř. $a_1 + a_2 + \dots = s$ (1)

restu k nemu. ďalší konv. rad s menšou členmi, ktorého súčet vieme nájsť. Nech pre vs. n platí: $|a_n| \leq c_n$ $c_1 + c_2 + \dots$ (2)

Odhadn.: $|R_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots = K$

$$|R_n| \leq K$$

Pr. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] = 1 \rightarrow \text{konverg.}$$

$$S \doteq S_n = \frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$|R_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)} + \dots =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots = \frac{1}{n}$$

$$|R_n| < \frac{1}{n}$$

napr. pre chybu menš. než 0,01 musíme brať $n \geq 100$

III. Postupnosti a rady funkcií.

Predp. sú každému prísl. číslu n je prirad. f. 1 reálnym premenným. Nech vs. každá f. sú def. na množ. M . Potom hov. že je daná postupnosť funkcií: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$ (1) $\{f_n(x)\}$

Pr. $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$

Vzoberme pevné č. $x_0 \in M$, dosad. do (1):

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots$$
 (2)

Ak číselná post. (2) konv., hov. že postupnosť f. (1) konverguje v bode x_0 . Ak post. f. (1) konv. v každom bode množ. M , hov. že postupnosť f. (1) konv. na množine M .

Ťuhm nš. bodov, ktorej postupnosť (1) konv. - nazývame konvergenčným oborom (k. intervalom). N

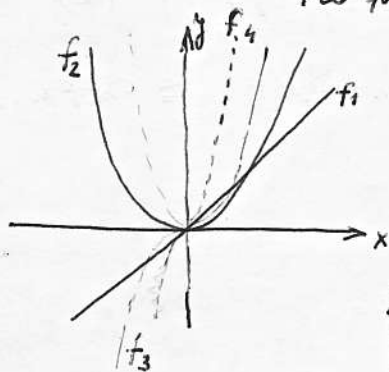
Predp. ke f . $f(x)$ je defin. na konverg. obore N postupnosti $f_n(x)$.
 Nech pre každ. $x_0 \in N$ platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$; potom hov. že $f(x)$ je limitnou f . postupnosti funkcie $f_n(x)$ na množ. N .

Pr. $x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n, \dots$ $M = (-\infty; +\infty)$

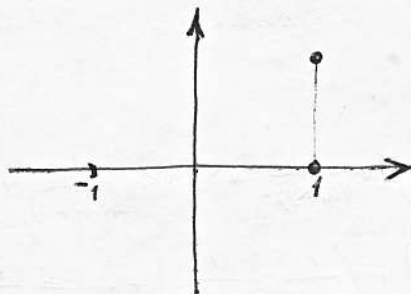
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{pre } x=1 \\ 0 & \text{pre } -1 < x < 1 \\ +\infty & \text{pre } x > 1 \end{cases}$$

} konverguje pre $M = (-1; 1)$

$x \leq -1$ neexist. limita



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{pre } x=1 \end{cases}$$



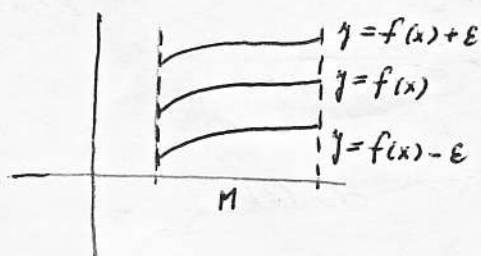
V tomto príkl. nš. $f_n(x)$ boli spojité avšak limitná f . už nie je spojitá. $\rightarrow$ pre limitnú f . postupnosti spojitých f . nemusí byť spojitá.

§2 Rovnomerná konvergenca postupnosti funkcií.

Majme posl. f . : $\{f_n(x)\}$ def. na M .

Def. Postupnosť $\{f_n(x)\}$ rovnomerne konverguje k f . $f(x)$ na množ. M , ak k ľubov. $\varepsilon > 0$ ex. $N(\varepsilon)$ také že pre nš $n > N$ a pre nš $x \in M$ je spln. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Pozn: $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$



$$O_{f(x)} = (f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon)$$

$f(x)$ limitná funkcia

Def. měno vyšetřuj tablo: Pos. $f_n(x)$ konv. rovnoměrně na M k $f(x)$ ak skoro vs. f je pos. $f_n(x)$ tečie ve vsilci okolia $O(f_n)$ pro vs. $x \in M$.

Pr.: $\frac{\sin x}{1}; \frac{\sin 2x}{2}; \frac{\sin 3x}{3}; \dots \frac{\sin nx}{n} \dots$ konverguje rovnoměrně?

$$\left. \begin{array}{l} |\sin nx| \leq 1 \quad / \cdot \frac{1}{n} \\ \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nx = 0 \quad \text{pro vs. } x \in M(-\infty, +\infty)$$

$\Rightarrow$ pos. konverguje k $f(x) = 0$

$\nearrow$ limitní funkcia

či konv. rovnoměrně:

$$\left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad - \text{co platí pro vs. } x \in (-\infty, +\infty)$$

$n > \frac{1}{\varepsilon} \dots \dots$ stačí zvol. $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

§3 Funkcionální rad

Máme pos. f. $f_n(x)$ které sú def. na M .

Utvoríme $f_1(x) + f_2(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (1)$ — nasv. funkcionální radom (radom funkcií)

Čiastkové súčet. $S_1(x) = f_1(x)$

$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x) \quad (2)$$

Rad (1) konverg. v bode x_0 ak v b. x_0 konv. postupnosť (2).

Šlihm. vs. bodov v ktorom konv. (1) nasv. oborom konvergenčie (1).

Pr.: $x + \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{x^n}{n^3} + \dots$ — pre ktoré x konverguje? — obor konverg.

$$\text{d'a: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3} \right|}{\left| \frac{x^n}{n^3} \right|} = e \cdot \left| x \right| \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = |x|$$

ak chceme aby konv.: $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

ak $|x| = 1$

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \\ -1 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \dots \end{array} \right\} \text{na sáhl. int. káľ. konverg.}$$

Záver: pre $x \in (-1, 1)$ rad konverguje

F.r.(1) nazývame majovizovateľným na mn. M , ak ex. taký konv. čí. v. s neráp. členmi $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (2), kde pre vs $x \in M$ a pre vs. n platí: $|f_n(x)| \leq a_n$

Pozn.: Číselný r.(2) je majovizovateľný rad k r.(1).

V1. (Weierstrass) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na mn. M je majovizovateľný potom tento rad rovnomenne konverguje na mn. M .

Pozn.: f.r. rovnomenne konv. ak jeho postupnosť čiastkových súčtov rovnomenne konverguje.

Pv: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + \dots + \frac{1}{n^2+x^2} + \dots$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} m^2 = n^2 \\ m^2 + x^2 \geq n^2 \end{array} \right\} \frac{1}{m^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} \text{ platí pre vs } x; n$$

maj. rad: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ - vieme že konverguje $\Rightarrow$ iu (1) rovnomen. konv. pre $x \in (-\infty; +\infty)$

V2. Ak postupnosť spoj. f. $f_n(x)$ rovnomenne konv. k f. $f(x)$ na mn. $M = \langle a; b \rangle$, potom f. $f(x)$ je spoj. na mn. M .

Dôkaz: zvol. $x_0 \in M$ podľa predp. post. f_n rovnomen. konv. k f. $f(x)$

rovnomen. konv. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Teda platí: k ľ. } \varepsilon > 0 \text{ ex. } N \dots n > N \dots x \in M \dots |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ x_0 + \Delta x \in M \dots |f_n(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{array} \right.$

spojitosť $\left\{ \begin{array}{l} \text{Podľa predp. } f_n(x) \text{ je spoj. na } M \Rightarrow \text{je spoj. aj v bode } x_0. \\ \text{pre vs } \frac{\varepsilon}{3} > 0 \text{ ex } \delta > 0 \dots |f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| &= |\{f(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0 + \Delta x)\} + \{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)\} + \{f_n(x_0) - f(x_0)\}| \\ &\leq |f(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0 + \Delta x)| + |f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

K ľ. kladn ε ex. $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ je spoj. v $x_0 \in M$
je spoj. pre $x_0 \in \langle a; b \rangle$

Esti musime dok. spojitosť z prava v a a z ľava v b.

Da sa dokázať analogicky.

f. $f(x)$ je spoj. na $\langle a; b \rangle$

V3. Súčet rovnomerne konv. radu f spojiték na inter. a, b je f spojité na tomto intervale.

Pozn. V3 vyplýva z V2.

$f_1(x) + \dots$ rad prevedieme na postupnosť, č. súč. sú spoj. ...

V4. Nech rad sp. f. : $f_1(x) + f_2(x) + \dots$ (1) rovnomerne konv. na M . Potom tento rad môžeme integrovať člen za členom.

Dôkaz: $M = \langle a, b \rangle$

Dok: $\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots = \int_a^b S(x) dx$ ($S(x)$ je spoj. ... V3)

ozn. $S_n(x) = \int_a^b f_1(x) + \int_a^b f_2(x) + \dots + \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x) + \dots\} = \int_a^b S_n(x) dx$

Dok: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \int_a^b S(x) dx \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$

odhadn. $\left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| = \left| \int_a^b [S_n(x) - S(x)] dx \right|$ - použ. V. 3. hodnotu

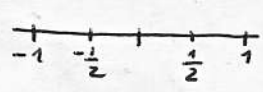
$= \int_a^b |S_n(x) - S(x)| dx < \epsilon(b-a)$ treba uk. že lim prvý abs. súč. = 0
 [a je $\epsilon \rightarrow 0$]

Rad má súčet, rovnomerne konverguje $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_0) - S(x_0)] = 0$

↓
 integrovaný rad má súčet rovný $\int_a^b S(x) dx$.

Pr: $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \sim$ geom. rad. konverguje pre $|x| < 1$ $-1 < x < 1$

hľady konv. rovnomerne:



roben. $P \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ale: $1 + P + P^2 + \dots$ konv. a je majorantný k prv. $\Rightarrow$

pre každý interval prv. rad rovnom. konv. V1.

$\int_0^{1/2} 1 dx + \int_0^{1/2} x dx + \dots + \int_0^{1/2} x^n dx + \dots = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$

$[x]_0^{1/2} + [\frac{x^2}{2}]_0^{1/2} + \dots = [-\ln|1-x|]_0^{1/2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} + \dots = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$

V5. Nech rad $f_1(x) + f_2(x) + \dots$ konverguje na mn M a má súčet S . Predp. že jeho členy majú der. 1. r. : $f_1'(x) + f_2'(x) + \dots$ Nech tento rad rovnomerne konverguje, nech má súčet $G(x)$.

Potom platí: $S'(x) = G(x)$

Pr

Sučet: $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots = S(x)$

d'o. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \right|}{\left| \frac{x^{4n-1}}{4n-1} \right|} = |x^4| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{4n+3} = x^4 \quad x^4 < 1 \text{ - konv. obl.}$

$x^2 + x^6 + x^{10} + \dots + x^{4n-2} + \dots = G(x)$ - geom. rad. $q = x^4$

ak $x^4 < 1 \rightarrow$ rad (konv.)

konv. normovanie $n < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} > \sim$ ako n predch. príkl.

$$G(x) = \frac{1}{1-x^4}$$

Príklad podľa V. $S'(x) = G(x) \Rightarrow S(x) = \int_0^x G(x) dx$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x^4} dx = \dots = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctg x$$

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_m(x-a)^m + \dots \quad (1)$$

$a, \dots$ koeficienty radu
 $a \dots$ reálne číslo

položíme: $x-a = z$

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (2)$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

Pre konv.:

1. (3) konverguje pre vs. reálne č. x : $x \in (-\infty; +\infty)$

$$Pr: 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot |x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \cdot |x| < 1 \quad - \text{konv. pre vs. } x \text{ reálne.}$$

2. (3) konv. pre niektoré x . (pre niektoré x diverguje)

$$Pr: x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots \quad (+1) \quad |q| < 1 \text{ konv. ; konv.: } (-1; +1) \ni x$$

3. Rad (3) konv. iba v bode 0

$$Pr: 1!x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n!x^n| = +\infty \quad \text{pre } x \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n!x^n| = 0 \quad \text{len pre } x = 0$$

Každý mocninový rad konverguje v bode $x=0$

V1. (Abelova)

Nech rad $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ (3) konverguje v bode $x_0 \neq 0$. Potom konverguje absolútne v intervale $(-|x_0|; |x_0|)$.

Dôkaz: Podľa predp. (3) konv. v $x_0 \neq 0 \rightarrow$ čís. r. $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$ (4) konverguje. $\Rightarrow$ postupnosť jeho členov $\{a_0; a_1 x_0; \dots\}$ je ohraničená.
 & číslo $M > 0$, že pre vs. n platí: $|a_n x_0^n| < M$.

$$\begin{array}{c} x \\ \hline -|x_0| \quad 0 \quad |x_0| \end{array}$$

$$\text{zvol: } x \dots |x| < |x_0|$$

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x_0^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| < M \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right|$$

Máme zostrojil' majorantný rad k (3):

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x^2}{x_0^2} \right| + \dots + M \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| + \dots \quad (5)$$

$$M \left(1 + \left| \frac{x}{x_0} \right| + \dots + \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| + \dots \right)$$

Rad (5) je konvergentný geom. rad: $(q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \text{ podľa predp.})$
 a (3) je majorantný. $\Rightarrow$ (3) abs. konv. v intervale $(-|x_0|; |x_0|)$.

V2.

Keď máme mocninový rad $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ (3). konvergentný aspoň v 1 bode $x_0 \neq 0$ ex. taký interval $(-R; R)$; $R > 0$ že rad (3) konverg v každom vnút. bode a diverguje v každom vonkajšom bode tohto intervalu.

R - polomer konvergenzie

$(-R; R)$ - interval konvergenzie $\rightarrow$

Dôkaz: V2 1.) Nech rad (3) konv. v int. $(-\infty; +\infty)$. Potom konv. v ľubov. x , absolutne teda aj v nejakom K , kde $|x| < N$

$$-\infty \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad N \quad \quad \quad +\infty$$

potom $R = +\infty$

2.) Nech r. (3) konv. v bodoch $\neq 0 \Rightarrow$ podľa VI konv. v otv. intervale $(-c; +c)$

zobereme $(0; c)$; označ: $R = \sup\{0; c\}$

$$0 \quad \quad \quad c \quad \quad \quad K_1$$

[najmenšie z horných ohraničení — supremum]

[ak $x < G$; G je najmenš. č. pre ktoré to platí]

Chceme dok., že R bude polomer konvergencie.

Krok: $x \in (0; c)$... potom vždy platí: $x < R$.

$$0 < R < +\infty$$

Analogicky aj pre $(-c; 0)$: $(-R; R)$; R -pol. teor.

$(-\infty; R)$; $(R; +\infty)$ — diverg.

Pozn: Veta o konvergenč. bodoch R ; $-R$ nehorv. $\Rightarrow$ vlastnosť radu (3) pre tieto body treba osobitne overovať.

Zhrnutie:

1.) Ak (3) konv. v $(-\infty; +\infty)$; $R = +\infty$

2.) Ak (3) konv. v $(-R; R)$; $0 < R < +\infty$

3.) Ak — " — $x_0 = 0$; $R = 0$

Najd' vzorec pre polomer konvergencie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot l < 1 \rightarrow |x| < \frac{1}{l} : -\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l} \quad \left(\begin{array}{l} l \neq 0 \\ l \neq +\infty \end{array} \right)$$

$$x \in \left(-\frac{1}{l}; \frac{1}{l}\right)$$

$$R = \frac{1}{l}$$

Ak $0 < l < +\infty \dots R = \frac{1}{l}$

Ak $l = 0 \dots R = +\infty$

Ak $l = +\infty \dots R = 0$

Pr. 1.

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

polomer a interval konv.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1 \quad \rightarrow R = 1 \quad \text{rad konv pre } x \in (-1; 1)$$

$x = -1, \dots -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$ konv.

$x = 1, \dots 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ div.

rad konv. v $x \in (-1; 1)$

Pr. 2.

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/(2n+2)!}{1/(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 \quad \rightarrow R = +\infty$$

rad konv pre $x \in (-\infty; +\infty)$

určovanie polomeru konvergence nuda sa urobiť výpočtom uvedeným spôsobom pri radoch nasled. typu:

$$(2x-3) + \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} + \dots + \frac{(2x-3)^n}{2n-1} + \dots$$

Použ. d'A. krit:

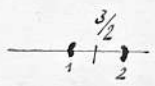
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-3)^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{(2x-3)^n} \right| = |2x-3| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = |2x-3| < 1$$

a.) $2x-3 < 1$

$x < 2$

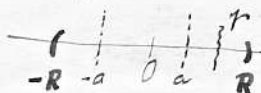
b.) $-2x+3 < 1$

$x > 1$



$R = \frac{1}{2}$

V3. Nech rad $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ konverguje absolútne v $(-R; R)$. Potom konverguje rovnomerne v každom intervale, ktorý je rovnomerným intervalom intervalu $(-R; R)$.



$\langle -a; a \rangle \subset (-R; R) \quad |a| > 0$

Dôkaz:

Podľa predp. v(3) konv. v int $(-R; R)$; rob. až o; $a \in (-R; R) \Rightarrow \langle a; a \rangle \subset (-R; R)$

$-R < -a < a < R$

zvol. r: $a < r < R$

— dosad. do (3):

$a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots$

ur. abs. hodn:

$|a_0| + |a_1r| + |a_2r^2| + \dots \quad (4)$

číslný rad, zhľadom na r z int $(-R; R)$ je konvergentný

Uk v nom nahrad. r číslom a:

$|a_0| + |a_1a| + |a_2a^2| + \dots \quad (5)$ dostaneme rad, ktorý je menší než rad (4).

(5) na náklade norm. kritéria je konvergentný.

Vzober. ľubov. $x \in \langle -a; a \rangle$; pre takého x h radu (3) rad (5) je majorantný (5) konv.; potom so Weierstrassovej vety $\Rightarrow$ že r. (3) pre $x \in \langle -a; a \rangle$ rovnomerne konverguje.

Do sa dok. že súčet mocninového radu v intervale konvergence je spojita funkcia.

V4. Nech $R > 0$ je polomer konv. r.: $a_0 + a_1x + \dots$ (3); potom jeho súčet $S(x)$ má deriváciu a platí: $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = G(x)$ (4)
 $S'(x) = G(x)$

Dôkaz: Dok, že (4); (3) majú to isté R .

$$\text{pre (3)} \dots \rho = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\text{pre (4)} \dots \tau = \lim \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n \cdot a_n} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \lim \left| \frac{n+1}{n} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

[obdobná veta pre funkčné rady].

P: Vety o derivovaní f. radov a z toho ná r. (3) v každom vnútr. bode int. $(-R; R)$ rovnom. konv. vypl. aj videním ľahko vety.

Pr: $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots = S(x)$ konv. pre $x \in (-\infty; +\infty)$

$$0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots + n \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots = S'(x)$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \dots = S'(x)$$

$$S'(x) = S(x) \rightarrow \frac{S'(x)}{S(x)} = 1$$

$$\int_0^x \frac{S'(x)}{S(x)} dx = \int_0^x 1 dx$$

$$\left[\ln |S(x)| \right]_0^x = [x]_0^x$$

$$\ln |S(x)| - \ln |S(0)| = x$$

$$\left| \begin{array}{l} S(0) = 1 \quad - \text{dosť do } x=0 \\ \ln S(0) = \ln 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\ln |S(x)| = x$$

$$\underline{\underline{S(x) = e^x}}$$

V5. Nech $(-R; R)$ je int. konv. radu $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ potom v ľubov. vnútr. inter. z int. $(-R; R)$ môžeme ľahko sad integ. člen na členom, pričom sa jeho príemer konv. nemení.

Dôkaz: —

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = S(x)$$

$$\int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \dots = G(x)$$

$$G(x) = \int_0^x S(x) dx \quad | \quad x \in (-R; R)$$

(Pr.)

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x$$

Chceme nájsť mern. rad, ktorého súčtom je práve f. $\text{arctg } x$.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad x \in (-1; 1)$$

$$\text{subst: } x \dots \dots -x^2$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

$$|x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$$



$$\int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \text{arctg } x$$

$$\text{pre } x: \quad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} \doteq 0,25 - \frac{1}{4^4 \cdot 3} + \frac{1}{4^6 \cdot 5} = 0,25 - \frac{1}{64 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 1024} = 0,25 - 0,0052 + 0,0002 =$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{4} \doteq 0,2449.$$

(32)

(4)

$$\sigma_3 \leq \frac{1}{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4} \sim \text{abs. chyba.}$$

R 2

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$|q| = -x \quad |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx$$

$$\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right] = \left[\ln |1+x| \right]_0^x$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln |1+x|$$

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln |1-x|$$

sc.

$$2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$\text{pre } x \in (-1; 1)$$

Maximální pří. č. N. - vyp. ln N.

$$\frac{1+x}{1-x} = N$$

$$\Rightarrow 1+x = N - Nx$$

$$x(1+N) = N-1$$

$$x = \frac{N-1}{N+1} < 1$$

$$\ln N = 2 \left[\frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{N-1}{N+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{N-1}{N+1} \right)^5 + \dots \right]$$

$$\ln 2 = 2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^7 + \dots \right\}$$

$$x = \frac{N-1}{N+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

vidy je $x < 1$!!

$$\int e^{x^2} dx \quad \text{series. (len milióny)}$$

$$\int e^{x^m} \cdot x^{m-1} dx \quad \text{riš.}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\int e^{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \dots \right) dx = x + \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \dots$$

$$\text{pre } x \in (-\infty; +\infty)$$

1. IV. 1970.

Nech $f, f(x)$ je súčtom mocninného radu podľa $m. (x-a)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + \dots \quad (1)$$

následujúci je výp. koeficienty $a_0, \dots, a_m$.
Rad je konv. - máme k. der., člen na členom.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + ma_m(x-a)^{m-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 3 a_3 + 1 \cdot 2 a_2 + \dots + (m-1) \cdot m a_m(x-a)^{m-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + \dots + (m-2)(m-1) \cdot m a_m(x-a)^{m-3} + \dots$$

$$f^{(m)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) m a_m + \dots + (m-1)m(m+1)(x-a) + \dots$$

Do radu a do týchto der. der. radu: a .

$$f(a) = a_0$$

$$f'(a) = a_1$$

$$f''(a) = 1 \cdot 2 \cdot a_2$$

 $f^{(m)}(a)$

$$f^{(m)}(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot m \cdot a_m$$

$$f(a) = a_0$$

$$f'(a) = 1! a_1$$

$$f''(a) = 2! a_2$$

 $\vdots$

$$f^{(m)}(a) = m! a_m$$

$$\rightarrow a_0 = f(a)$$

$$a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

$$\vdots$$

$$a_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

do (1)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + \dots$$

ak $f, f(x)$ sa dá vyjadriť mocn. radom podľa mocniny $(x-a)$; radom koef. radu sú jednoducho určené.

$$\text{Rad: } f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots \text{ naz. Taylorovým radom.} \quad (3)$$

Podmienky konvergencie T.r.

$$S_m(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

$$[\text{Vt. podm. } f(x) = f(a) + \dots + \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}]$$

$$\left(\frac{f}{a} \right)$$

$$f \in O_a$$

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!} \cdot (x-a)^{m+1}$$

(4)

výpočet radu

$$f(x) = S_m(x) + R_m(x)$$

$$f(x) - S_m(x) = R_m(x)$$

Nech:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = f(x) \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \{f(x) - S_m(x)\} = 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(x) = 0$$

Obrátene: Nech

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m(x) = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \{f(x) - S_m(x)\} = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = f(x)$$

Dob. sme že rad (3) konv. vt. a len wtedy, ak $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m(x) = 0$.
Potom súčet $r.(3) = S_m(x)$

Atk polinomu do Tr. $a=0$ - deryaneme Mac Laurinov rad:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

- Tr. podľa mocnin x .

Pr:1.

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^f}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$f \in \mathcal{O}_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^f}{(n+1)!} \cdot |x^{n+1}| = e^f \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = 0 \quad |e^f \text{ je okl. } i > 2$$

pre vs. x konverguje.

Pr:2.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \dots$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0 \dots$$

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

vyšššie radu:

$$R_n(x) = \left\{ \pm \frac{\cos f}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{alebo} \quad \pm \frac{\sin f}{(n+1)!} x^{n+1} \right\}$$

$$-1 \leq \cos f \leq 1$$

$$-1 \leq \sin f \leq 1$$

} sú ohraničené fmbai pre ľubov. $f \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \left| \frac{\cos f}{\sin f} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = 0 \quad \text{rad konv; možno napr: } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Pr:3.

$$f(x) = \cos(x)$$

Možno postupovať ako pri $\sin x$; alebo použiť pravidlo o derivovaní mocninových radov!

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin(x) = \text{nepárna}$$

Uvoľní pre $\cos x$ sú iba párne mocniny, a platí: $\cos(-x) = \cos x$
 $\cos(x) \sim \text{párna f.}$

Pr:4.

$$f(x) = (1+x)^m$$

$m \neq 0$, reálne č.

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = m$$

$$f''(0) = m(m-1)$$

$$\dots f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1)$$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{n}x^n + \dots$$

$\rightarrow$

$$\binom{\frac{m}{2}}{3} = \frac{\frac{m}{2}(\frac{m}{2}-1)(\frac{m}{2}-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

(35)

Pre tento rad môžeme napísať:

a, ak m je prirodz. č. potom derivácia $m+1$ v. a ďalšie sa rovnajú 0. Dost. rad s konečným počtom členov.
Binomická veta:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m \quad \text{je konv. pre každé } x.$$

b, m nie je prirodz. č.; ale $\neq 0$
potom pri der. nedostaneme k.č. Rad má nekonečný počet členov. Naz. ho binomickým radom.

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots$$

Interval konvergenencie radu (b):

$$\text{dĽ: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{m}{n} x^{n+1}}{\binom{m}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{|\binom{m}{n+1}|}{|\binom{m}{n}|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n+1)!}}{\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1} \right| = |x| \cdot 1 = |x|.$$

$$|x| < 1 \quad \dots \quad -1 < x < 1 \quad \dots \quad x \in (-1; 1) \quad \text{rad konverguje}$$

§6. Niektoré poznámky o radoch s komplexnými členmi.

majme f. $W(x) = u(x) + i v(x)$ / i - imaginárna jednotka: $i^2 = -1$
 $u(x)$, $v(x)$ - sú reálne f. premennej x , dĽ. na intervale.

Výraz $W(x)$ naz.: komplexná f. reálnej premennej x .

Pre f. $W(x)$ definujeme niektoré pojmy:

1.) Spojitosť: Ak $u(x)$ a $v(x)$ sú spoj., potom aj $W(x)$ je spoj.

2.) Limita: $\lim_{x \rightarrow x_0} W(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) + i \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$

Ak niek. z limit neexistuje, potom nemá limitu ani f. $W(x)$.

3.) Derivácia: $W'(x) = u'(x) + i v'(x)$

ak niekterá z f. nemá deriváciu, nemá ani $W(x)$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad \text{dĽ: za } x \dots i \cdot x$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Eulerove vzorce

$$\rightarrow \text{majm: } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

Použití výsledkov v dif. rovniciach:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1)$$

Predp. že f. $w(x)$ je riešením rovnice (1). Potom sú riešeniami aj f. $u(x)$ a $v(x)$.

Dôkaz: Predp. že $w(x)$ je rieš. (1).

$$w(x) = u(x) + i v(x)$$

$$w'(x) = u'(x) + i v'(x)$$

$$w''(x) = u''(x) + i v''(x)$$

$$w''(x) + a_1 w'(x) + a_2 w(x) = 0$$

$$0 = u''(x) + i v''(x) + a_1 \{u'(x) + i v'(x)\} + a_2 \{u(x) + i v(x)\}$$

$$\{u''(x) + a_1 u'(x) + a_2 u(x)\} + i \{v''(x) + a_1 v'(x) + a_2 v(x)\} = 0$$

$$\{u''(x) + a_1 u'(x) + a_2 u(x)\} = 0$$

$$\{v''(x) + a_1 v'(x) + a_2 v(x)\} = 0$$

$u(x)$ a $v(x)$ sú riešeniami (1).

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

1) má reálne rôzne korene k_1, k_2 : p.p. $y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

2) reálne, dvojnásobné: $k_1 = k_2$

$$y = e^{k_1 x} (c_1 + c_2 x)$$

3) $k_1 = \alpha + i\beta$ $k_2 = \alpha - i\beta$

Partikulárne riešenie: $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

odv.

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$y = c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} [c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}] =$$

$$= e^{\alpha x} \{c_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)\}$$

$$y = e^{\alpha x} \{(c_1 + c_2) \cos \beta x + i(c_1 - c_2) \sin \beta x\} = e^{\alpha x} \{A \cos \beta x + B \sin \beta x\}$$

§7. Použitie mocninných radov

Pomocou m.r. môžeme približne vypočítať π ; e ; $\sqrt{e}$; ...
 môžeme približne riešiť určité integr. a dif. rovnice.

1. $\sqrt{5}$ *pom. binomického radu*

$$\sqrt{5} = \sqrt{4(1+\frac{1}{4})} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$$

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \dots$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}} = (1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{4} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{16} + \binom{\frac{1}{2}}{3}\frac{1}{64} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{64} + \dots = 1 + 0,125 - 0,0077 + 0,0009 - \dots$$

$$\approx 1 + 0,125 - 0,0077 + 0,0009 = 1,1182$$

$$\sqrt{5} \approx 2 \cdot 1,1182 = 2,2364$$

rad je alternujúci $\Rightarrow$ ďalší člen určuje chybu.

$$R_4 < \left| \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{4^4} \right| = \frac{0,9375}{6140} < \frac{1}{6000} = 0,00016 \Rightarrow$$

výsledok je presný na 3 desatinné miesta.

2.

$$\int_{0,1}^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{metódou}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

8.IV.1970.

$$= \int_{0,1}^{0,5} (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots) dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right]_{0,1}^{0,5} = \dots$$

$$\int_{0,1}^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0,5 - \frac{0,5^3}{18} - 0,1 + \frac{0,1^3}{18} = 0,5 + \frac{1}{18 \cdot 1000} - \frac{0,125}{18} - 0,1 = \underline{0,39215}$$

$$R_2 < \left| \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right|_{0,1}^{0,5} = \left| \frac{0,5^5}{5 \cdot 5!} - \frac{0,1^5}{5 \cdot 5!} \right| < \frac{1}{2^5 \cdot 5 \cdot 5!} < \frac{1}{160 \cdot 120} < \frac{1}{100 \cdot 100}$$

$$R_2 < 0,0001$$

3. Riešenie d.r. pom. nekonečných radov:

Rozlišujeme 2 podtypy: a.) použiť T.r. (mocn.r. so špec. koef.)

b.) použiť mocninový rad

1. $y' = f(x; y)$ súdanie $x_0; y(x_0)$, all. rieš., ktoré prechádzať $(x_0; y(x_0))$
 - all. partikulárne riešenie - som. $y(x_0) = y_0$

$$y'(x_0) = f[x_0; y(x_0)]$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f(x_0; y(x_0))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0; y(x_0))}{\partial y} \cdot y'(x_0)$$

Predp. re all. riešenie má tvar: $g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots$

Riesenie: $y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} [x-x_0] + \frac{y''(x_0)}{2!} [x-x_0]^2 + \dots$ ak konverg.
 v určitom intervale, potom f. $y(x)$ je riešením d. r.
 Tento postup sa dá použiť aj na dr. výšších r.

Pr. 1:

$$y' = 3x^2 - y^2 \quad / \quad x_0 = 0 \quad y(x_0) = 2 \quad P(0; 2)$$

$$y'_0 = 3 \cdot 0^2 - 2^2 = -4$$

$$y'' = 6x - 2y \cdot y'$$

$$y''_0 = 6 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot (-4) = 16$$

$$y''' = 6 - 2 \cdot y' \cdot y' - 2y \cdot y''$$

$$y'''_0 = 6 - 2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 16 = -90$$

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!} (x-x_0) + \frac{y''_0}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{y'''_0}{3!} (x-x_0)^3 + \dots$$

$$y = 2 - 4x + 8x^2 - 15x^3 + \dots$$

Pr. 2:

$$y'' - xy = 0 \quad / \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = xy$$

$$y''' = y + xy'$$

$$y^{(iv)} = y' + y' + xy''$$

$$y^{(v)} = 2y' + y'' + xy'''$$

$$y^{(6)} = 4y'' + xy^{(4)}$$

$$y''_0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$y'''_0 = 1 + 0 \cdot 0$$

$$y^{(iv)}_0 = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0$$

$$y^{(v)}_0 = 2 \cdot 0 + 0 + 0 \cdot 0$$

$$y^{(6)}_0 = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0$$

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \dots$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 1$$

$$y'_0 = 0$$

$$y''_0 = 0$$

$$y'''_0 = 1$$

$$y^{(iv)}_0 = 0$$

$$y^{(v)}_0 = 0$$

$$y^{(6)}_0 = 0$$

$$y^{(7)}_0 = 0$$

$$y^{(8)}_0 = 0$$

II. postup: najčad. ho powi. u lineárných dif. rovníc.

Za mío. y zvolíme mocn. rad: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

(Niekolko prvejch) Koeficientov vypocí. z počiatočných podm.

Další (kof. vypocí. porovnávacím met. (využí. Vo rovn 2. polyn.)

Pr. 1: $y'' + 4x^2 y' - 3xy = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 3 \quad y'(0) = -1$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

$$(2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots) + (4a_1 x^2 + 8a_2 x^3 + 12a_3 x^4 + \dots + 4n a_n x^{n+1} + \dots) - (3a_0 x - 3a_1 x^2 - 3a_2 x^3 - \dots - 3a_n x^{n+1} + \dots) = 0 + 0x + \dots$$

$$2a_2 = 0 \quad a_2 = 0$$

$$6a_3 - 3a_0 = 0 \quad a_3 = 0$$

$$12a_4 + 4a_1 - 3a_1 = 0 \quad a_4 = 0$$

$$20a_5 + 8a_2 - 3a_2 = 0 \quad a_5 = 0$$

u poč. podmínok: $y_0 = 3 \dots x = 0 \Rightarrow a_0 = 3$

tak isto $\dots \dots \dots a_1 = -1$

Polom: $a_3 = \frac{3}{2}$ ≈ 3.2071

$a_4 = \frac{1}{12}$

$$y = 3 - 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{3}{2} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + 0 + \dots$$

$$y = 3 - x + \frac{3}{2} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \dots$$

Pr. 2.

$$y'' - 2y' = 0$$

predp. ries.: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots + (n-1)na_n x^{n-2} + (n+1)na_{n+1} x^{n-1} + \dots$$

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots) - 2(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots) = 0$$

$$2a_2 - 2a_1 = 0$$

$$6a_3 - 4a_2 = 0$$

$$12a_4 - 6a_3 = 0$$

$$\dots$$

$$n(n+1)a_{n+1} - 2na_n = 0$$

$$2a_2 - 2a_1 = 0$$

$$3a_3 - 2a_2 = 0$$

$$4a_4 - 2a_3 = 0$$

$$(n+1)a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$a_2 = a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{3} a_1$$

$$a_4 = \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} a_1\right)$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1}$$

$$a_2 = a_1$$

$$a_3 = \frac{2^2}{2 \cdot 3} a_1$$

$$a_4 = \frac{2^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_1$$

$$a_{n+1} = \frac{2^n}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)} a_1$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \frac{2^2}{3!} x^3 a_1 + \frac{2^3}{4!} a_1 x^4 + \dots + \frac{2^n}{(n+1)!} a_1 x^{n+1} + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 \left(x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^2}{3!} x^3 + \frac{2^3}{4!} x^4 + \dots + \frac{2^n}{(n+1)!} x^{n+1} + \dots \right)$$

$$y = a_0 + \frac{a_1}{2} \left(\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots + \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right)$$

$$y = \underbrace{a_0}_{c_1} - \frac{a_1}{2} + \underbrace{\frac{a_1}{2}}_{c_2} \left(1 + \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots \right)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{2x}$$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$k^2 - 2k = 0 \quad \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \text{ries.: } y = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 e^{2x} = c_1 + c_2 e^{2x}$$

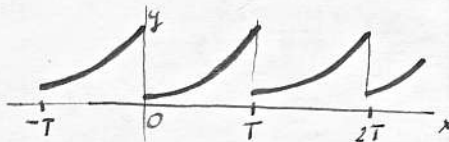
IV. FOURIEROVE RADY

§1. Pomocné úvahy.

Nech $f(x)$ je periodická na svojom def. obore M — to zn. sú ex. také číslo $T \in M$ že aj $(T+x) \in M$ a platí:

$$f(x+T) = f(x) \quad (1)$$

Číslo T nazývame periodou $f(x)$.



Ak T je perioda $f(x)$ potom aj $n \cdot T$ (n — celé číslo) je periodou tejto funkcie.

Na periódu budeme považovať také najmenšie č. T , pre ktoré platí (1)

Vlastnosti periodických funkcií:

- 1) súčet, rozdiel, súčin, podiel per. f. s per. T je opäť per. f. s per. T
- 2) ak $f(x)$ má periódu T , potom $f(ax)$ má per.: $\frac{T}{a}$:

napr.: $\cos x \dots 2\pi$

$\cos 3x \dots \frac{2\pi}{3}$

$\cos nx \dots \frac{2\pi}{n}$

- 3) Nech z $f(x)$ ex. Lieh integrálny: $\int_a^{a+T} f(x) dx$ $\int_b^{b+T} f(x) dx$
potom platí: $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx \quad (2)$

Dôkaz: $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b+T} f(x) dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x) dx =$

$$\left| \begin{aligned} \int_{b+T}^{a+T} f(x) dx &= \int_b^a f(u+T) du = \int_b^a f(u) du = \int_b^a f(x) dx \\ x &= u+T \end{aligned} \right|$$

$$= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b+T} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$$

§2. Trigonometrický rad. Rad Fourierov.

Tr. r.: $\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots$
 $+ (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (1)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

$a_1, \dots, b_1, \dots$ sú reálne čísla — koeficienty radu 3

Každý člen radu (3) má periodu 2π .

$\frac{a_0}{2}$ - dův. perioda ; 1 náleží 2π ; ... posl. : $\frac{2\pi}{n}$.
nejdelší a perioda je 2π .

Nechť rad 3 rovnoměrně konv. na $(-\pi; \pi)$ a nechť sičít lokolo radu je f. $f(x)$. Aby sme vedeli učit f. $f(x)$ musíme najstho vyp. koeficienty $a_0; b_1; a_1; \dots$.

Vyp. nast. integrály:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \sin(mx+nx) = \sin mx \cdot \cos nx + \cos mx \cdot \sin nx \\ (2) \sin(mx-nx) = \sin mx \cdot \cos nx - \cos mx \cdot \sin nx \\ (3) \cos(mx+nx) = \cos mx \cdot \cos nx - \sin mx \cdot \sin nx \\ (4) \cos(mx-nx) = \cos mx \cdot \cos nx + \sin mx \cdot \sin nx \end{array} \right.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx \stackrel{(3+4)}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \quad \text{ak } m \neq n$$

$$\text{ak } m=n: \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2mx + 1) dx = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{2m}{2m} x + x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

ne: $m \neq n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx \stackrel{(4-3)}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

ak: $m=n$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ 1 - \cos 2mx \} dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx \stackrel{(1-2)}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin(m+n)x - \sin(m-n)x \} dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\cos(m-n)\pi}{m-n} + \frac{\cos(m+n)(-\pi)}{m+n} - \frac{\cos(m-n)(-\pi)}{m-n} \right] = 0$$

ak $m=n$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin 2mx dx + 0 \} dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2mx}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2m\pi}{2m} + \frac{\cos 2m(-\pi)}{2m} \right] = 0$$

Podľa predp. (3) konv.

$$(4) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Položí r. rovnom konv. na $(-\pi; \pi)$; $f(x)$ je spoj. $\rightarrow$ máme (4) in tege. v intervale $(-\pi; \pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \left(a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \right) + \dots + \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) + \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} [x]_{-\pi}^{\pi} + a_1 [\cos x]_{-\pi}^{\pi} + b_1 [-\sin x]_{-\pi}^{\pi} + \dots + a_n \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + b_n \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi + 0 + 0 + \dots + b_n \left[-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n(-\pi)}{n} \right] + \dots + \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5)$$

Vynásobíme rovn. (4) s $\cos nx$ a int. od $-\pi$ po π .

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \left(a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos nx dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos nx dx \right) + \dots \\ &+ \dots + \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_0}{2} \cdot 0 + (a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0) + \dots + (a_n \pi + b_n \cdot 0) + \dots$$

[ma prednosť 3 int. !!!]

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (6) \quad \text{pre } n = 1, 2, 3, \dots$$

Vynás. (4) $\sin nx$; integr. v $\langle -\pi; \pi \rangle$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \left(a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin nx dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin nx dx \right) + \\ &+ \dots + \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{a_0}{2} \cdot 0 + (a_1 \cdot 0 + b_1 \pi) + \dots + (a_n \cdot 0 + b_n \pi) + \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (7) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

22. IV. 1970.

Vznika otázka, pre ktoré f . $f(x)$ máme vypracovať konštanty $a_0 \dots$, $b_0 \dots$. Odp. ná f . $f(x)$ optimálne číslo podm.:

1.) je periodická s per. 2π

2.) v $\langle -\pi; \pi \rangle$ je po číslach spoj. Potom môžeme vyprac. koeficienty podľa vzor. uvedených.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourierov rad funkcie $f(x)$

Gučel toto radu nemusí byť f . $f(x)$.

§3. Poslačujúce podmienky pre rozklad f. do Four. r.

Bod x_0 nazývame bodom nespojitosti prvého druhu f. $f(x)$ ak existujú konečné limity z prava a z ľava k f. $f(x)$ v bode x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \quad - \text{z prava}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \quad - \text{z ľava}$$

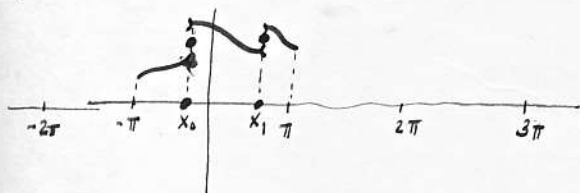


V1. (Dirichletova v.)

Nech f. $f(x)$ má periódu 2π a na $(-\pi; \pi)$ je spojitá, alebo má konečný počet bodov nespojitosti 1-ho druhu. Nech $(-\pi; \pi)$ môžeme rozložiť na konečný počet čiastočných intervalov tak, či vo vnútri každého z nich je f. $f(x)$ monotónna.

Podom Four. r. $f \leftarrow f(x)$ konverguje pre vs. x , pričom v bodoch spojitosti jeho súčet je rovný $f(x)$, a v bodoch nespoj. 1-ho druhu jeho súčet je: $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

Ohran toho Four. rad $f \leftarrow f(x)$ rovnomerne konverg. na každom čiastočnom bode, ktorý aj svoj konverg. bodmi je čiastočným intervalu, v ktorom je $f(x)$ spojitá.



V2. Nech f. $f(x)$ má periódu 2π a nech $f(x)$ a $f'(x)$ sú spoj. na $(-\pi; \pi)$, alebo majú konečný počet bodov nespojitosti 1-ho druhu.

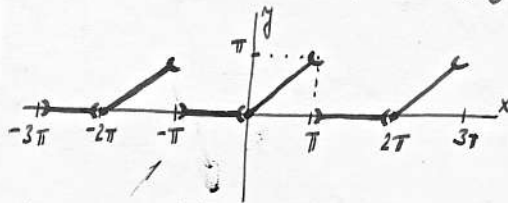
Podom Four. r. $f \leftarrow f(x)$ konv. pre vs. x pričom jeho súčet v bodoch spojitosti = $f(x)$ a v bodoch nespoj. 1-ho dr. = $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

Ohran toho F. r. pre f. $f(x)$ rovnomerne konverg. na každom intervale, ktorý aj so svoj konverg. bodmi je čiastočným intervalu, v ktorom je f. spojitá.

Poznámka: ex. f. e ktoré vyhovujú predpokladom obidvoch viet ale ex. aj f. e ktoré vyhovujú len jednému z tých predpokladov.

44. Pr. Row. do F. r. $f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{pre } -\pi < x < 0 \end{cases}$

príslom $f(x+2\pi) = f(x)$



bad nespojitelná.

Atame nap.: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$
 alebo ex. predpokladaj.

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

nulu môžeme vynechať.

$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin mx}{m} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{m} dx = 0 - \frac{1}{\pi m} \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_0^{\pi}$

$a_m = -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos mx}{m^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi m^2} [\cos m\pi - 1] = \begin{cases} 0 & \text{pre } m \text{ - párne} \\ -\frac{2}{\pi m^2} & \text{pre } m \text{ - nepárne} \end{cases}$

$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos mx}{m} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos mx}{m} dx =$
 $[0 \sim \pi \text{ ?}] \quad u = x \quad u' = \sin mx$

$b_m = -\frac{\pi \cos m\pi}{\pi m} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin m\pi}{m^2} \right]_0^{\pi} = -\frac{\cos m\pi}{m} = \begin{cases} -\frac{1}{m} & \text{pre } m \text{ párne} \\ \frac{1}{m} & \text{ak } m \text{ je nepárne.} \end{cases}$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi} \cos x + \sin x \right) + \left(0 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \left(-\frac{2}{9\pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{2}{25\pi} \cos 5x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$

$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{2}{25\pi} \cos 5x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$

n. bode nespojitosti: $\frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$

keď $x = \pi$ $0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{9\pi} - \frac{2}{25\pi} - \dots$

$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) \rightarrow \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

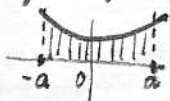
§4. Fourierov rad pre párne a nep. funkcie s periódou 2π .

J. $f(x)$ much je def. na mm. M . $f(x)$ je párna na M ak pre vs $x \in M$ plati: $f(x) = f(-x)$.

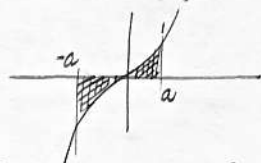
f. $f(x)$ je nepárna na M , ak pre vs $x \in M$ plati: $f(-x) = -f(x)$

much f. $f(x)$ je definovaná na $\langle -a; a \rangle$.

1. predp. že $f(x)$ je párna: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(-z)(-dz) + \int_0^a f(z) dz = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$



2.) Predp. že $f(x)$ je nepárna.



$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-z)(-dz) + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(z) dz + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Poznámka: Súčin dvoch párných a tiež súčin 2 nepárnych f je funkciou párna.

Súčin párných a nepárnych f je f nepárna.

Nech $g(x)$; $f(x)$ je def. na M . Ak $f(x)$ a $g(x)$ sú párne, utvoríme $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

1.) $F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = F(x)$

2.) Ak obidve sú nep., $F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x) = F(x)$

3.) $f(x)$ párna ; $g(x)$ nep. $F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [f(x)] \cdot [-g(x)] = -f(x) \cdot g(x) = -F(x)$

Poznámka: Učinu je $f \cdot \sin x$ je nepárna a $f \cdot \cos x$ je párna.

Tieto výsledky používame na výpočet koeficientov pre Four. rad.

A. Predp. že f $f(x)$ je párna a periodická s per. 2π a to ľahko sa dá previesť do Four. radu.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \text{podľa predp.} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx ; n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \dots = 0 \quad [\text{integrál z nepárnej } f!]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Four. rad pre párnou f obsahuje iba členy s kosínom.
t.j. kosínusový rad.

B. Predp. že $f(x)$ je nepárna, a periodická s per. 2π ; a ľahko sa dá previesť do Four. radu.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \dots = 0 \quad [\text{int. z nep. } f.]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, \dots$$

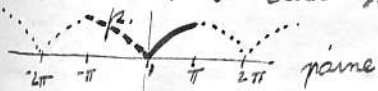
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

- Ak $f(x)$ je nepárna ; f obsahuje len sinus.

Ak f $f(x)$ je def. na $(0; \pi)$ a vyhovuje podmienkam rozložitelnosti do Four. r. , potom v tomto int. máme f rozložiť rôznymi spôsobmi.

Ak chceme f $f(x)$ rozl. do radu s kosínusami, potom f predĺžime o interval $(-\pi; 0)$ ako párnu ; aby platilo: $f(-x) = f(x)$ na $(-\pi; \pi)$.

Ak chceme $f(x)$ rozložiť do radu so sin., potom f predĺžime o interval $(-\pi; 0)$ ako nepárnu ; aby platilo: $f(-x) = -f(x)$ na $(-\pi; \pi)$



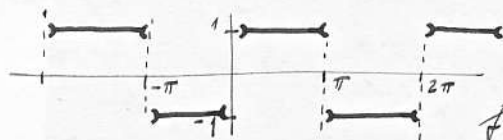
párna



nepárna.

Pr. 1. Rozlož' do F. r. s periodou 2π f:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{pre } 0 < x < \pi \end{cases}$$



$$\frac{f(k\pi-0) + f(k\pi+0)}{2} = 0 \quad \text{v bodoch nespojivosti}$$

f. nepárna.

$$a_n = 0$$

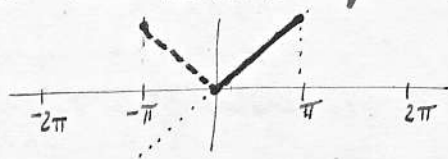
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n} \right] = \frac{4}{\pi n} [1 - \cos n\pi] = \begin{cases} 0 & \text{— párne } n \\ \frac{4}{\pi n} & \text{— nepárne } n \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin 3x + \frac{4}{5\pi} \sin 5x + \dots = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

keď $x = \frac{\pi}{2}$:

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) \rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Pr. 2. Rozl. do F. r. f. $f(x) = x$ na $<0; \pi>$ aby F. r. obsahoval členy $\sin$ a $\cos$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } 0 \leq x \leq \pi \\ -x & \text{pre } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

určime párnosť f.!

— párna f. $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[1 \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} [\cos n\pi - 1] = \begin{cases} 0 & \dots \text{párne} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \dots \text{nepárne } n. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{3^2\pi} \cos 3x - \frac{4}{5^2\pi} \cos 5x - \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots \right)$$

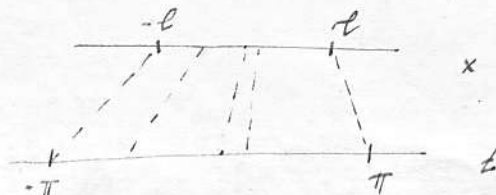
V int. $<0; \pi>$ je $f(x) \equiv \varphi(x)$

$$\varphi(x) = |x| \quad \text{pre } x \in <-\pi; \pi>$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right)$$

§5. F. r. s ľubovoľnou dĺžkou periódy.

Nech f , $f(x)$ je periodická s periodou 2ℓ ; $\ell > 0$
 a nech je po číastkach spojitá na $<-\ell; \ell>$. Zavedieme do $f(x)$
 na x takú substitúciu, aby sme dostali f s periodou dĺžky
 2π .



$$x : \ell = t : \pi \rightarrow x = \frac{\ell t}{\pi}$$

$$t = \frac{\pi}{\ell} x$$

$f(\frac{t}{\pi})$ ak do $f(x)$ položíme $x = \frac{t}{\pi}$

pr. 2π $< -\pi; \pi >$

$$f\left(\frac{t}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{t}{\pi}\right) \cos nt \, dt \quad n=0,1,2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{t}{\pi}\right) \sin nt \, dt \quad n=1,2,\dots$$

2o rovnici (1) přičteme kx : $t = \pi x / \pi$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x) \quad x \in (-l; l)$$

$$t = \frac{\pi}{l} x$$

$$dt = \frac{\pi}{l} dx \rightarrow dx = \frac{l}{\pi} dt$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \left(\frac{l}{\pi} dx\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n = \dots = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad n=1,2,\dots$$

Všec. pr. ak $f(x)$ je párná ma $< -l; l >$ ma náhl. 54:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad n=0,1,2$$

$$b_n = 0$$

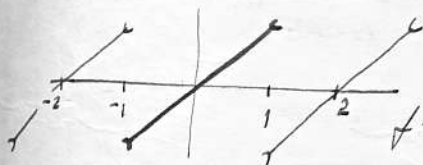
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (3)$$

ak $f(x)$ je nepárná:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad n=1,2,\dots \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (4)$$

Pr. Máme rovn. do F.r. $f(x) = x$ s periodou 2 ma $(-1; 1)$



f je nepárná $\rightarrow$ sinusový rozvoj $\rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin \frac{n\pi}{1} x \, dx = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \left[-x \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 + \left[\frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi} \right]_0^1$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [-x \cos n\pi x]_0^1 + \frac{2}{n^2 \pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2 \sin n\pi x}{n^2 \pi^2}$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} [\cos n\pi - 0] = -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi$$

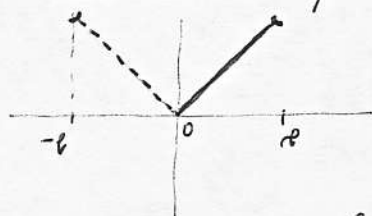
$\frac{2}{n\pi}$ párně 0
 $+\frac{2}{n\pi}$ nepárně

$$x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \dots \right] \quad x \in (-1; 1)$$

$f(x)$ parna: $a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx$; $n=0,1,\dots$
 $b_n = 0$

$f(x)$ neparna: $a_n = 0$
 $b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$; $n=1,2,\dots$

Pt. 2) Rozv. do F.v. f $f(x)=0$ v interval $(0;\ell)$, tak aby rad obs. členy s harmonickými.



$\langle -\ell; \ell \rangle$ párnaf.

$f(x) = x$ pre $x \in (0; \ell)$

$f(x) = -x$ pre $x \in (-\ell; 0)$

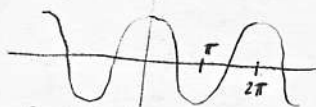
$f(x) = |x|$ pre $x \in \langle -\ell; \ell \rangle$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx = \frac{2}{\ell} \left[x \cdot \frac{\ell}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\ell} x - \int \frac{\ell}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx \right]_0^{\ell}$$

$\uparrow$ u $\uparrow$ dv
 $u' = 1$ $dv = \frac{\ell}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$

$$= \frac{2}{\ell} \left[\frac{\ell^2}{n\pi} \sin n\pi - 0 + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{\ell} x - \cos \frac{\ell^2}{n^2\pi^2} \right] = \frac{2}{\ell} \left[0 - \frac{\ell^2}{n^2\pi^2} (-1)^n \right]$$

$$a_n = \frac{2\ell}{n^2\pi^2} \left[\sin n\pi + \frac{\cos n\pi}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] = \frac{2\ell}{n^2\pi^2} \left[0 + \frac{1}{n\pi} (-1)^n - \frac{1}{n\pi} \right] = \frac{2\ell}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{pre } n \text{ párna} \\ -\frac{4\ell}{n^2\pi^2} & \text{pre } n \text{ nepár.} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x dx = \frac{2}{\ell} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\ell} = \ell$$

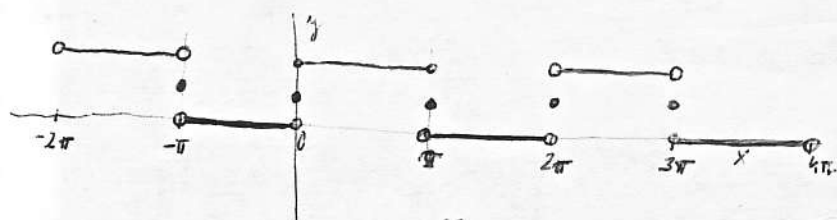
$$|x| = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{\ell} + \frac{4\ell}{3^2\pi^2} \cos \frac{3\pi x}{\ell} - \frac{4\ell}{5^2\pi^2} \cos \frac{5\pi x}{\ell} + \dots - \frac{4\ell}{(2n-1)^2\pi^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{\ell} + \dots$$

$$|x| = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{\ell} - \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{\ell} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{\ell} - \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{\ell} + \dots \right]$$

Pt. 3) Rozv. do F.v. f $f(x)$ má int $\langle 0; 2\pi \rangle$

definovaná takto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{pre } \pi < x < 2\pi \\ \frac{1}{2} & \text{pre } x=0 \quad x=\pi \quad x=2\pi \end{cases}$$



ani parna ani neparna

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{\pi} [\pi - 0] = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} = \begin{cases} \text{nep.} & \frac{2}{\pi n} \\ \text{párne} & -0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi \cdot 1} \sin x + \frac{2}{\pi \cdot 3} \sin 3x + \frac{2}{\pi \cdot 5} \sin 5x + \dots + \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)x + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{(2n-1)} \sin(2n-1)x + \dots \right)$$

§6. Ortogonálne systémy funkcií

Nech $f, f(x)$ a $g(x)$ sú spojité na uzavret. int. $\langle a, b \rangle$. F. $f(x)$ a $g(x)$ nazývame ortogonálnymi na $\langle a, b \rangle$ ak $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0$.

Postupnosť $f, f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ (1) spojilých na $\langle a, b \rangle$ nazývame ortogonálnym systémom f. na $\langle a, b \rangle$ ak pre ľubov. 2 funkcie z (1) platí: $\int_a^b f_i(x) \cdot f_j(x) dx = 0$ pre $i \neq j$

Budeme predp., že každá z f. z postupnosti (1) $\neq 0$

Pr.1. Uv. či syst. f.: $\frac{1}{2}; \sin x; \cos x; \sin 2x; \cos 2x; \dots \sin nx; \cos nx$ je ort. na int. $\langle -\pi; \pi \rangle$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin mx dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2m} [-\cos m\pi + \cos m(-\pi)] = \frac{1}{2m} [-\cos m\pi + \cos m\pi] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \frac{1}{2m} [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{pre } m=1, 2, 3$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cdot \cos qx dx = 0 \quad (\text{pri r. l. k. h. v. F. v.})$$

Systém f. je ortogonálny na $\langle -\pi; \pi \rangle$.

Pr.2. Uv., či s. f. $\sin x; \sin 2x; \dots \sin nx; \dots$ je ort. na int. $\langle 0; \pi \rangle$.

$$\int_0^{\pi} \sin px \cdot \sin qx dx = \begin{cases} \cos(p+q) = \cos p \cos q - \sin p \sin q & (1) \\ \cos(p-q) = \cos p \cos q + \sin p \sin q \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(p-q)x - \cos(p+q)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q} \right]_0^{\pi} = 0$$

Systém je ortogonálny.

Ortogonalný systém (1) sa zachováva ak každá f. zo syst. vynásobíme konštantou: $\lambda_1 f_1(x); \lambda_2 f_2(x); \dots \lambda_n f_n(x)$ (1')

$$\int_a^b \lambda_i f_i(x) \cdot \lambda_j f_j(x) dx = \lambda_i \cdot \lambda_j \int_a^b f_i(x) \cdot f_j(x) dx = 0 \quad i \neq j$$

na $\langle a; b \rangle$

- System (1) je ortonormální (ortonormovaný) ak je ortogonální na $\langle a; b \rangle$
- 1) ak platí: $\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0$ pre $i \neq j$ a ak je systém (1) normovaný;
 - 2) ak platí: $\int_a^b [\varphi_i(x)]^2 dx = 1$ pre $i = 1, 2, \dots$

Tieto dve podmienky môžeme zapísať:

φ_i je ortonormálny ak platí: $\int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pre } i \neq j \\ 1 & \text{pre } i = j \end{cases}$

Pr. 3.) Zist. či n.f.: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ je ortonormálny na $\langle 0; \pi \rangle$

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin px \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin qx \cdot dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin px \cdot \sin qx dx = 0 \quad \text{pre } q \neq p \Rightarrow \text{ortogon.}$$

$$\int_0^\pi \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx \right]^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2mx}{2} dx$$

$\sin x = y \quad dx = \frac{dy}{m}$

$$\frac{2}{\pi m} \int_0^{m\pi} \sin^2 y dy = \frac{2}{\pi m} \left[-\frac{\cos y \sin y}{2} + \frac{y}{2} \right]_0^{m\pi} = \frac{2}{\pi m} \left[0 + \frac{\pi m}{2} \right] = 1 \Rightarrow \text{normál.}$$

φ_i je ortonormálny.

K pr. 2 a 3 sa dá "usúdiť" (môžeme sa dať aj dohádzať) že ľubov. ortogonálny systém f. (1) na int $\langle a; b \rangle$ môžeme "normovať" ak vynásobíme každú f. systému vhodnou konštantou, ktorú nazveme normou funkcií.

Budeme λ_n voliť tak aby platilo: $\int_a^b \{\lambda_n \varphi_n(x)\}^2 dx = 1$ pre $n = 1, 2, \dots$

$$\lambda_n^2 \int_a^b \{\varphi_n(x)\}^2 dx = 1 \rightarrow \lambda_n^2 = \frac{1}{\int_a^b \{\varphi_n(x)\}^2 dx} \Rightarrow \lambda_n = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \{\varphi_n(x)\}^2 dx}} \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots$$

Ak do syst. (1') vypočítame jednotlivé λ takto, potom dost. ortonormálny systém funkcií.

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\pi \sin^2 nx dx}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\pi}{2} - 0 \right]}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Rad $a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_n \varphi_n(x) + \dots$ (2) naz. radom ortogonálnych systémom (1). Čísla a_1, a_n naz. koeficientami radu. Nech f. $f(x)$ je súčtom radu (2), ktorý rovnáme na konv na $\langle a; b \rangle$. Potom môžeme:

$f(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$. (3) Číslami je syst. koef. $a_1, \dots, a_n$.

Výpis: rad (3) s $P_n(x)$ a int. v int. $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b f(x) \cdot P_n(x) dx = \int_a^b a_1 P_1(x) P_n(x) dx + \dots + \int_a^b a_n [P_n(x)]^2 dx + \dots$$

(indeks $n=0$ jako
bude ortog.)

$$\int_a^b f(x) \cdot P_n(x) dx = a_n \int_a^b [P_n(x)]^2 dx \Rightarrow a_n = \frac{\int_a^b P_n(x) \cdot f(x) dx}{\int_a^b P_n^2(x) dx} \text{ pro } n=1, 2, \dots \quad (4)$$

Ob. systém (1) lze předpokládat, potom $a_n = \frac{1}{\int_a^b P_n(x) dx}$ pro $n=1, 2, \dots$

Nechť $f, f(x)$ je libovolná, spojitá, nebo má konečný počet bodů nepřítomnosti 1.-ho druhu na $\langle a, b \rangle$.

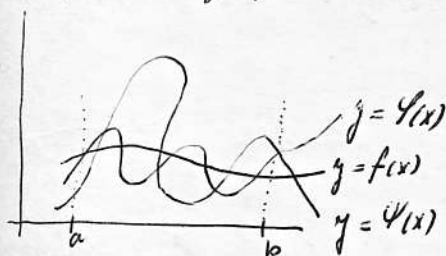
F. radem $f, f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ ortogonálně-konvergent. (1) nazýváme rad:

$$a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) + \dots + a_n P_n(x) + \dots \quad (5) \text{ kde koef.}$$

$a_1, \dots, a_n$ výp. podle vz. (4).

§7. Střední kvadratická odchylka dvou funkcí.

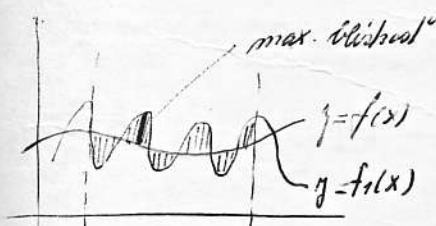
mezi spoj. f. $f(x)$ $g(x)$ $\psi(x)$ defin. na $\langle a, b \rangle$.



Pro nás bude velmi důležité, že libovolná f. (g_n nebo g_m) může nahradit (aproximuje) f. $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ maximálně jednoho pojmu přesněji vyjádřit.

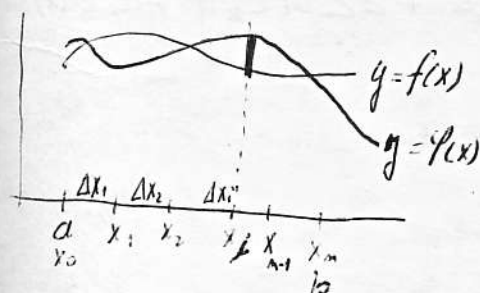
Abyste mohli defin. blízkost f. $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ k f. $f(x)$ jako maximum $|f(x) - f_1(x)|$ pro $x \in \langle a, b \rangle$

potom na našem obrázku by f. $f(x)$ lépeji aproximovala $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ než f. $\psi(x)$



Nechť na $\langle a, b \rangle$ má def. spoj. f. $f(x)$ a $g(x)$. Rozdělme $\langle a, b \rangle$ libovolnými body na m rovnoměrných či nerovnoměrných intervalů.

Rozdíl $f(x_i) - g(x_i)$ je chyba, kterou se dopustíme při nahrazení f - g f(x) f - $g(x)$ v bode x_0



Číslo J_m definujeme: $J_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \{f(x_i) - g(x_i)\}^2$ nazýváme st. kvadr. chybou f - $g(x)$ a f(x) v bodech x_i kde $i=1, 2, \dots, m$.

Číslo J pro které platí: $J^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} J_m^2$ nazýváme střední kvadratickou odchylkou f. $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{f(x_i) - \varphi(x_i)\}^2$$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \rightarrow \Delta x_i(b-a) = \frac{1}{n}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \Delta x_i = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx} \quad \text{stredná štvadratická odchýlka}$$

[Míchedy v literatúre bez miernika $\frac{1}{b-a}$]

Majme ortogon. syst. f -í na $\langle a, b \rangle$: $\varphi_1(x); \varphi_2(x); \varphi_3(x) \dots$ (1)

Vetáb: $c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) = P_n(x)$ / c_k sú čísla
 najviac možným n -leho radu vypládom k danému systému (1)
 (mnohočlenom)

Nech $f, f(x)$ je spojité, alebo je čiastočne spojité na $\langle a, b \rangle$.
 Písmu nasledujúcu úlohu:

Zo nš. mnohočlenov $P_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$ radiu n máme nájsť ten,
 ktorý bude mať najmenšiu strednú kvadr. odchýlku od $f, f(x)$ na
 intervale $\langle a, b \rangle$.

na príbehu môžeme predp. riešenie (1) 6.V.1970.

$\varphi_1(x); \varphi_2(x) \dots; \varphi_n(x)$ (1) je ortogon. na $\langle a, b \rangle$.

Ak by nebolo, tak to môž. urobiť nkonštantou. Preto ľah. úl.
 spoc. v tom, či treba vypoč. koef. $c_1; \dots; c_n$ tak aby platilo

$$\int_a^b \{f(x) - P_n(x)\}^2 dx = \int_a^b \left\{ f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\}^2 dx = \text{má minim. hodnotu.}$$

$$= \int_a^b \left\{ f^2(x) - 2f(x) \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) + \left[\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 \right\} dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx + 2 \sum_{\substack{i < k \\ i \neq k}} c_i c_k \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx$$

$$\text{z 6§ (5') } \dots \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = a_k \quad k=1 \dots n$$

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad i \neq k \quad / \text{lebo syst. je ortog.}$$

$$\int_a^b [\varphi_i(x)]^2 dx = 1 \quad i=1 \dots n \quad / \text{ortonorm.}$$

$$= \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=1}^n c_k \cdot a_k + \sum_{k=1}^n c_k^2 + 0 =$$

int: $\int_a^b [f(x)]^2 dx$ $\int_a^b \{f(x) - P_n(x)\}^2 dx$ bude min; ak pravoí strana bude minimálna. 53

$$\int_a^b \{f(x) - P_n(x)\}^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx + \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2$$

nech $= 0 \Leftrightarrow c_k = a_k$ pre $k = 1 \dots n$
potom v. bude min.

Teda vo vs. mnohočl. n -leho r. u_{n-1} a ortogon. syst. najmenš. kv. odch. od $f(x)$ v int $\langle a; b \rangle$ má mnohočlen s Fourierovými koeficientami.

$$\frac{1}{2}; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x, \dots \quad \langle -\pi; \pi \rangle$$

Mnohočl. n -leho r.:

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

vo vs. ľuho. mnohočlenov,

odchýľku od $f(x)$ má mnohočl. s F. koef. tj mnohočlen, ktoru:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

$$Utv. minimum \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^n (c_k \varphi_k(x))]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \rightarrow \text{ke rad } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \text{ je konvergentný (čiast' ničel je zhora odhran.)}$$

$$\text{nech } m \rightarrow \infty \dots \sum_{k=1}^m a_k^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad \text{Besselova nerovnosť}$$

Ak F. rad orlonormálného n. pre $f(x)$ má $\langle a; b \rangle$ rovnomerne konverguje a má ničel $f(x)$; potom

$$\int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)]^2 dx \rightarrow 0; \text{ potom}$$

$$\text{Besselova nerovnosť prejde v rovnosť: } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

A konv. čís. radu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ $a_k^2 \rightarrow 0 \Rightarrow a_k \rightarrow 0 \Rightarrow$ koef. F. radu pri orlonorm. systéme konverguje k 0.

§8. Úloha o chvení struny.

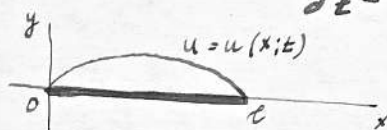
Nech struna je v normále napnutá a má dĺžku l . (Na koncoch upern.). Nech je napn. so smere x . Jej koncové body $x=0$; $x=l$

Nech je struna dr. vychýlená a rovnor. pohyb a v každom jej bode ex. urč. počiatocná rýchlosť:

Uvaž. malé chvení. Upravenie so zmenou, a chv. prebieha v . . . rovine.

Pre túto predp. je dokázané, že f. $u(x;t)$ ktorá charakterizuje polohu dr. v každom časovom okamž. vyhovuje d.r.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1) \quad \text{ / kde } a > 0 \text{ a je konst.}$$



rovn. (1) je maz. lineárna parciálna d.r. 2-ho r.

Úloha: nájsť rovnice riešenia; u ; a to pri ohraničujúcich podmienkach: $u(0;t) = 0$; $u(l;t) = 0$ (2) ktorá popisujú upravenie struny v bodoch 0 ; l

$$u(x;0) = \psi(x) \quad \frac{\partial u(x;0)}{\partial t} = \dot{\psi}(x) \quad (3)$$

prícom f: $\psi(x)$ a $\dot{\psi}(x)$ sú dopred udané.

1 podmienka z (3) charakt. počiatocnú polohu a 2. podm. poč. rýchlosť struny.

Hľadáme rieš. rovn. (1) pri ohraničujúcich podmienkach (2). Zľahka nisl. že f. $u(x;t) \equiv 0$ je rieš. rovn. (1) a vyhov. aj podm. (2).

Puto budeme hľadať rieš. $\neq 0$. Predp. rie ma' tvar:

$$u(x;t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

prícom f. $X(x)$ $T(t)$ majú svoj. deriv. 1 a 2. $0 \leq x \leq l$ $-\infty \leq t \leq \infty$

Podľa predp. $u(x;t) \neq 0 \rightarrow$ dosadíme (4) do (1)

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial u}{\partial x} = X'T & \frac{\partial u}{\partial t} = XT' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT'' \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} XT'' = a^2 X''T \\ \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \boxed{\lambda} \text{ orn.} \end{array} \right.$$

$$\frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow X'' - \lambda X = 0 \quad (5)$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \lambda \rightarrow T'' - a^2 \lambda T = 0 \quad (6)$$

Rovnice (5) a (6) sú obyč., homogénne dif. r. 2. s konst. koef.
 z podmienok vyplývajú.

$$u(0; T) = X(0)T(t) = 0 \quad \sim [okrajová podm.; prečo sa = 0.]$$

$$\Downarrow X(0) = 0$$

$$u(l; t) = X(l)T(t) = 0$$

$$\Downarrow X(l) = 0$$

Al. rieš (5) a (6) pri okr.
 podm: $X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \quad (7)$

Ak použij. podm. (7); dohľadíme, že z rovn. (5) a (6) λ musí byť najrovné 0. Pri zdôvodnení tohoto tvrdenia budeme uviesť 3 možnosti:

1. $\lambda = 0$

.. potom z (5) $X'' = 0 \Rightarrow X' = \text{konst. } C_1 \Rightarrow X = C_1 X + C_2$

Kto riešenie musí spĺňať podm (7). $\Rightarrow$ platí: $X(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$
 $\Downarrow C_2 = 0$

$$X(l) = C_1 l + C_2 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ \Downarrow C_1 = 0 \end{array} \right. \quad \int C_1 x + C_2 = 0 \Rightarrow X = 0; \text{ čo je v spore s predpokladom.}$$

Teda $\lambda \neq 0$. (nepriamo dôkaz.)

2.) uvažujme $\lambda > 0$

potom z (5): $X'' - \lambda X = 0$

ob. r.: $X = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$

$$k^2 - \lambda = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}$$

— musí spl. podm (7).

$$X(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0$$

$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} e^{\sqrt{\lambda} l} \neq 0 \quad e^{-\sqrt{\lambda} l} \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Potom $X = 0$; čo je v spore s predpokladom $\Rightarrow \lambda$ nie je > 0 .

3.) Nech $\lambda < 0$; môžeme mať: $\lambda = -r$; kde $r > 0$

Potom rovn. (5, 6)

$$X'' + rX = 0 \rightarrow k^2 + r = 0 \quad k^2 = -r \quad k_{1,2} = \pm i\sqrt{r}$$

$$T'' + a^2 r T = 0 \rightarrow k^2 + a^2 r = 0 \quad k_{1,2} = \pm i a \sqrt{r}$$

Všeob. rieš: $X(x) = C_1 \cos \sqrt{r} x + C_2 \sin \sqrt{r} x$

$$T(t) = D_1 \cos a \sqrt{r} t + D_2 \sin a \sqrt{r} t$$

sup. hodnoty
 C_1, C_2, D_1, D_2

upoz. podm. (7)

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{r} \cdot 0 + C_2 \sin \sqrt{r} \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$X(l) = C_1 \cos \sqrt{r} l + C_2 \sin \sqrt{r} l = 0$$

$\left. \begin{array}{l} C_2 \neq 0 \text{ lebo by bolo:} \\ X(x) \equiv 0. \end{array} \right\}$

$\Downarrow \sin \sqrt{r} l = 0 \Rightarrow \sqrt{r} l = k\pi$
 kde k je celé číslo

$$\sqrt{r} = \frac{k\pi}{l}$$

$\leftarrow \{$

označíme namiesto $k \dots m$:

$$r = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

; na zákl. toho:

$$X(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$T(t) = D_1 \cos a \frac{n\pi}{l} t + D_2 \sin a \frac{n\pi}{l} t$$

} pre $n = \text{celé číslo}$.

$$u = u(x; t) = X(x) T(t) = \left\{ D_1 \cos a \frac{n\pi}{l} t + D_2 \sin a \frac{n\pi}{l} t \right\} \cdot C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$u(x; t) = \left\{ A \cos \frac{a n \pi}{l} t + B \sin \frac{a n \pi}{l} t \right\} \sin \frac{n \pi x}{l} ; \quad (8) \quad \begin{cases} D_1 C_2 = A \\ D_2 C_2 = B \end{cases}$$

je riešením $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\{ -A \frac{a n \pi}{l} \sin \frac{a n \pi}{l} t + B \frac{a n \pi}{l} \cos \frac{a n \pi}{l} t \right\} \cdot \sin \frac{n \pi x}{l}$$

~~prezentujeme výsledok~~

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{a n \pi}{l}\right)^2 \left\{ -A \cos \frac{a n \pi}{l} t - B \sin \frac{a n \pi}{l} t \right\} \cdot \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left\{ A \dots + B \dots \right\} \frac{n \pi}{l} \cos \frac{n \pi x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left\{ A \dots + B \dots \right\} \left\{ \frac{n \pi}{l} \right\}^2 \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$- \left(\frac{a n \pi}{l}\right)^2 \left\{ A \cos \frac{a n \pi}{l} t + B \sin \frac{a n \pi}{l} t \right\} \sin \frac{n \pi x}{l} = - a^2 \left(\frac{n \pi}{l}\right)^2 \left\{ A \cos \dots + B \sin \dots \right\} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

Pokiaľ A, B sú ľubov. konš.; môžeme ich ľubov. zmeniť:

podáme: $A \dots A_n \quad B \dots B_n$.

Potom aj riešenie (8) bude iné pre každé n .

$$u_n(x; t) = \left\{ A_n \cos \frac{a n \pi}{l} t + B_n \sin \frac{a n \pi}{l} t \right\} \cdot \sin \frac{n \pi x}{l} ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Pokúsme sa určiť konš. $A_1, \dots B_1, \dots$ aby riešenie (9) vyhovovalo rovnici (1); okrajovým podmienkam (2) a počiatoč. (3).

Prevedie sa na rie (9) je riešením (1).

Overíme platnosť okrajových podmienok (2) :

$$\text{okm: } u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \frac{a n \pi}{l} t + B_n \sin \frac{a n \pi}{l} t \right\} \cdot \sin \frac{n \pi x}{l} \quad (9).$$

$$u(0; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \frac{a n \pi}{l} t + B_n \sin \frac{a n \pi}{l} t \right\} \sin \left(\frac{n \pi \cdot 0}{l} \right) = 0 \quad \text{je splnené.}$$

$$u(l; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dots \right\} \sin \frac{n \pi \cdot l}{l} = 0 \quad \text{je spl.}$$

Možno ešte overiť či (9) splní aj poči. podm. (3).

$$u(x; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \underbrace{\cos \frac{\alpha n \pi}{\ell} \cdot 0}_1 + B_n \underbrace{\sin \frac{\alpha n \pi}{\ell} \cdot 0}_0 \right\} \sin \frac{n \pi}{\ell} x = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u(x=0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \underbrace{\frac{\alpha n \pi}{\ell} \sin \frac{\alpha n \pi}{\ell} \cdot 0}_0 + B_n \underbrace{\frac{\alpha n \pi}{\ell} \cos \frac{\alpha n \pi}{\ell} \cdot 0}_1 \right) \sin \frac{n \pi}{\ell} x = \psi(x)$$

$$u(x; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi}{\ell} x = \varphi(x) \quad (10) \quad \text{prvý riadok}$$

$$\frac{\partial u(x=0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\alpha n \pi}{\ell} \sin \frac{n \pi}{\ell} x = \psi(x) \quad (11) \quad \text{druhý riadok}$$

z rovníc (10) (11) sú neznáme f. $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ do F.v. v intervale $(0; \ell)$ s členmi, ktoré obsahujú f.e. sinus.

Potom keď-y musia byť také určité:

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n \pi}{\ell} x dx$$

$$\frac{\alpha n \pi}{\ell} B_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n \pi}{\ell} x dx$$

pre $n = 1, 2, \dots$

Teda riešenie úlohy o chvni sluný s dan. okr. a poči. podmienkami má tvar:

(keď chv. prebieha v 1. rovine)

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\alpha n \pi}{\ell} t + B_n \sin \frac{\alpha n \pi}{\ell} t \right) \sin \frac{n \pi}{\ell} x \quad ; \text{ pričom}$$

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n \pi}{\ell} x dx$$

$$B_n = \frac{2}{\alpha n \pi} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n \pi}{\ell} x dx.$$

§9. Niektoré špeciálne funkcie

13.V.1970.

1) Nech $s > 0$ číslo potom Gamma funkcia definujeme takto.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} x^{s-1} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} x^{s-1} \right]_0^b + \lim_{b \rightarrow +\infty} (s-1) \int_0^b e^{-x} x^{s-2} dx = (s-1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-2} dx = (s-1) \Gamma(s-1).$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{s-1}}{e^b} = -1 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(s-1) b^{s-2}}{e^b} = \dots = \frac{(s-1)!}{e^b} = 0$$

$$\Gamma(s) = (s-1) \cdot \Gamma(s-1) = (s-1)(s-2) \cdot \Gamma(s-2) = \dots$$

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)(s-3) \dots (s-k) \cdot \Gamma(s-k)$$

rapr. n. $s > k$

Ok. avol. prirodz. čísla:

$$m: \Gamma(m) = (m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-b} + 1] = 1$$

↓

pre n prirodz.: $\Gamma(m) = (m-1)!$ alebo $\Gamma(m+1) = m!$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{e^b} \right\}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^m dx = m! \quad \text{pre } m \text{ prirodzené.}$$

2. Beta funkcia

nech $p > 0$ $q > 0$ Potom B.f. je def. takto:

$$B(p; q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (2)$$

Ok. $p < 1$ potom vyplýva dolnej medze nan. neustály integrál.

Ok. $q < 1$ — " — horný — " — — " — — " —

$$\text{ked' } x = \cos^2 \varphi$$

$$dx = -2 \cos \varphi (\sin \varphi) d\varphi$$

$$B(p; q) = \int_{\pi/2}^0 (\cos^2 \varphi)^{p-1} (1 - \cos^2 \varphi)^{q-1} (-2 \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{(2p-1)\varphi} \sin^{(2q-1)\varphi} d\varphi$$

$$B(p; q) = B(q; p)$$

trigonometrická. tvar. (3)

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_1^0 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx$$

$$1-x=y$$

$$-dx=dy$$

Da' sa dokážať, že platí: $B(p; q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

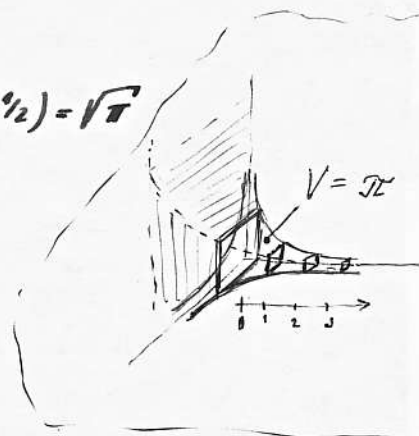
Ok. m, n prirodz.: $B(m; n) = \frac{(m-1)! (n-1)!}{(m+n-1)!}$

Pr: $p=q=\frac{1}{2}$

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^0 \varphi \cdot \sin^0 \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$$

$$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} = \pi \quad \Rightarrow \quad (\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$$



§ 10. Besselove funkcie

Uvazi. parc. dif. rovn. 2ho^r :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Laplacova dif. rovn.} \quad (1)$$

Pisajme si f. $u = (x; y; z)$

- harmonické funkcie

Zaved. do rovn. cylindr. f. :

$$x = r \cos \varphi \rightarrow dx = -r \sin \varphi d\varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{-r \sin \varphi} + 0$$

dos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Chceme nájsť také riešenia rovn. (2), ktoré budú súčinom 3 funkcií.
A keďže z týchto f. bude navisť len od 1 premenných. Predp.
že také rieš. majú tvar:

$$R = R(r)$$

$$\Phi = \Phi(\varphi)$$

$$Z = Z(z)$$

Predp. že majú op. der. 1^u a 2^u (3)

$$u = R \cdot \Phi \cdot Z$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = R' \Phi Z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R'' \Phi Z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = R \Phi'' Z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R \Phi Z''$$

dos do (2)

$$\left. \begin{aligned} R'' \Phi Z + \frac{1}{r} R' \Phi Z + \frac{1}{r^2} R \Phi'' Z + R \Phi Z'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \frac{1}{R \Phi Z}$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{Rr} + \frac{\Phi''}{r^2 \Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\frac{Z''}{Z} = -\frac{R''}{R} - \frac{R'}{rR} - \frac{\Phi''}{r^2 \Phi}$$

Ľ. sh. nezávisí od r a φ ; prava sh. nezávisí od z. ; a rovnajú sa.
ozn. $\frac{Z''}{Z} = \alpha$ →

$$Z'' - aZ = 0 \quad (4)$$

$$\frac{-R''}{R} - \frac{R'}{r \cdot R} - \frac{\phi''}{r^2 \phi} = 0 \quad / \cdot r^2 \rightarrow \text{vyjádř. } \frac{\phi''}{\phi}$$

$$\frac{r^2 R'' + r R' + a r^2 R}{R} = - \frac{\phi''}{\phi}$$

levá str. násob. od ϕ ; pravá od r .

položíme: $-\frac{\phi''}{\phi} = b$

$$\phi'' + b \phi = 0 \quad (5)$$

$$r^2 R'' + r R' + a r^2 R = b \cdot R$$

po úpravě: $r^2 R'' + r R' + (a r^2 - b) R = 0$

nema' konst. koeficienty.

ak: $a = 1$

$b = \nu^2$

$r \dots x$

$R \dots y$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) \cdot y = 0 \quad (6)$$

Besselova dif. rovnice

Předp. že $y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot x^{\nu+k}$

$= a_0 x^{\nu} + a_1 x^{\nu+1} + a_2 x^{\nu+2} + \dots$ (množinový rad)

$$y' = \sum_{k=1}^{+\infty} (\nu+k) a_k \cdot x^{\nu+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{+\infty} (\nu+k)(\nu+k-1) a_k \cdot x^{\nu+k-2}$$

$$x y' = \sum_{k=1}^{+\infty} (\nu+k) a_k \cdot x^{\nu+k}$$

$$x^2 y'' = \sum_{k=1}^{+\infty} (\nu+k)(\nu+k-1) a_k \cdot x^{\nu+k}$$

dosad (6)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\nu+k)(\nu+k-1) a_k \cdot x^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (\nu+k) a_k \cdot x^{\nu+k} + (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot x^{\nu+k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \{ (\nu+k)(\nu+k-1) + (\nu+k) - \nu^2 \} a_k \cdot x^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{\nu+k+2} = 0$$

$$\nu^2 + k\nu - \nu + k\nu + k^2 - k + \nu + k - \nu^2 = 2k\nu + k^2 = k(2\nu+k)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} \cdot x^{\nu+k}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \{ k(2\nu+k) \} a_k \cdot x^{\nu+k} + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} \cdot x^{\nu+k} = 0$$

$$0 + 1(2\nu+1) a_1 x^{\nu+1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \{ k(2\nu+k) a_k + a_{k-2} \} \cdot x^{\nu+k} = 0 = 0 \cdot x^{\dots}$$

porovn. koef:

$(2\nu+1) \cdot a_1 = 0$

$k=1$

$2(2\nu+2) a_2 + a_0 = 0$

$k=2$

$3(2\nu+3) a_3 + a_1 = 0$

$k=3$

$4(2\nu+4) a_4 + a_2 = 0$

$k=4$

$$1. (2\nu+1)a_1 = 0$$

$$2. (2\nu+2)a_2 + a_0 = 0$$

$$3. (2\nu+3)a_3 + a_1 = 0$$

$$4. (2\nu+4)a_4 + a_2 = 0$$

$$5. (2\nu+5)a_5 + a_3 = 0$$

$$6. (2\nu+6)a_6 + a_4 = 0$$

ma' rieš. pre $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ (vy. ravica od a_0 ; nekonečna veľa rieš.

$$\text{zvol.: } a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \sim$$

vyjadr:

$$a_2 = - \frac{a_0}{4 \cdot (\nu+1)} = - \frac{1}{2^{\nu+2} \cdot (\nu+1) \Gamma(\nu+1)} = \frac{-1}{2^{\nu+2} \cdot 1! \Gamma(\nu+2)}$$

$$a_4 = - \frac{a_2}{4 \cdot 2(\nu+2)} = - \frac{1}{2^{\nu+4} \cdot 2(\nu+2)(\nu+1) \Gamma(\nu+1)} = \frac{-1}{2^{\nu+4} \cdot 2! \Gamma(\nu+3)}$$

$$\dots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{\nu+2k} \cdot k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

~ Besselova f. 1-ro. druhu
s indexom ν .

Rad je jedným riešením B. dr. a dá sa ukázať, že konverguje pre $x > 0$. Ľavá strana sa v literatúre označuje $J_\nu(x)$.

Ak ν je prirodz. č. m : $J_m(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{k! (m+k)!}$

Ak $\nu = 0$: $J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$