

Mértani alafogalmak

- A mértan a matematika egy része ;
1. Síkmértan - planimetria
 2. Tér mértan - stereometria

A síkmértan olyan síkmértani alakzatokkal foglalkozik, amelyek elférnek egy síkban (szakas, szög, négyszög, kör, ...)

A sík olyan mértani fogalom, mely nincs meghatározva. A síkbeli alakzat minden egyes pontja a s.-ban van.

A tér mértan olyan mértani alakzatokkal fogl. melnek pontjai nem felelnek el egy síkban. Térbeli alakzatok vizsgálataival foglalkozik.

A síkidomoknak 2 dimenziója (kiterjedése) van.
A térmértani idomoknak 3 dimenziójuk van.

(trigonometria, analitikus geometria, ábrázoló geometria, differenciál geometria, ...)

Euklidész file, gyakorlati geometria. (Bolyai-Lobacs, Peirmane. $\Delta x > 180^\circ$)

Pont, egyenes, sík - mértani alafogalmak, nincsenek meghatározva, definiálva.

A pont egy mértani alakzat, melynek nincs kiterjedése.
file: $\overset{\circ}{A} \overset{\times}{P} \overset{\circ}{M}$ - latin ABC nagy nyomtatott betű.

Egyenes kiterjedik, ha egy pont mozg. körben nem vált. irányf.
Egyenes a - a latin ABC kis betű

Síkot kapunk, ha az egyenes mozgás körben nem vált. irányf.
file: $\alpha \dots \beta \dots \gamma \dots \delta \dots \epsilon \dots \zeta \dots \eta \dots \theta$ $\angle = ABC$ $\beta = p.p.(p \neq 1)$

Két ponton keresztül egy egyenes húzható.

$\overset{\circ}{P} \overset{\circ}{R}$ $a \equiv PR$ ($P \neq R$)
PR meghatározva az "a"-t

Az egyenes tetszőleges pontja 2 felegyenesre bontható.

1. PR > felegyenes P végpont, mindkét felegyenes pontja
2. PQ

$$M \neq N$$

MN - szakasz az egyenes 2 pontja által határolt része.

A szakasz hossza mindig pozitív számmal fejezhető ki.

M, N - a szakasz végpontjai

Két szakasz egybevágó, ha egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást. A szak. végpont. egybe esnek.



II_1



$$AB > PP_1$$



$$AB = PP_1$$



$5 \neq 7$	$5 < 7$
$8 \neq 3$	$8 > 3$
$8 = 8$	$8 = 8$

Egybevágó szakaszok hossza egyenlő.

Két pontot összekötő vonalak közül legrövidebb az egyenes szakasz.



Két egyenes kölcsönös helye.

1. párhuzamos
2. metszi egymást

1. Két egyenes akkor párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk.

$$a \parallel b$$

2. Két egyenes egy síkban fekszik és van 1 közös pontjuk, a metszéspont.



$$a \times b = M$$

$$a \cdot b = M$$

1. a



2. a

$$a + b$$

2. ábra

N

(pP)-

(pN)-

p a síkhoz 2. felfüggésre
szolja.
p mindkét felfüggésre tartozik.



Ha egy körös pontból kiindul
2 felfüggés, felfüggés - síkhoz tartozik.

(az AB, Ba felfüggés körös része a sík)

1. $AVB \neq$
2. $\angle$
3. $\neq V$
4. $ab \neq$

V - mögcsücs

VA } a sík síkai
VB }

A sík egyenlete: - 1 fok, jele: 1°

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

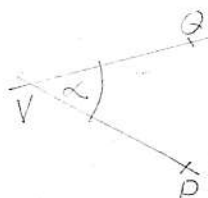
R

R

$$1^\circ = \frac{R}{90}$$

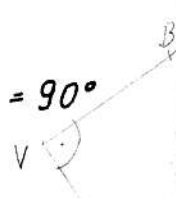
Síkek felosztása:

1. hegyessík $0^\circ < \angle < 90^\circ$



2. derékszög

$$\beta = R = 90^\circ$$



3. tompaszög $90^\circ < \gamma < 180^\circ$



4. egyenes szög

$$\delta = 180^\circ$$



5. körívszög $180^\circ < \epsilon < 360^\circ$



6. teljes szög 360°



ih.

$$\begin{aligned} \alpha &= 117^\circ 18' 49'' \\ \beta &= 48^\circ 31' 36'' \\ \alpha + \beta &= 165^\circ 50' 25'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 152^\circ 18' 47'' & \alpha &= 33^\circ 52' 44'' \\ \beta &= 79^\circ 53' 17'' & 3\alpha &= 101^\circ 38' 12'' \\ \alpha - \beta &= 72^\circ 25' 30'' \end{aligned}$$

3. sz.

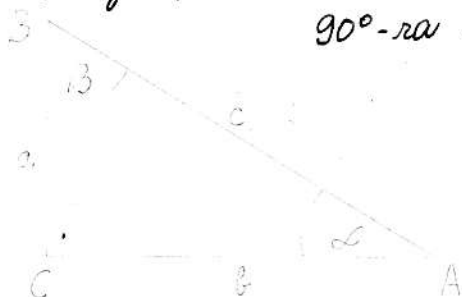
1963. XI. 5.

$$3,2^\circ = 3^\circ 12'$$

ög)

a szögpárok

- I. Pótszögek: Azokat a szögeket, melyek egymást 90° -ra egészítik ki, pótszögeknek nevezzük.



$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 180^\circ - R \\ \alpha + \beta &= 90^\circ \end{aligned}$$

A derékszögű háromszögben a hegyesszögek összege 90° -pótszögek.

- II. Kiegészítő-szögek: - összege 180°

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= 180^\circ \\ \gamma; \delta &\text{ kiegészítő-szögek} \end{aligned}$$

a.)

Azokat a kiegészítő-szögeket, melyeknek egyik szára közös, a másik mellékszögeknek nevezzük.



- kiegészítő, de nem pótszög mellékszög

- III. Csúcsszögek: - úgy keletkeznek, ha valamelyik szög oldalait a csúcson túl meghosszabbítjuk.



$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ \beta &= \beta' \end{aligned} \quad \text{A csúcsszögek egyenlők.}$$

- IV. Párhuzamosok szögei - a szögek párhuzamosok

a, egyállású szögek -

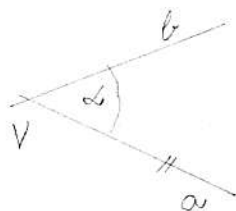


$a \parallel a_1$
 $b \perp b_1$

- szögek párhuzamosok, egy irányúak, szögek egyenlők.

b. váltószögek:

- sugarait párhuzamosak, de ellentétes irányúak.



$$a \parallel a_1$$

$$b \parallel b_1$$

c. társzögek:

- az egyik sugarak egyirányúan párhuzamos, a másik ellentétesen.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

A társzögek kiegészítő-szögek.

V. Merőleges - sugarú szögek:

a.

B.

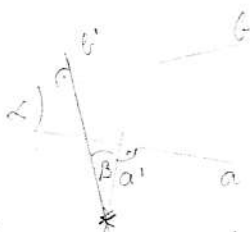
$$a' + a \Rightarrow \alpha, \beta$$

$$b' + b$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \text{kiegészítő-szögek}$$

α - hegyesszög β - tompaszög

b.



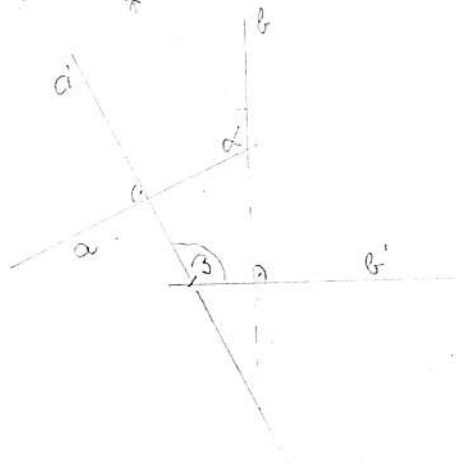
$$a' + a \Rightarrow \alpha, \beta$$

$$b' + b$$

$$\alpha = \beta$$

Ha mindkettő hegyesszög, akkor egyenlők.

c.



$$a + a' \Rightarrow \alpha, \beta$$

$$b + b'$$

$$\alpha = \beta$$

A merőleges sugarú szögek sugarai egymásra merőlegesek.

$$\alpha = 17^\circ 20' \quad \text{pótszöge} = 90^\circ - 17^\circ 20' = 72^\circ 40' = \beta$$

$$\epsilon = 35,6^\circ \quad \text{kiegészítőszöge} = \epsilon + \tau = 180^\circ; \quad 144,9 = 144^\circ 24' = \tau$$

$$\alpha = 48^\circ 44' \quad \text{pótszöge} = 90^\circ - 48^\circ 44' = 41^\circ 16' = \beta$$

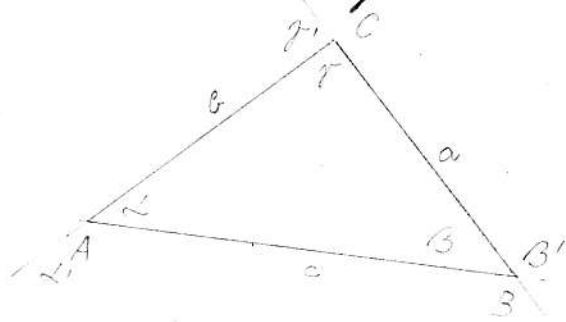
$$\alpha = 23^\circ 19' 59'' \quad \text{pótszöge} = 90^\circ - 23^\circ 19' 59'' = 66^\circ 40' 1'' = \sigma$$

$$\sigma = 44^\circ 35'' \quad \text{pótszöge} = 90^\circ - \sigma = \tau = 45^\circ 59' 25''$$

$$\sigma = 137^\circ 32' \quad \text{kieg. sz.} = 180^\circ - 137^\circ 32' = 42^\circ 28' = \tau$$

a háromszögek -

- a legfontosabb síkidomok közé tartoznak, mert a sokszögek állók segítségével háromszögekre bonthatók.
A háromszög a síkban 3 egyenes által határolt része.



ABC - a Δ csúcspontjai

$BC = a$
 $AC = b$
 $BA = c$ } - a Δ oldalai

$A^\circ = \alpha$
 $B^\circ = \beta$
 $C^\circ = \gamma$ } - a Δ belső szögei

α', β', γ' - a Δ külső szögei.

A háromszögek felosztása: I. szögek szerint
II. oldalak szerint

1. : 1. hegyesszögű Δ (mind a 3 belső szöge hegyesszög)



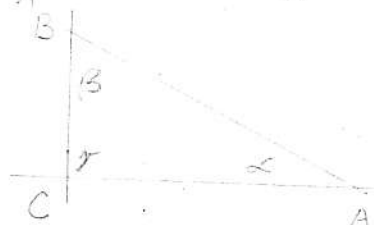
$$\alpha < \beta \quad \beta < \gamma \quad \gamma < \alpha$$

2. tompaszögű Δ (valamely belső szöge tompaszög)



$$180^\circ > \gamma > \alpha$$

3. derékszögű Δ



az egyik belső szöge R

$$C^\circ = \gamma = R = 90^\circ$$

$$\alpha < R \quad \beta < R$$

a derékszöget beráró oldalak a befogók, a leghosszabb oldal az átfogó.

$$\left. \begin{array}{l} BC = a \\ AC = b \end{array} \right\} \text{befogó} \quad AB \text{ átfogó} \quad \begin{array}{l} c > b \\ c > a \end{array}$$

11.

1. általános Δ

2. egyenlő szárú Δ (2 oldaluk egyenlő)



c - alap

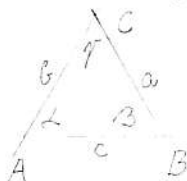
$$AC = c$$

$$BC = a$$

$$a = c$$

$\beta = \alpha$ - alapszögek - egyenlők

3. egyenlő oldalú Δ (mind 3 oldaluk egyenlő)



6. óra.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$d \parallel c ; C \hat{=} d \quad (C \hat{=} d)$$

$$\rho + \gamma + \sigma = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \rho \\ \beta = \sigma \end{array} \right\} \text{ mell. váltószögek}$$

$$\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$$

$$\underline{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$$

A háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\beta' = \beta'_1 + \beta'_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta'_2 = \alpha \\ \beta'_1 = \gamma \end{array} \right\} \text{ párhuzamosrairól sz.}$$

$$\underline{\beta' = \gamma + \alpha}$$

Egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak is fordítva.

Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög, kisebb oldal van szemben kisebb oldal van.

$$\text{Ha } a > b \rightarrow \alpha > \beta$$

$$a = b \rightarrow \alpha = \beta$$

A háromszögben 2 oldal összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal, 2 oldal különbsége kisebb, mint a harmadik.

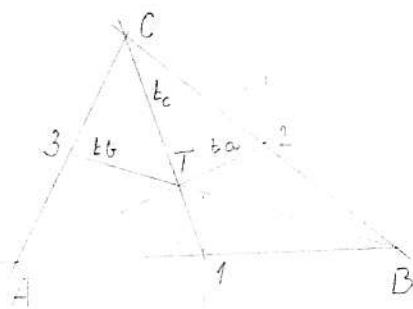
A Δ bármely oldala lehet az alap. Perpendikulus vonalai a magasság és a súlyvonal.



A Δ magassága a csúcsból az alapra ejtett merőleges.
jele: h (m)

h_a, h_b, h_c — a Δ magasság-vonalai

h_a, h_b, h_c — magasságpont
jele: M



A Δ súlyvonalai a csúcsponthoz és a szemben lévő oldalak felezőpontjait kötik össze.

jele: t (s)

t_a, t_b, t_c — súlyvonalak

$t_a, t_b, t_c \equiv T$ — súlypont

Az oldaltól a súlyponthoz a távolság az egész súly $\frac{1}{3}$ -a.

$$\overline{1T} = \frac{t_c}{3}$$

$$\overline{2T} = \frac{t_b}{3}$$

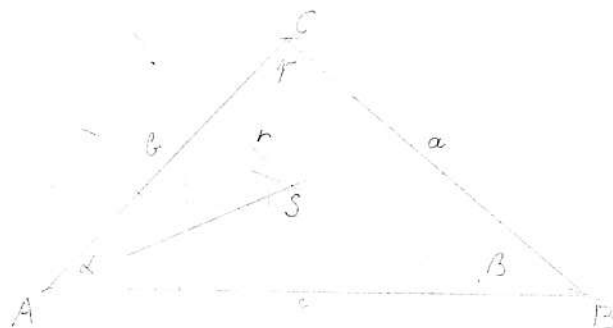
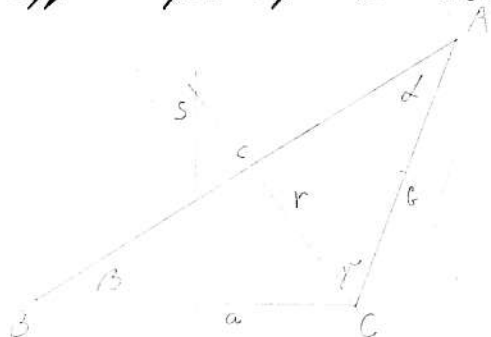
$$\overline{3T} = \frac{t_a}{3}$$

A háromszögbe írt kör; A Δ köré írt kör;



7. Házi feladat.

Egy háromszögű Δ körülírt, beírt köre



965. XI. 26.

8. óra

Síkidoimok egybevágósága

Két síkidom egybevágó, ha egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.

Bármely szakaszt a szakasz felezőpontja két egybevágó szakaszra bontja.

az egybevágó síkidomok minden megfelelő oldalaira: (oldalak stb.) egyenlők egymással.

Megfelelő oldalakra nézve azokat nevezzük, amelyek fedés közben egymásra kerülnek: $\cong$

Két háromszög egybevágó:

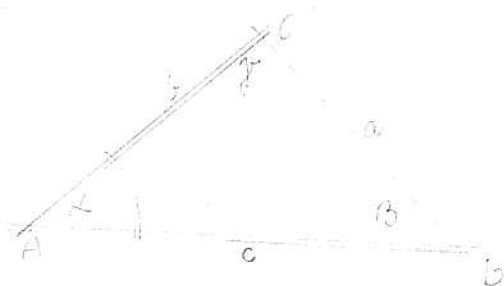
1. Két megfelelő oldal és a köztük lévő szög kölcsönösen egyenlő:

$$\text{Ha } AB = A_1B_1,$$

$$AC = A_1C_1,$$

$$\angle A = \angle A_1$$

$$\text{akkor } \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \implies \begin{aligned} B &= B_1 \\ \gamma &= \gamma_1 \\ BC &= B_1C_1 \end{aligned}$$



965. XI. 30.

9. óra

Az 1. dolgozat javítása

$$\left(\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a} \right) : \left(\frac{x+a}{a} - \frac{x-a}{x} \right) = \left(\frac{x^2+ax-ax+a^2}{(x-a)(x+a)} \right) : \left(\frac{x^2+ax-ax+a^2}{ax} \right) =$$

$$= \frac{x^2+a^2}{(x^2-a^2)} : \frac{(x^2-a^2)}{ax} = \frac{ax}{x^2+a^2} ;$$

$$25a^2 - (a+b)^2 = [5a - (a+b)][5a + (a+b)] = (4a-b)(6a+b);$$

$$a \neq 0 \quad x \neq 0 \quad x \neq a \quad x \neq -a$$

$$\angle + \angle = 180^\circ$$

$$\angle = 180 - 30$$

$$\angle = 150^\circ$$

$$x + \frac{x}{0,2} = 180^\circ \quad | \cdot 0,2$$

$$0,2x + x = 36$$

$$1,2x = 36$$

$$x = 30^\circ$$

$$\begin{aligned}
 1.) \quad & \left(\frac{b}{a^2 - ab} + \frac{a}{b^2 - ab} \right) \cdot \frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2} = \left(\frac{b}{a(a-b)} + \frac{a}{-b(b-a)} \right) \cdot \frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2} = \\
 & = \frac{a^2 - b^2}{(a-b)(-ab)} \cdot \frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)(a-b)(a^2b + ab^2)}{-ab(a-b)(a+b)(a-b)} = \\
 & = \frac{ab(a+b)}{-ab(a-b)} = \frac{a+b}{b-a} = \frac{b+a}{b-a}; \quad a \neq b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.) \quad & 4x^2 - (3x - 2y)^2 = [2x - (3x - 2y)][2x + (3x - 2y)] = (2x - 3x + 2y) \cdot (2x + 3x - 2y) = \\
 & = (-x + 2y)(5x - 2y).
 \end{aligned}$$

$$3.) \quad x + \frac{x}{4} = 180^\circ / . 4$$

$$4x + x = 720^\circ$$

$$5x = 720$$

$$x = 144^\circ$$

Két háromszög egybevágó ha egy oldal és a rajta fekvő két szög egyenlő.

$$\text{Ha } AB = A_1B_1$$

$$\angle = \angle_1$$

$$\angle B = \angle B_1$$

$$ABC \trianglecong A_1B_1C_1 \Rightarrow \gamma = \gamma_1$$

$$AC = A_1C_1$$

$$BC = B_1C_1$$

Két háromszög egybevágó ha két két m. oldaluk és a nagyobbik oldallal szembe fekvő szögek egyenlők.

$$AB = A_1B_1, \quad AB > AC$$

$$AC = A_1C_1$$

$$\gamma = \gamma_1$$

$$ABC \trianglecong A_1B_1C_1 \Rightarrow \angle = \angle_1$$

$$\angle B = \angle B_1$$

$$BC = B_1C_1$$

Két háromszög egybevágó ha 3 megf. old. egyenlő

$$\begin{aligned} AB &= A_1B_1 \\ AC &= A_1C_1 \\ BC &= B_1C_1 \\ \hline ABC &\cong A_1B_1C_1 \Rightarrow \begin{aligned} \angle &= \angle_1 \\ B &= B_1 \\ \gamma &= \gamma_1 \end{aligned} \end{aligned}$$



1965. XII. 7.

10. óra.

Szerkesztési feladatok

Szerkesztési feladatoknál célszerű a következő munkamódszert:

1. elemzés
2. szerkesztés
3. bizonyítás
4. megvitatás

1. Felvázoljuk a feladatot, összefüggést keresünk a megadott és ismeretlen elemek között, következtetünk a feladat megszerkesztésére.

2. Az elemzés alapján megszerkesztjük a feladatot.

3. Bebizonyítjuk a szerkesztés helyességét.

4. Megvitatjuk a feladat megoldhatóságát és a megoldások számát.

$$\begin{aligned} a &= 11 \\ b &= 2 \\ c &= 3 \end{aligned} \quad 1.$$



A feladatnak nincs megoldása, mert

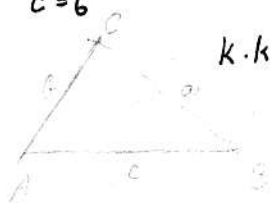
$$b + c < a$$

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 5 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

$$k = (A; b = 5)$$

$$k' = (B; a = 4)$$

$$k \cdot k' = C$$



3. Az adott elemekkel meggyeznek a kapott elemek.

4. Meggyezhet, mert $a + b > c$

Egyetlen egy Δ , van, mely ennek a felt. elég lesz.

$$\begin{aligned} 1. \quad a &= 3 \\ b &= 4 \\ \gamma &= R \end{aligned}$$

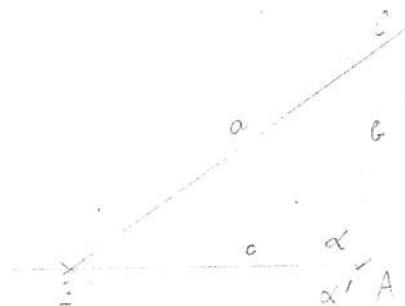


$$\begin{aligned} 2. \quad \alpha &= 6 \\ \beta &= 30^\circ \\ \gamma &= 70^\circ \end{aligned}$$



4. a
 b
 α

$$a > b$$



Terhesszünk adott
áthaladó mérőlegest.

egyes, adott pontján

$$k \perp a$$

$$A = k$$

965. XII. 7.

10. Hárvi feladat

Terhesszünk adott
pontból mérőlegest!

egyesre, egy rajta kívül fekvő

$$q \perp p$$

$$p \perp q$$

a feladatnak egy
megoldása van.

965. XII. 10.

12. óra

$$a \perp b$$



6.30.

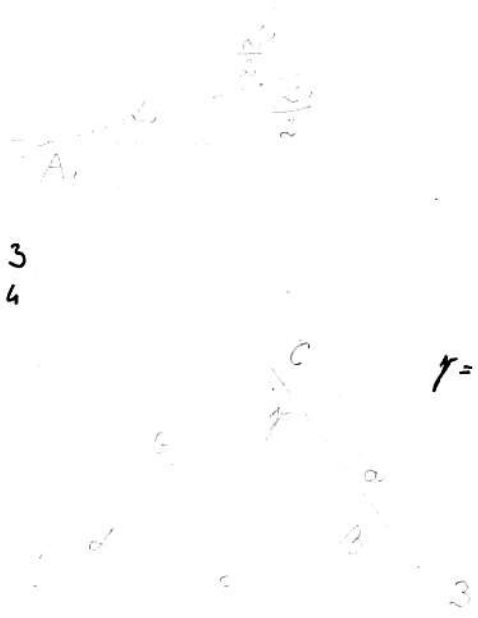
γC $\cdot$ δ

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$a = 3$$
$$b = 4$$

$$\gamma = 90^\circ$$



1965. XII. 10.

12. Házi feladat

$$\begin{array}{ll} \alpha = 43^\circ & \alpha + \beta = t \\ \beta = 44^\circ & \alpha - \beta = t \end{array} \text{megszerezteni}$$

Egyenlőszárú Δ -t az „a” alapról és „ α ”-ból (szemközti)

Szerkesztjük meg a szögfelelőt, ha a szög csúcsát
nem ismerjük

I.

III.

II,
 $a = 6 \text{ cm}$
 $\alpha = 68^\circ$

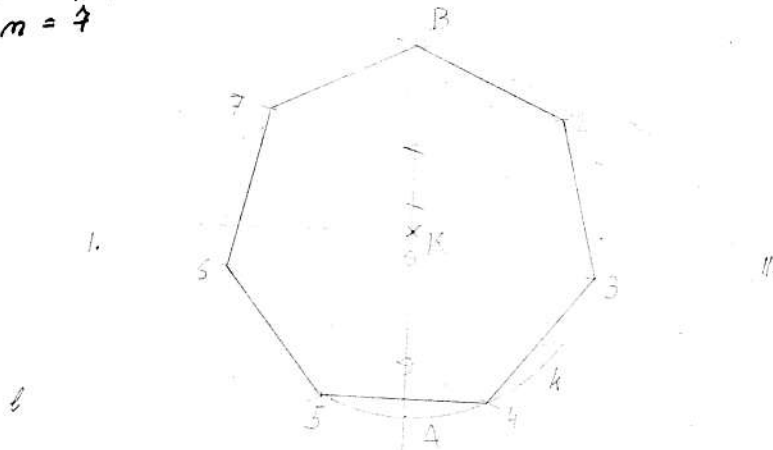
13. óra.
Sokszög szerkesztése

1965. XI. 17.

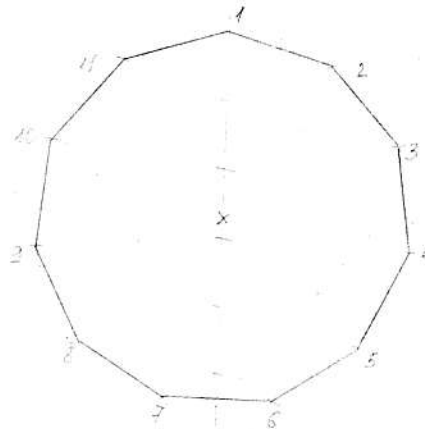
1. $k = [k; r]$
2. $n = K$
3. $d \perp n$ $d \cdot AB$
4. $\ell = [A; d]$
5. $m = 4$

$$I. = p \times l$$

$$II. = p \times l$$

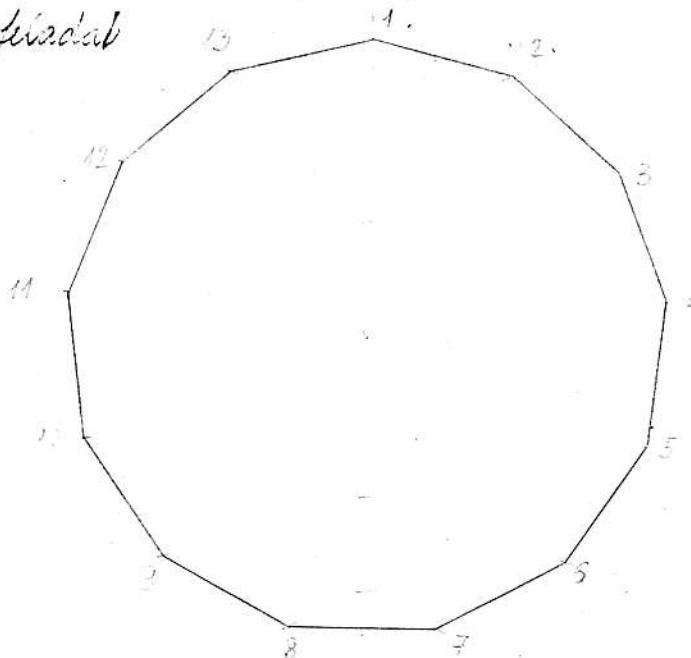


5. a d álló - állmírórt annyi egyenlő részre osztjuk fel, ahány szögű sokszöggel akarunk szerkeszteni.



13. Házi feladat

1965. XI. 17



966.1.4.

14. óra.

Szerkesztendő Δ -ek, ha ismerjük: 1, a, b, m_b , ($a=6, b=8, m_b=4$)

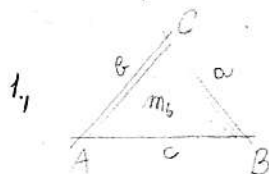
2, a, b, m_a

3, a, c, m_a

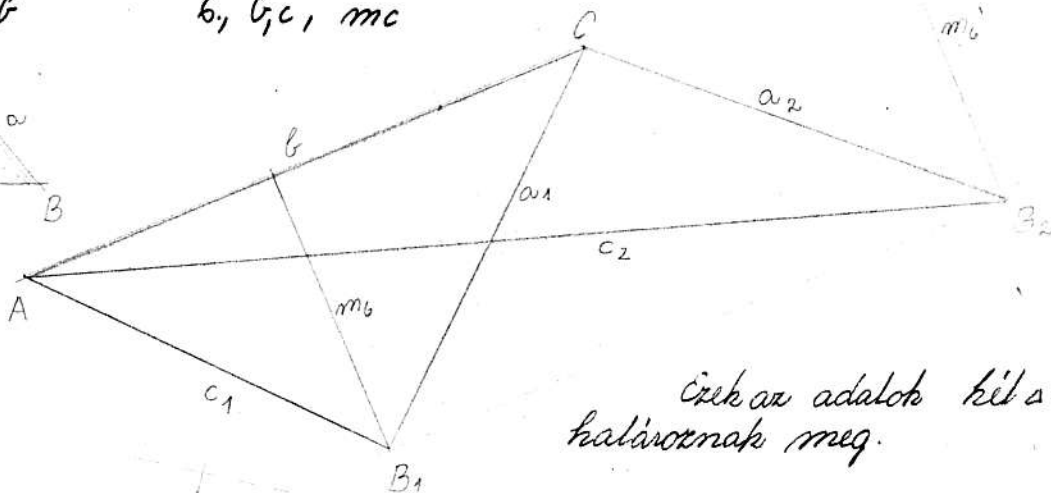
4, a, c, m_c , ($a=4, c=6, m_c=3$)

5, b, c, m_b

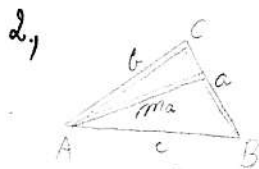
6, b, c, m_c



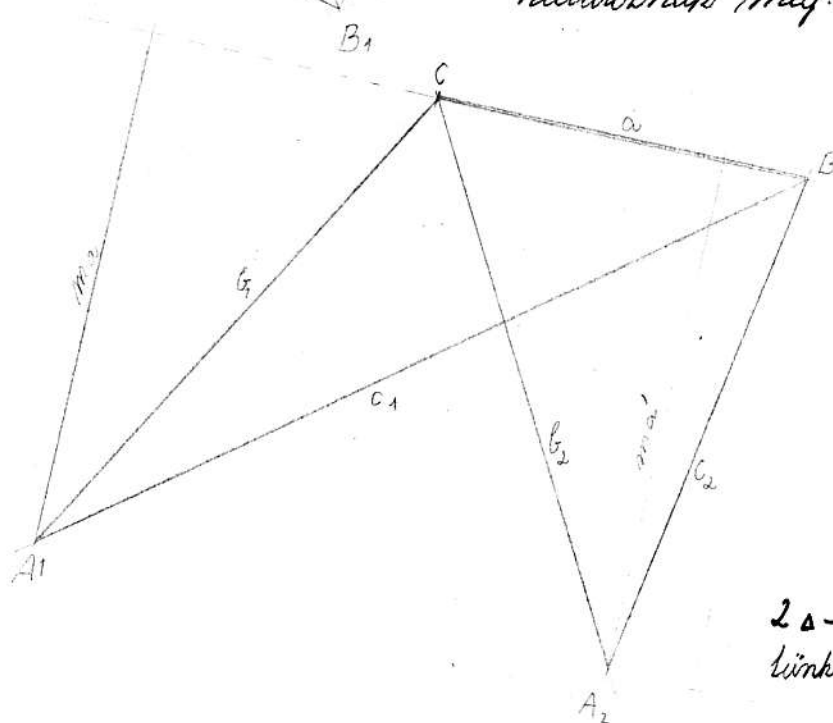
$a=6\text{ cm}$
 $b=8\text{ cm}$
 $m_b=4\text{ cm}$



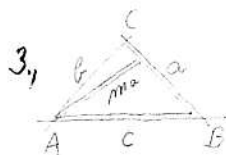
Írjuk az adatok két Δ -et határozóknak meg.



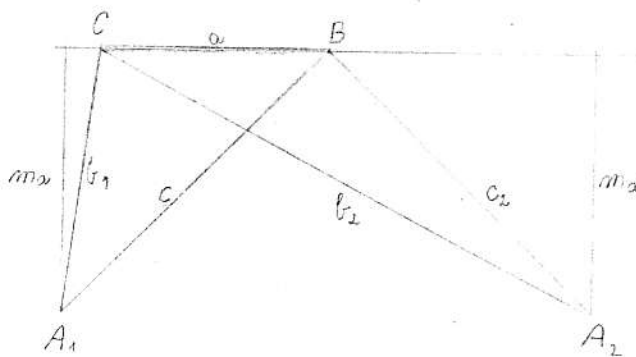
$a=5\text{ cm}$
 $b=8\text{ cm}$
 $m_a=7\text{ cm}$



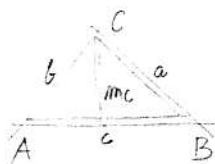
2 Δ -et szerkesztünk.



$a=5\text{ cm}$
 $c=5\text{ cm}$
 $m_a=3,5\text{ cm}$



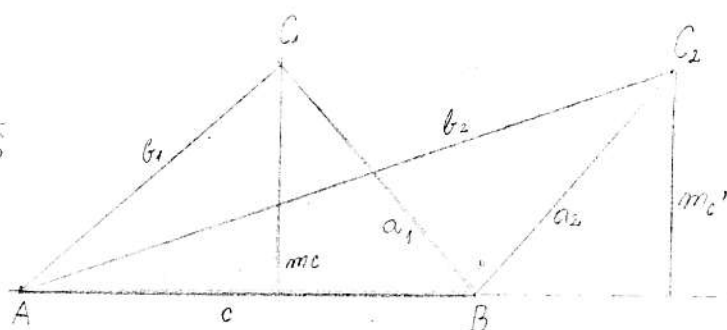
4,



$a = 4 \text{ cm}$

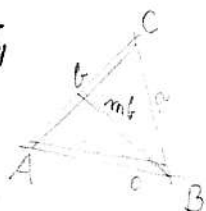
$c = 6 \text{ cm}$

$m_c = 3 \text{ cm}$



2. szerkeszthető

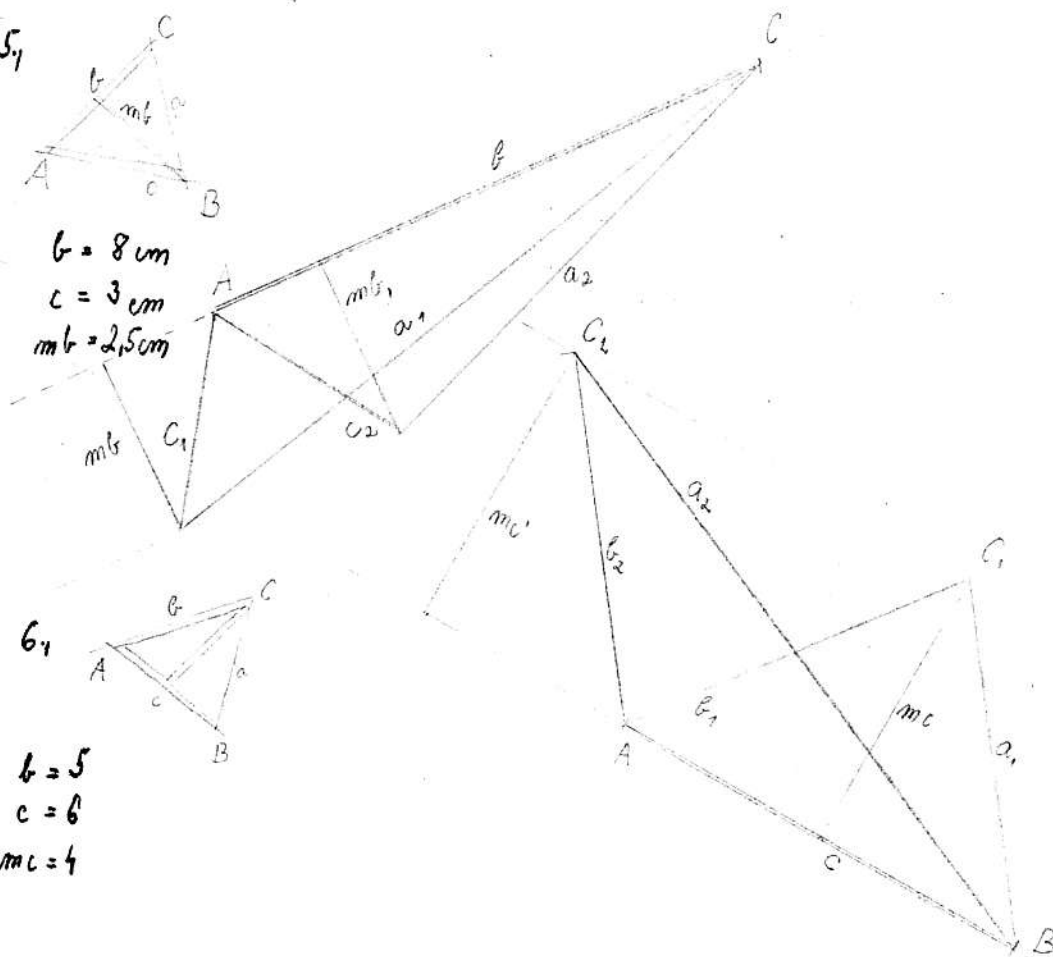
5,



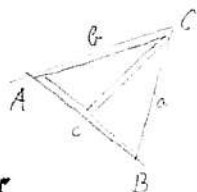
$b = 8 \text{ cm}$

$c = 3 \text{ cm}$

$m_b = 2,5 \text{ cm}$



6,



$b = 5$

$c = 6$

$m_c = 4$

$$\frac{x-5}{x-1} > 0$$

a törtnél a számláló is nevező lehet pozitív, vagy negatív

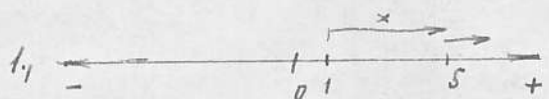
1. Mindkettő pozitív:

$$\begin{aligned} x &> +5 \\ x &> +1 &\Rightarrow \underline{\underline{x > +5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad x-5 &> 0 \\ x-1 &> 0 \\ \hline x &> 5 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

2. Mindkettő negatív

$$\begin{aligned} x-5 &< 0 \\ x-1 &< 0 \\ \hline x &< 5 \\ x &< 1 &\Rightarrow \underline{\underline{x < 1}} \end{aligned}$$

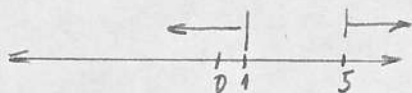


$$\begin{aligned} \text{Pl: } \frac{1}{2}i \quad \frac{-4,5}{-0,5} &> 0 \\ \hline 9 &> 0 \end{aligned}$$

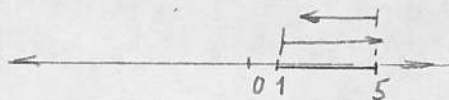
$$\underline{\underline{1 > x > 5}}$$

$$\frac{x-5}{x-1} < 0$$

$$\begin{aligned} 1. \quad x-5 &> 0 \\ x-1 &< 0 \\ \hline x &> 5 \\ x &< 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2. \quad x-5 &< 0 \\ x-1 &> 0 \\ \hline x &< 5 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

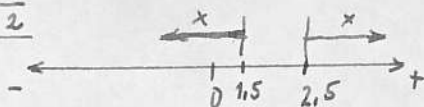


1

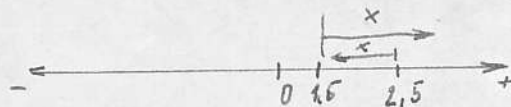
$$\frac{3-2x}{2x-5} > 0$$

$$\begin{aligned} 1. \quad 3-2x &> 0 \\ 2x-5 &> 0 \\ \hline -2x &> -3 \\ 2x &< 3 \\ x &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &> 5 \\ x &> \frac{5}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2. \quad 3-2x &< 0 \\ 2x-5 &< 0 \\ \hline -2x &< -3 \\ x &> \frac{3}{2} \\ \hline 2x &< 5 \\ x &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$



15. Házi feladat

1966. 1. 7.

$$1.) \frac{3-2x}{2x-5} < 0$$

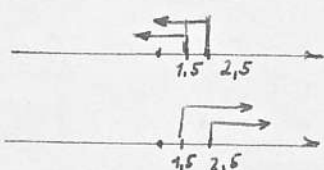
$$2.) \frac{3x-7}{3-2x} > 0$$

$$3.) \frac{3x-7}{3-2x} < 0$$

$$4.) \frac{x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{2}} > 0$$

$$5.) \frac{x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{2}} < 0$$

$$1.) \frac{3-2x}{2x-5} < 0$$



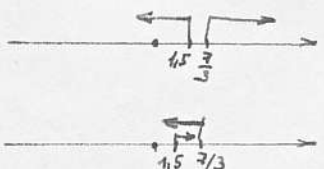
$$\begin{aligned} 3-2x &> 0 \\ 2x-5 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x &> -3 & 2x &< 5 \\ 2x &< 3 & x &< 2.5 \\ x &< \frac{3}{2} & x &< 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3-2x &\neq 0 \\ 2x-5 &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x &< -3 & 2x &> 5 \\ 2x &> 3 & x &> 2.5 \\ x &> \frac{3}{2} & x &> 2.5 \end{aligned}$$

$$2.) \frac{3x-7}{3-2x} > 0$$



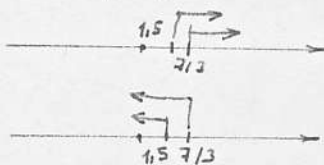
$$\begin{aligned} 3x-7 &> 0 \\ 3-2x &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &> 7 & -2x &> -3 \\ x &> \frac{7}{3} & 2x &< 3 \\ x &> 2.3 & x &< 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-7 &< 0 \\ 3-2x &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &< 7 & -2x &< -3 \\ x &< \frac{7}{3} & 2x &> 3 \\ x &< 2.3 & x &> 1.5 \end{aligned}$$

$$3.) \frac{3x-7}{3-2x} < 0$$



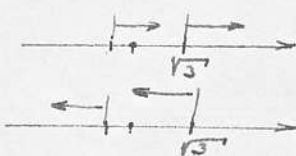
$$\begin{aligned} 3x-7 &> 0 \\ 3-2x &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &> 7 & -2x &< -3 \\ x &> \frac{7}{3} & 2x &> 3 \\ x &> 2.3 & x &> 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-7 &< 0 \\ 3-2x &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &< 7 & -2x &> -3 \\ x &< \frac{7}{3} & 2x &< 3 \\ x &< 2.3 & x &< 1.5 \end{aligned}$$

$$4.) \frac{x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{2}} > 0$$



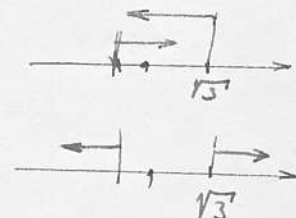
$$\begin{aligned} x-\sqrt{3} &> 0 \\ 2x+\sqrt{2} &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &> \sqrt{3} & 2x &> -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &> 1.73 & x &> -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-\sqrt{3} &< 0 \\ 2x+\sqrt{2} &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &< \sqrt{3} & 2x &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &< 1.73 & x &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$5.) \frac{x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{2}} < 0$$



$$\begin{aligned} x-\sqrt{3} &< 0 \\ 2x+\sqrt{2} &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &< \sqrt{3} & 2x &> -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &< 1.73 & x &> -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

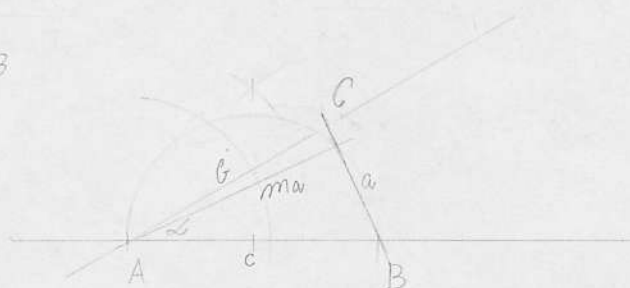
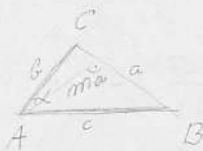
$$\begin{aligned} x-\sqrt{3} &> 0 \\ 2x+\sqrt{2} &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &> \sqrt{3} & 2x &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &> 1.73 & x &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

1966.1.11.

16.000.

$c = 3,3$
 $m_a = 3$
 $\angle = 30^\circ$



1) $|x-2| < 5$

$|x-2| < 0$

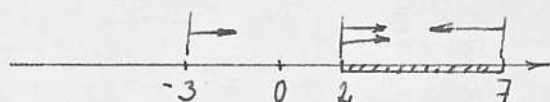
$|x-2| = -(x-2) < 0$

$-(x-2) < 5 \quad 2-x < 0$
 $2-x < 5 \quad -x < -2$
 $-x < 3 \quad \underline{x > 2}$
 $\underline{x > -3}$

$|x-2| > 0$

$|x-2| = x-2 > 0$

$x-2 < 5 \quad x-2 > 0$
 $x-2 < 5 \quad \underline{x \geq 2}$
 $\underline{x < 7}$



$x > -3 > 2$
 $x > 2$

$7 > x \geq 2$

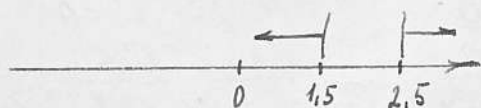
2) $\frac{2x-5}{3-2x} > 0$

$2x-5 > 0$
 $3-2x > 0$

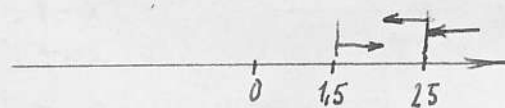
$2x > 5 \quad -2x > -3$
 $\underline{x > 2,5} \quad 2x < 3$
 $\underline{x < \frac{3}{2}}$

$2x-5 < 0$
 $3-2x < 0$

$2x < 5 \quad -2x < -3$
 $\underline{x < 2,5} \quad 2x > 3$
 $\underline{x > 1,5}$



$\underline{1,5 > x > 2,5}$



$\underline{2,5 > x > 1,5}$

3,

$3x+4 < 2x+16$

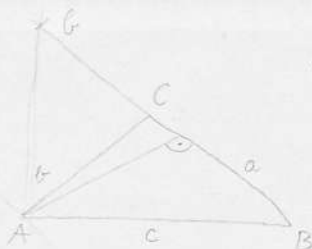
$2x + \frac{4}{3} + 2 > 5x/7 + 1$

$3x-2x < 12$
 $\underline{x < 12}$

$42x + 7 + 42 > 15x + 21$
 $42x - 15x > 21 - 49$
 $27x > -28$



$$\begin{aligned} a+b &= \\ ma &= \\ c &= \end{aligned}$$



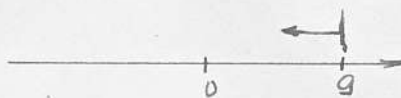
$$2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4} \quad | \cdot 8$$

$$16 + 3x + 3 < 24 - 2x + 2$$

$$3x + 19 < 26 - 2x$$

$$5x < (41) \quad 45$$

$$\underline{x < 9}$$



16. Házi feladat

1966. 1. 11

$$1, \quad c; mb; B \quad 2, \quad (c; mb;) \quad \frac{5 \cdot (x-1) - 1}{6} > \frac{2(x+1)}{3}$$

$$3, \quad \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} > \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$$

$$4, \quad \frac{2x-5}{3-2x} > 0$$

$$5, \quad \frac{15-4x}{7+3x} < 0$$

$$6, \quad |x-3,4| < 0,6$$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

$$7, \quad x + y - z = 17$$

$$x - y + z = 13$$

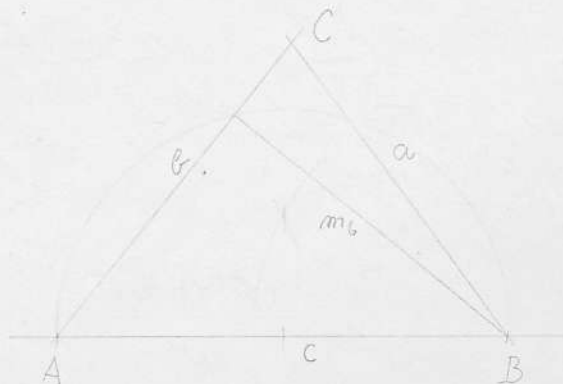
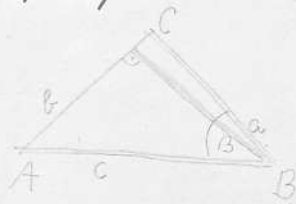
$$-x + y + z = 7$$

$$8, \quad x + 2y + 5z = 1$$

$$3x + 4y + 7z = 2$$

$$6x + 8y + 9z = 4$$

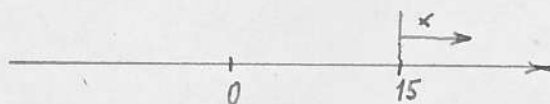
$$1, \quad c; mb; B$$



$$2. \frac{5(x-1)}{6} - 1 > \frac{2(x+1)}{3} \quad | \cdot 6$$

$$5x - 5 - 6 > 4x + 4$$

$$\underline{x > 15}$$



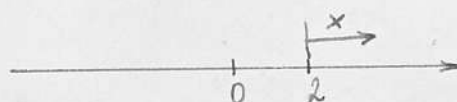
$$3. \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} > \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} \quad | \cdot 30$$

$$18x - 6 - 195 + 15x > 70x - 55x - 165$$

$$33x - 15x > 201 - 165$$

$$18x > 36$$

$$\underline{x > 2}$$



$$4. \frac{2x-5}{3-2x} > 0$$

$$\frac{2x-5 > 0}{3-2x > 0}$$

$$2x > 5$$

$$\underline{x > 2,5}$$

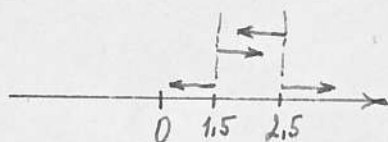
$$\frac{-2x > -3}{\underline{x < 1,5}}$$

$$\underline{2,5 > x > 1,5}$$

$$\frac{2x-5 < 0}{3-2x < 0}$$

$$\frac{2x < 5}{\underline{x < 2,5}}$$

$$\frac{-2x < -3}{\underline{x > 1,5}}$$



$$5. \frac{15-4x}{7+3x} < 0$$

$$\frac{15-4x > 0}{7+3x < 0}$$

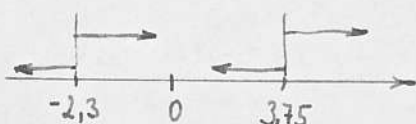
$$\frac{-4x > -15}{4x < 15} \quad \frac{3x < -7}{\underline{x < -2,3}}$$

$$\underline{2,3 > x < 3,75} \rightarrow \underline{x < -2,3}$$

$$\frac{15-4x < 0}{7+3x > 0}$$

$$\frac{-4x < -15}{4x > 15} \quad \frac{3x > -7}{\underline{x > -2,3}}$$

$$\underline{x > 3,75}$$



$$6. |x-3,4| < 0,6$$

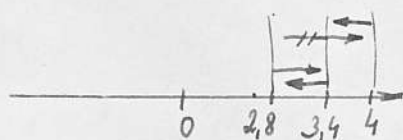
$$\frac{|x-3,4| < 0}{|x-3,4| = -(x-3,4)}$$

$$\underline{x \neq 3,4}$$

$$\frac{3,4-x < 0,6}{-x < -2,8}$$

$$\underline{x > 2,8}$$

$$\underline{3,4 \neq x > 2,8}$$



$$|x-3,4| \neq 0$$

$$|x-3,4| = x-3,4$$

$$\underline{x > 3,4}$$

$$x-3,4 < 0,6$$

$$\underline{x < 4}$$

$$\underline{4 > x > 3,4}$$

$$7. \quad \begin{aligned} x + y - z &= 17 \\ x - y + z &= 13 \\ -x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 1 = \underline{-4}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 17 & 1 & -1 \\ 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-17 - 13 + 7) - (7 + 13 + 17) = -23 - 37 = \underline{-60}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 17 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (13 - 17 - 7) - (13 + 17 + 7) = -11 - 37 = \underline{-48}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-60}{-4} = \underline{15}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-48}{-4} = \underline{12}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (-7 - 13 + 17) - (17 + 13 + 7) = -3 - 37 = \underline{-40}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-40}{-4} = \underline{10}$$

$$8. \quad \begin{aligned} x + 2y + 5z &= 1 \\ 3x + 4y + 7z &= 2 \\ 6x + 8y + 9z &= 4 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (36 + 120 + 84) - (120 + 56 + 54) = 240 - 230 = \underline{10}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (36 + 56 + 80) - (80 + 56 + 36) = \underline{0}$$

$$x = \underline{0}$$

$$z = \underline{0}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (18 + 60 + 42) - (60 + 28 + 27) = \underline{235}$$

$$y = \underline{95}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (16 + 24 + 24) - (24 + 16 + 24) = \underline{0}$$

Gyakorlat 17. óra

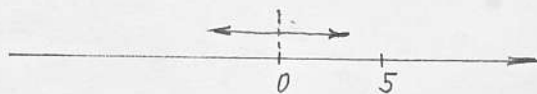
1966. 1. 14.

$$\frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} < \frac{x-3}{2} + \frac{x+5}{3} \quad | \cdot 6$$

$$3x + 2x - 4 < 3x - 9 + 2x + 10$$

$$5x - 4 < 5x + 1$$

$$\underline{0 < 5}$$



$$\frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2a-4a^2} = \frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} + \frac{1}{4a^2-2a} \quad | \cdot 2a(2a-1)$$

$$\begin{aligned} & (2a-1)(2a-1) - 2a \cdot 2a + 1 = \\ & = (2a-1)^2 - 4a^2 + 1 = 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 1 = \\ & = \frac{2-4a}{4a^2-2a} = \frac{1-2a}{2a^2-a} = -\frac{1-2a}{a(1-2a)} = -a. \end{aligned}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < 4 - \frac{2x}{3} \quad | \cdot 6$$

$$\frac{3-x}{3} < \frac{1}{2} \quad | \cdot 6$$

$$2x-3 < 24-4x$$

$$6x < 27$$

$$x < \frac{27}{6}$$

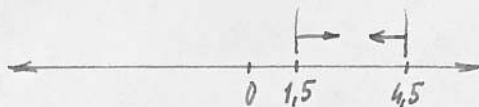
$$\underline{x < 4,5}$$

$$6-2x < 3$$

$$-2x < -3$$

$$\underline{x > 1,5}$$

$$\underline{4,5 > x > 1,5}$$



$$\underline{x = 2; 3; 4}$$

$$\frac{x-4}{x+2} < 0$$

$$x-4 > 0$$

$$x+2 < 0$$

$$\underline{x > 4}$$

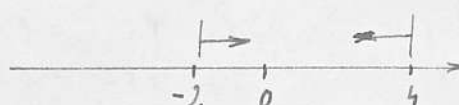
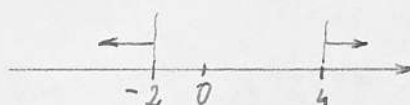
$$\underline{x < -2}$$

$$x-4 < 0$$

$$x+2 > 0$$

$$\underline{x < 4}$$

$$\underline{x > -2}$$



$$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad | \cdot 4$$

$$a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2$$

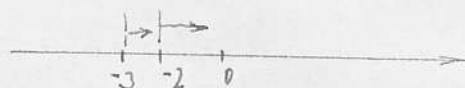
$$(a+b)(a+b) \leq 2(a^2+b^2)$$

$$2ab \leq 2a^2+2b^2-a^2-b^2$$

$$2ab \leq a^2+b^2$$

$$0 \leq a^2-2b+b^2$$

$$\underline{0 \leq (a-b)^2}$$



$$(x+3)(x+2) > 0$$

$$(x+3) > 0 \quad x > -3$$

$$(x+2) > 0 \quad x > -2$$

$$(x+3) < 0 \quad x < -3$$

$$(x+2) < 0 \quad x < -2$$

$$\underline{x > -2}$$

$$\underline{x < -3}$$

$$0 \rightarrow \infty_+$$

$$\underline{-3 > x > -2}$$

1966.1.14.

17. Házi feladat

$$(x+1)(x-5) < 0$$

$$(x-4)(x+3) > 0$$

$$(x-5)(x-3) < 0$$

$$\frac{x-4}{x+2} < 0$$

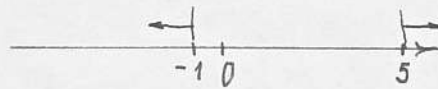
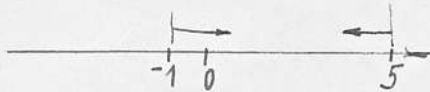
Milyen levm. számoknál

$$\text{Bizs. be: } \frac{6m+8}{m^2+1} \leq 9$$

$$1, (x+1)/(x-5) < 0$$

$$\begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x-5 < 0 \\ \hline x > -1 \\ x < 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+1 < 0 \\ x-5 > 0 \\ \hline x < -1 \\ x > 5 \end{array}$$

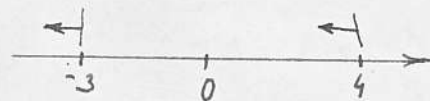
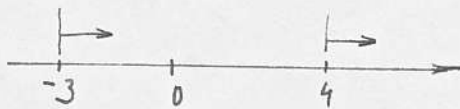


$$\underline{\underline{-1 < x < 5}} \quad x: 1, 2, 3, 4$$

$$2, (x-4)/(x+3) > 0$$

$$\begin{array}{l} x-4 > 0 \\ x+3 > 0 \\ \hline x > 4 \\ x > -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-4 < 0 \\ x+3 < 0 \\ \hline x < 4 \\ x < -3 \end{array}$$

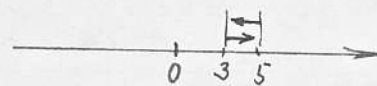
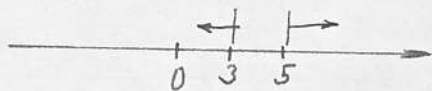


$$\underline{\underline{4 < x < -3}} \quad x: 5 \rightarrow \infty^+$$

$$3, (x-5)/(x-3) < 0$$

$$\begin{array}{l} x-5 > 0 \\ x-3 < 0 \\ \hline x > 5 \\ x < 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-5 < 0 \\ x-3 > 0 \\ \hline x < 5 \\ x > 3 \end{array}$$

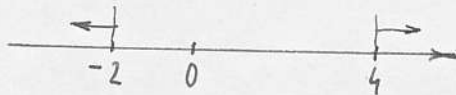


$$\underline{\underline{3 < x < 5}} \quad x: 4$$

$$4, \frac{x-4}{x+2} < 0$$

$$\begin{array}{l} x-4 > 0 \\ x+2 < 0 \\ \hline x > 4 \\ x < -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-4 < 0 \\ x+2 > 0 \\ \hline x < 4 \\ x > -2 \end{array}$$



$$\underline{\underline{-2 < x < 4}} \quad x: 1, 2, 3$$

$$5, \frac{6m+8}{m^2+1} \leq 9$$

$$6m+8 \leq 9m^2+9$$

$$0 \leq 9m^2-6m+1$$

$$\underline{\underline{0 \leq (3m-1)^2}}$$

1966. 1. 21.

18. óra

1. $3x > |x+1|$

$x+1 \geq 0 \rightarrow |x+1| = x+1$

$x+1 < 0 \rightarrow |x+1| = -x-1$

$3x > x+1$

$x+1 \geq 0$

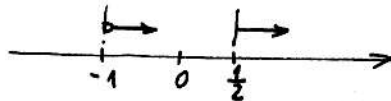
$2x > 1$

$x \geq -1$

$x > \frac{1}{2}$

$x \geq -1$

$x > \frac{1}{2}$



$3x > -x-1$

$x+1 < 0$

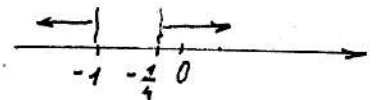
$4x > -1$

$x < -1$

$x > -\frac{1}{4}$

$x < -1$

$-1 < x < -\frac{1}{4}$



2. a) $2a + 3b = 8$

b) $4 - a = \frac{3}{2}b$

$2a + 3b = 8$

$-a - \frac{3}{2}b = -4 \quad | \cdot 2$

 $a = b$ négyesek sok megoldás

3. $(5x+5)^2 + (12x-2)^2 > 169x^2$

$3x + 5 < 0$

$25x^2 + 50x + 25 + 144x^2 - 48x + 4 > 169x^2$

$3x < -5$

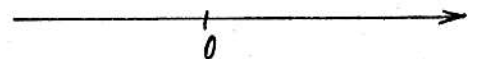
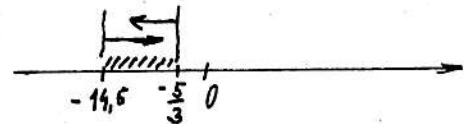
$x > -\frac{29}{2} \leftarrow 2x > -29 \quad | : 2$

$x < -\frac{5}{3} \leftarrow 3x < -5$

$-2x < 29$

$3x < -5$

$x < -\frac{5}{3}$



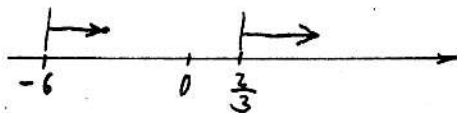
$\frac{x+6}{3x-2} > 0$

$x+6 > 0$

$3x-2 > 0$

$x > -6$

$x > \frac{2}{3}$



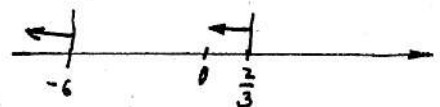
$x > \frac{2}{3}$

$x+6 < 0$

$3x-2 < 0$

$x < -6$

$x < \frac{2}{3}$



$x < -6$

$$5. \quad \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \quad | \cdot ab$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\underline{\underline{(a-b)^2 \geq 0}}$$

$$6. \quad \frac{|3-5x|}{x-1} > 5$$

$$|3-5x| > 5x-5$$

$$13-5x \geq 0 \rightarrow |3-5x| = 3-5x$$

$$3-5x \geq 0$$

$$3-5x > 5x-5$$

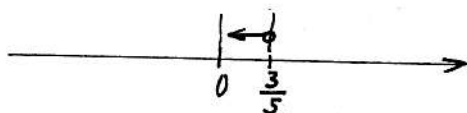
$$-5x \geq -3$$

$$-10x > -8$$

$$x \leq \frac{3}{5}$$

$$x < \frac{4}{5}$$

$$x \leq \frac{3}{5}$$



$$3-5x < 0 \rightarrow |3-5x| = 5x-3$$

$$5x-3 > 5x-5$$

$$3-5x < 0$$

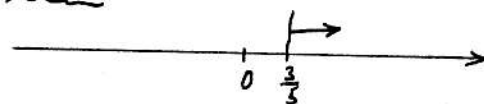
$$-3 > -5$$

$$-5x < -3$$

$$3 < 5$$

$$x > \frac{3}{5}$$

$$x > \frac{3}{5}$$



19. ora

$$1. \quad \begin{aligned} 10x + 5y &= 65000 \rightarrow 10x = 65000 - 5y & x &= \frac{65000 - 5y}{10} \\ 25x + 3y &= 134000 \end{aligned}$$

$$\frac{25(65000 - 5y)}{10} + 3y = 134000$$

$$\begin{aligned} 162500 - 125y + 30y &= 134000 \\ -95y &= -28500 \\ y &= 300 \end{aligned}$$

$$x = \frac{65000 - 15000}{10} = 5000$$

1966. 1. 25.

$$\begin{array}{rcl}
 2. & x - y - 12 & = 5 \\
 & -x + y - 12 & = 1 \\
 & -x - y + 12 & = -15
 \end{array}
 \quad D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -15 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 19 = -24$$

$$x = \frac{-24}{-4} = \underline{\underline{6}}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -15 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 11 = -20$$

$$y = \frac{-20}{-4} = \underline{\underline{5}}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -15 \end{vmatrix} = 12$$

$$z = \frac{12}{-4} = \underline{\underline{-3}}$$

$$3. \quad |x-3| < 5$$

$$x-3 \geq 0 \rightarrow |x-3| = x-3$$

$$x-3 < 0 \rightarrow |x-3| = -(x-3)$$

$$0 \leq x-3 < 5$$

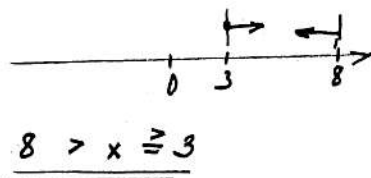
$$0 \leq x-3$$

$$x-3 < 5$$

$$\underline{\underline{x \geq 3}}$$

$$x < 5+3$$

$$\underline{\underline{x < 8}}$$



$$-x+3 < 5$$

$$-x < 5-3$$

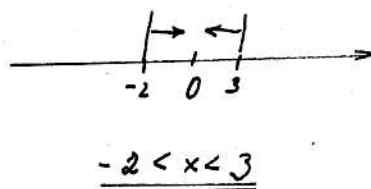
$$-x < 2 \quad | \cdot -1$$

$$\underline{\underline{x > -2}}$$

$$-|x-3| > 0$$

$$-x+3 > 0$$

$$\underline{\underline{x < 3}}$$



Pontok méltani helye

b // m // a

Ha két párhuzamos egyenesről egyenlő távolságra levő pontok halmazának méltani helye egy a mindkét egyenessel párhuzamos egyenes

$$a \times b = M$$

Az a, b egyenesektől egyenlő távolságra levő pontok méltani helye az egyenesek által bezárt szög tengelye.

Méltani helynek nevezzük valamely geometriai alakzatot, ha:

- az illő alakzat összes pontjának meghatározott tulajdonsága van.
- Existen a pontokon kívül egyetlen olyan pont sincs, melynek meg lenne ez a tulajdonság.

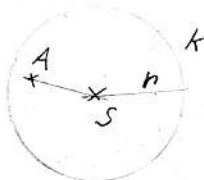
I. A $k \equiv (S; r)$ körvonal a sík azon pontjainak méltani helye, amelyek a sík egy adott pontjától, akár középpontjától egyenlő távolságra vannak.

II. Az $\overline{AB}$ felerőpontján keresztülmenő merőleges méltani helye mindazon pontoknak, amelyek az adott szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak.



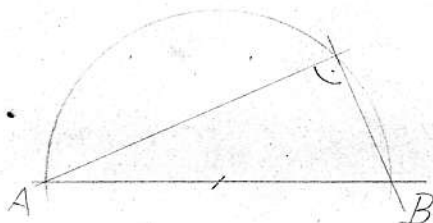
III. A k azon pontjainak méltani helyét, amelyek az adott szög száraitól egyenlő távolságra vannak, a szög felezőjének nevezzük.

IV. A k az a k azon pontjainak méltani helye, amelyeknek a k körívpontjától való távolsága a sugarainál kisebb, v. azazal egyenlő.

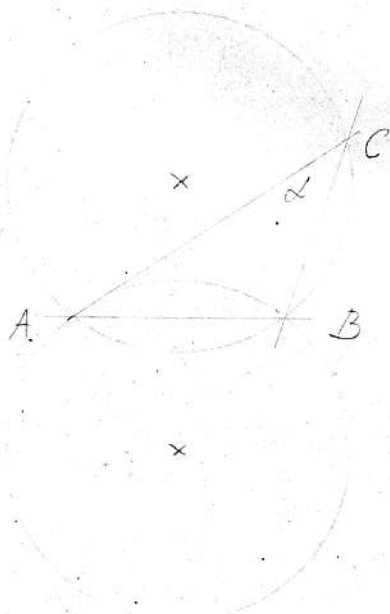


V. Adott AB átfogó köré rajzolt derékszögű háromszögben a derékszögnél levő csúcsok méltani helye olyan kör, melynek átmérője az AB szakasz.

Az A és B pontok nem tartoznak a méltani hely pontjai közé.



VI. Adva van egy AB szakasz és egy $\alpha < 180^\circ$ -os szög. Az $\angle ACB = \alpha$ szög C csúcpontjainak méltani helye áll olyan körön, amelynek az AB szakasz a körös korda és egyben szimmetria tengelye.



1966. III. 4.

20. Kézi feladat

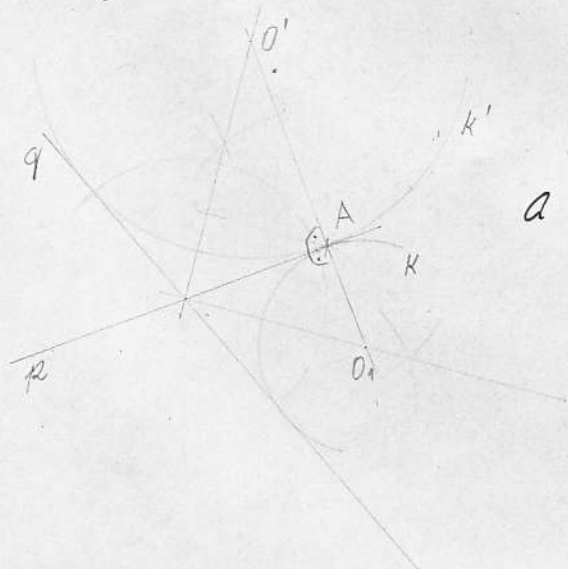
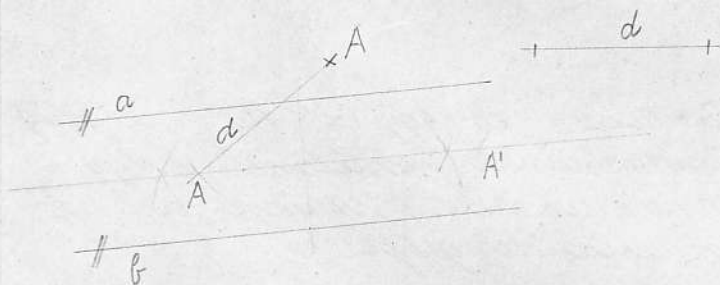
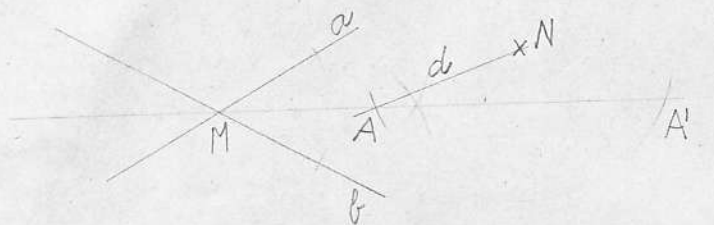
Adott $r = AB$ sugarú körök egy adott egyenesre érintkeznek.
 Szerkesztendő meg a körök középpontjainak méltani helyét.



Az adott körök középpontjainak méltani helye kétféle módon egyenes.

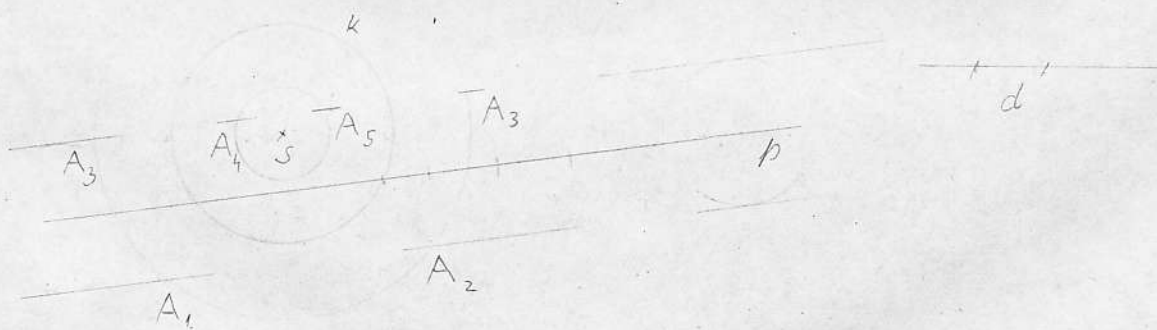
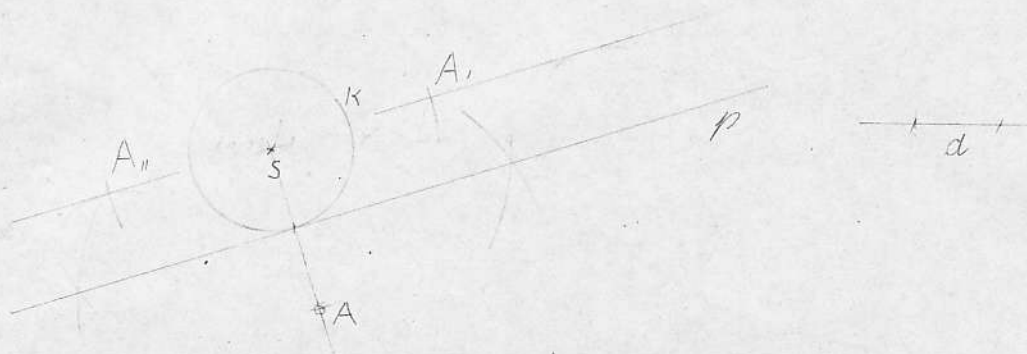
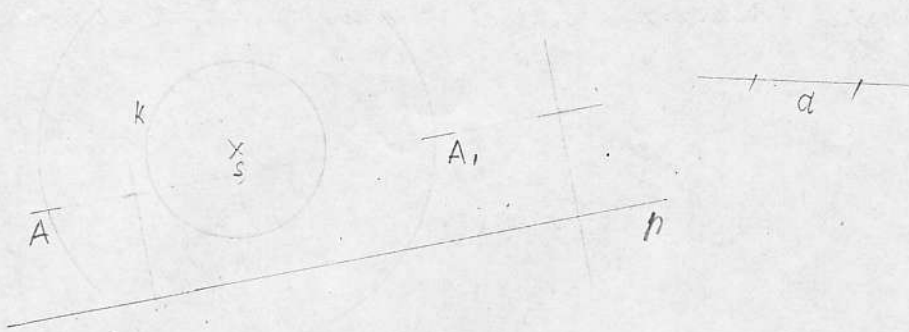
1966. III. 11.

21. Óra

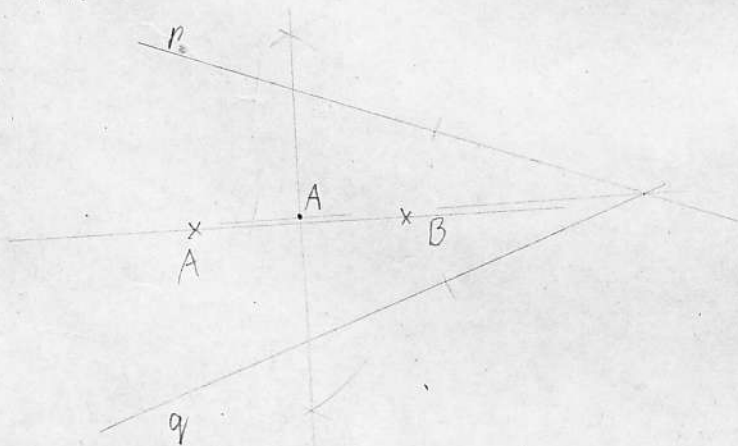


A k, k' körök érintik p -t A -ban és q -t

Adott a k kör $k = (S; r)$ és egy p egyenes.
 Keress meg azt a pontot mely k -tól, p -től
 d távra van.



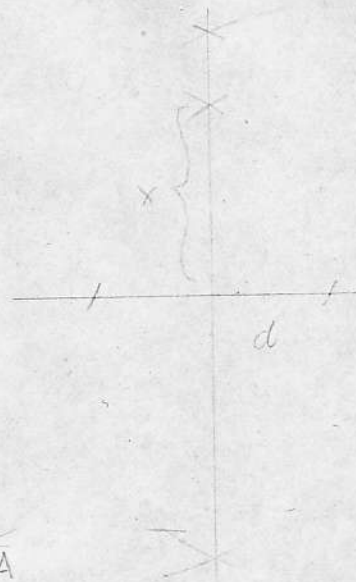
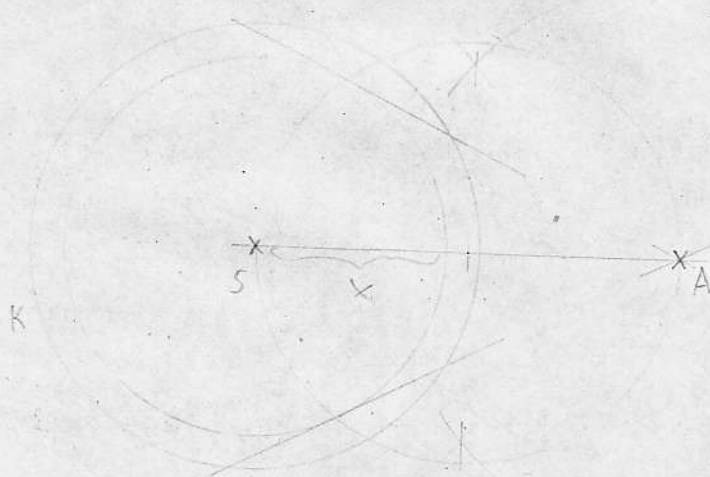
Keress meg az A, B pontokat és p, q egyenesét
 egyenlő távra van.



1966. III. 13.

21. Házi feladat

Adott a $k \equiv (S; r)$ kör és a kívül fekvő A pont.
Az A ponton keresztül húzzunk szelőt, mely a körtől d távolságra
húrt metszi ki.

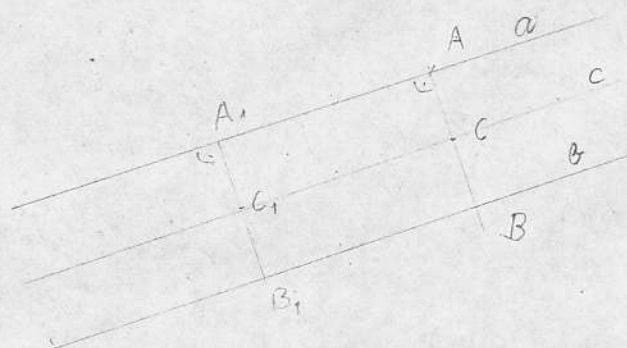


1966. IV. 16.

22. óra

Pontok mértani helye

170/1a



a // b

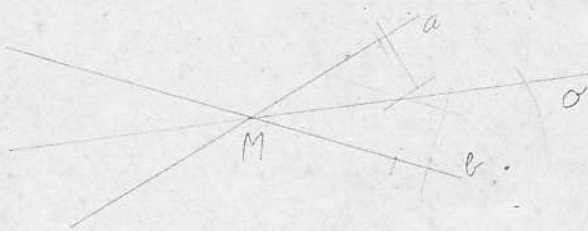
$$\begin{aligned} AC &= BC \\ A_1C_1 &= B_1C_1 \\ A_mC_m &= B_mC_m \end{aligned}$$

a // b // c

a sík azon pontjainak halmara mely a // b egyenesektől
egyenlő távra vannak, mértani helye a // b // c egyenes.

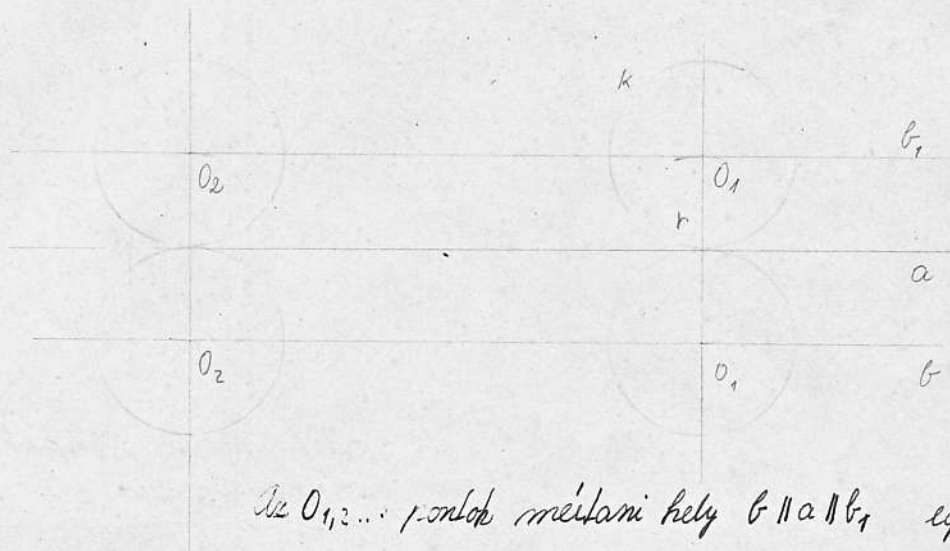
170/16

$$a \times b = M$$



Azok a halmazok azon pontjainak halmaza, melyek $a \times b$ egyenesektől egyenlő távra vannak, a két egyenes által berakott szög felezője

170/2

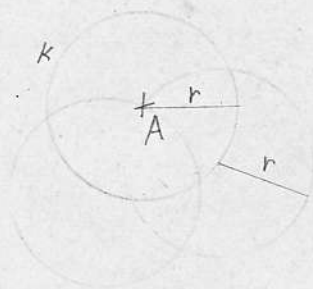


Az $O_1, O_2, \dots$ pontok mértani hely $b \parallel a \parallel b_1$ egyenesek

170/3

Adott $r = AB$ sugarú körök a.) egy adott ponton
b.) két adott ponton, minnek középpontja. Szerkesztések meg a körök középpontjainak mértani helyét.

a.)

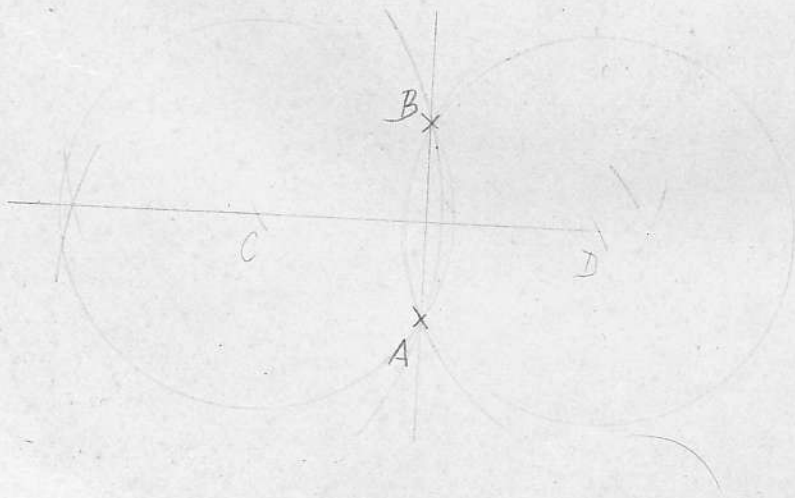


A körök középpontjainak mértani helye a $K \equiv (A; r)$ kör

b.)

A körök középpontjainak mértani helye az $AO = BO$ σ egyenes.

A mértani helyük C, D.

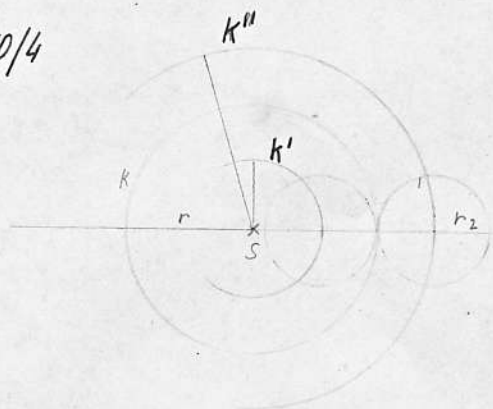


1966. III. 18.

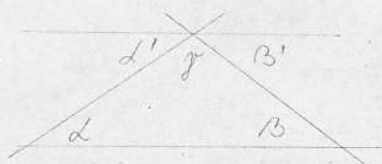
23. óra

Gyakorlat.

170/4



az 'érintő' körök középpontjainak
méltani helye az $k' = (S; r-r_2)$ és a
 $k'' = (S; r+r_2)$ koncentri-
kus körök.

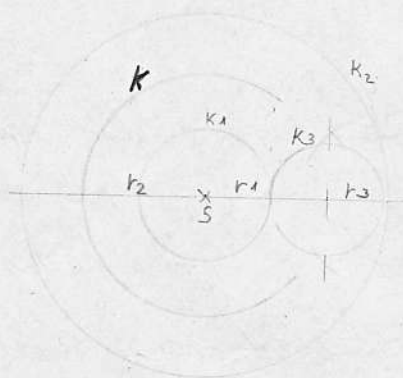


$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

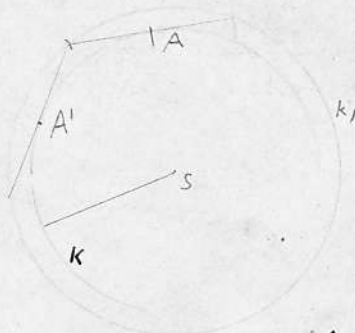
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

170/5



az adott körök 'érintő' r_3 sugarú
körök középpontjainak méltani helye
az $k = (S; r_1+r_3)$ koncentrikus kör

170/6

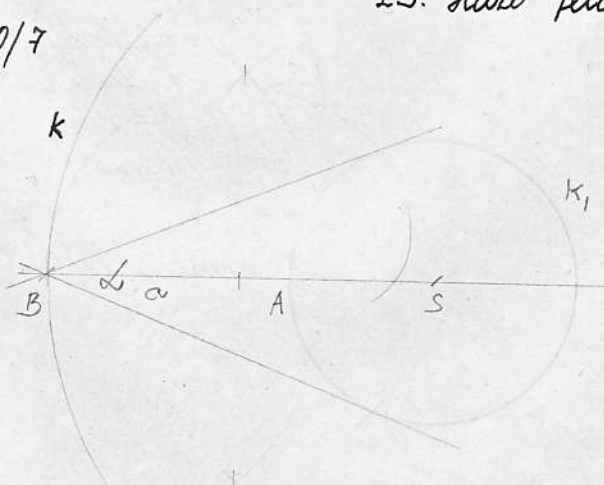


az egybevágó körök középpontja-
inak méltani helye a $k = (S; AS)$ kör.

1966. III. 18.

23. órán feladat

170/7



A k_1 kör 'érintő' szögök
csúcspontjainak méltani helye
(az αA) a $k = (S; BS)$ kör,
mely k_1 -vel koncentrikus,

$+A_2$ 

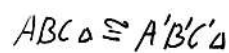
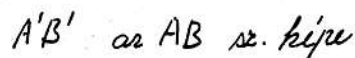
az A_1O_1 álmérőjű kör.
az A_2O_2 álmérőjű

1966. 11. 30.

O. prunivaria Lengky.

x
A

σ



$$ABC \triangle \cong A'B'C' \triangle$$

$$\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \\ BC &= B'C' \end{aligned}$$

$$ANM \triangle \cong A'NM \triangle$$

$$\begin{aligned} \text{mivel } AN &= A'N \\ NM &= NM \\ ANM \triangle &= A'NM \triangle \end{aligned}$$

OS₂O

$$AM = A'M$$

$$BPM \triangle \cong B'PM \triangle$$

OS₂

$$BM = B'M$$

$$AM = A'M \quad (1)$$

$$BM = B'M \quad (2)$$

$$\Rightarrow AM - BM = A'M - B'M$$

$$\Rightarrow \underline{AB = A'B'}$$

A tengelyes szimmetria tulajdonságai:

1. A tengelyes szimmetriát mindig a szimmetria tengelye határozza meg.
2. A szimmetria tengelye merőleges a szimmetrikus pontokat összekötő szakaszra.
3. A tengelyes szimmetrikus egyenest háló meghosszabbítás után v. a szimmetria tengelyen metszik egymást, v. a szimmetria tengelyével párhuzamosan v. ha a tengelyre merőlegesek, egy egyenest esnek.
4. A sz. tengelyen levő pontok szimmetrikus képpékhely egybeesnek a tengelyen. Önmagukban szimmetrikusak. Kétke pontok.
5. A tengelyes szimmetrikus idomok ellentétes irányban egybeesnek. A síkban az idomok ebben az esetben nem tudjuk eldönteni úgy, hogy fedjék egymást.

1966. IV. 1.

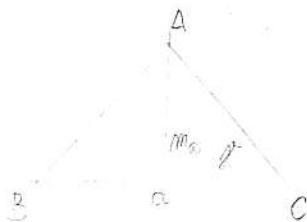
$$a = 7$$

$$\gamma = 45^\circ$$

$$m_a = 5$$

25. ábr.

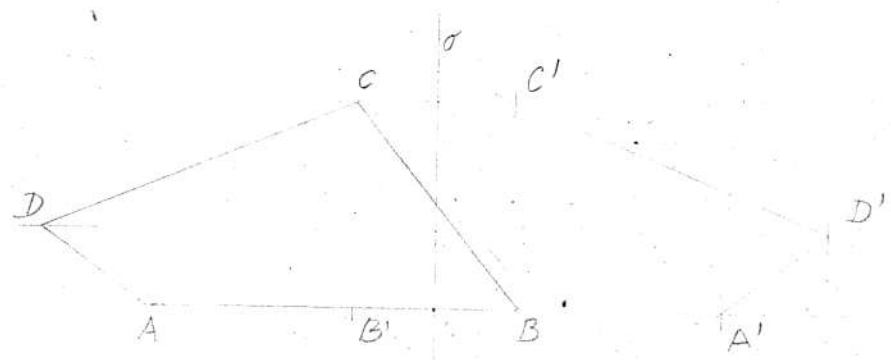
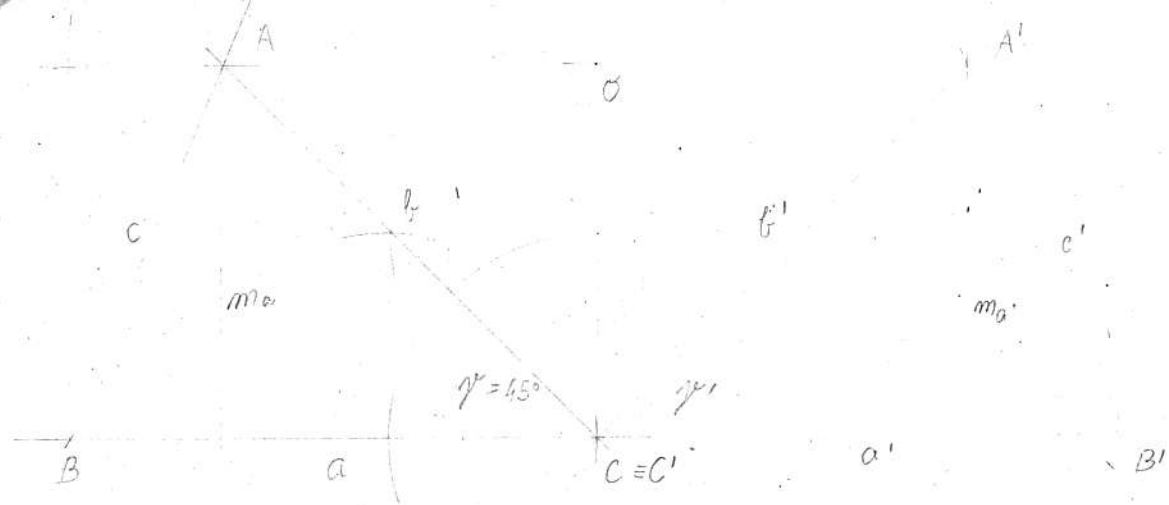
Q keresztmetszet C-m



Heron képlete:

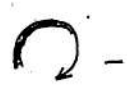
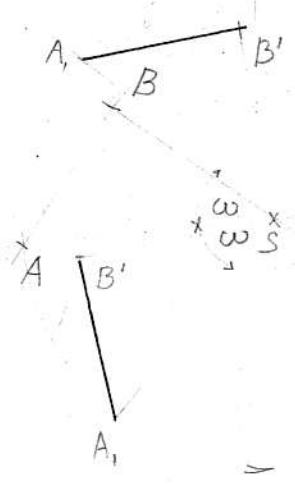
$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$



Ax elforgatás

$\omega = 45^\circ$



ω a forgatás középpontja
 ω a forgatás szöge
 SB_i az elforgatás sugarai
 SA_i

SA_i a szög megfordítása
 SA_i a szög megfordítása

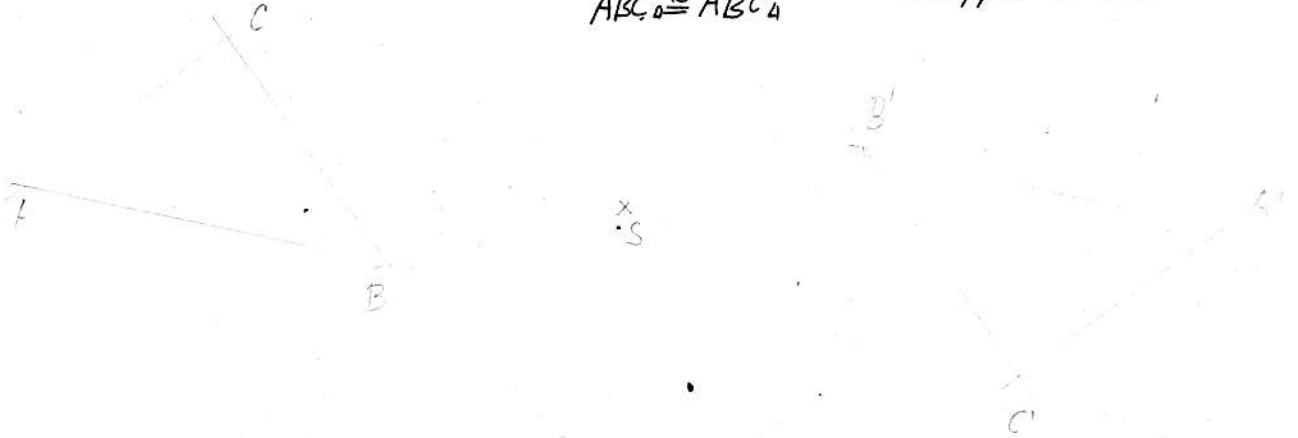
1966. IV. 15.

26. óra.

Ha az elforgatás szöge 180° , akkor középpontos szimmetriáról beszélünk.
 A forgatás középpontját szimmetria középpontjának nevezzük.
 A középpontos szimmetrikus egyenest egyenestől párhuzamosnak.
 A középpontos szimmetriának fontos szerepe van szerkesztési feladatok megoldásában.

$$ABC \cong A'B'C'$$

Középpontos szimmetria



A vektor fogalma:
 A vektor olyan mennyiség melynek nem csak nagysága, de iránya is van. Pl. sebesség.

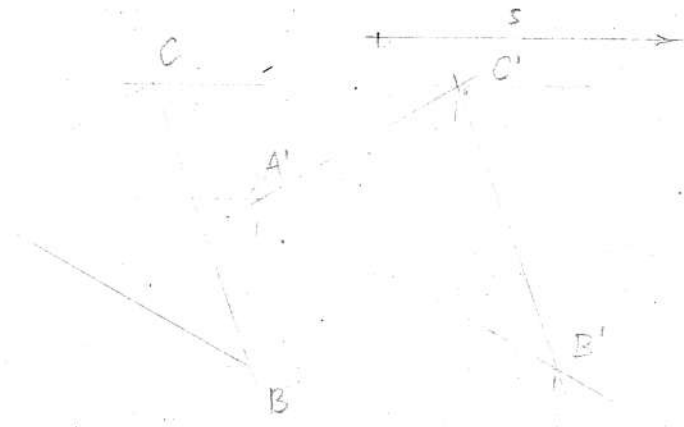
Összeadás - kivonás.

összevetés; üledék.

Arv ellátás

Arv ellátás az a geometriai művelet, amellyel valamely geometriai alakzatot úgy mozgathatunk el a síkban, hogy minden pontját egy adott irányban ugyanarra a távolságra elmozdítjuk.

- Lehetőségek:
1. A sík alakzat eltolásának is mindig az eltolás vektora határozza meg (nagysága, iránya).
 2. Az eltolás a síkban olyan áthelyezés, amikor a sík egyetlen pontja sem marad a maga helyén.
 3. Az eltolás az egyenest a vele párhuzamos egyenesbe viszi át.
 4. Az eltolás körben húzott alakzat az eredetivel azonos körülményű egybevágó alakzat.

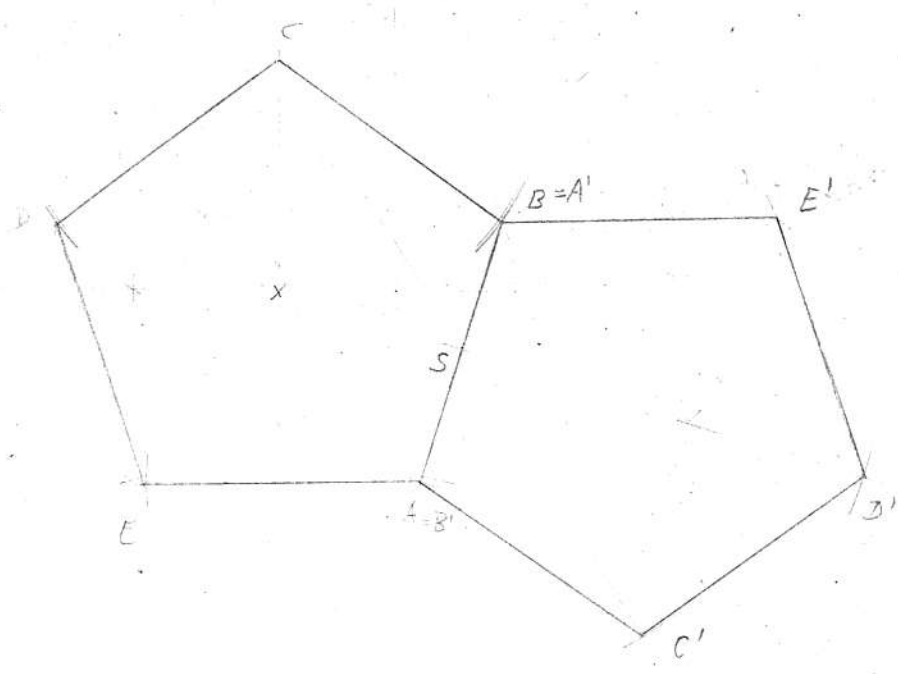


$$ABC \cong A'B'C'$$

$a = 3 \text{ cm}$ Szerb. meg a szim. körp. képet

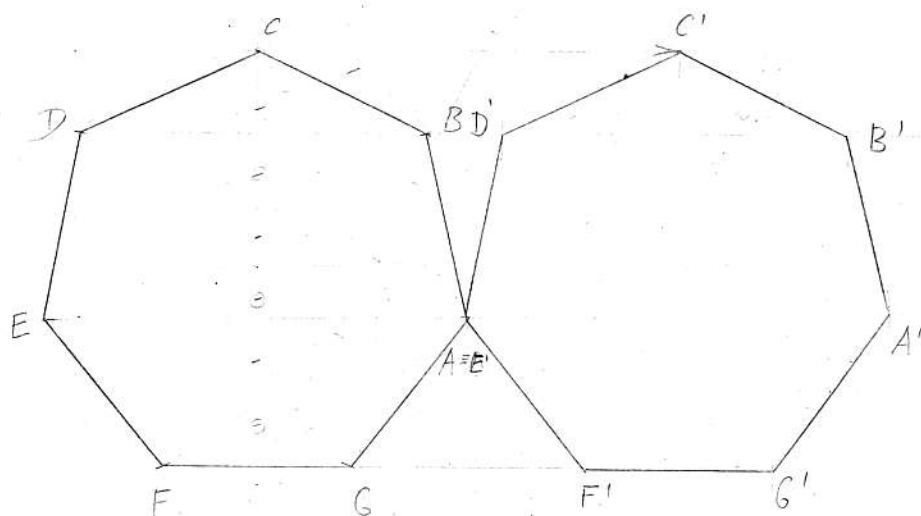


$$ABCDEF \cong A'B'C'D'E'F'$$



1966. IV. 17.

26. Házi feladat



1966. IV. 20.

27. óra.

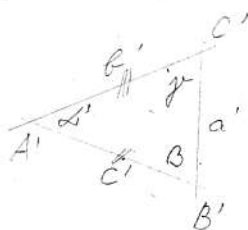
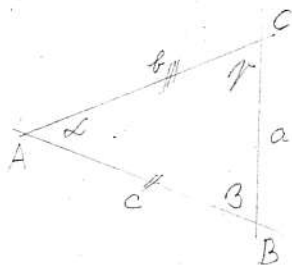
Háromszögek hasonlósága

Két háromszög hasonló ha:

$$1. \quad \angle = \angle' \quad \beta = \beta' \quad \gamma = \gamma'$$

A megfelelő oldalak egyenlőek

α, α' egyállásúak, egyenlők



$$2. \quad A'B' = kAB \quad A'C' = kAC \quad B'C' = kBC \quad k \neq 0$$

A megfelelő oldalak aránya ugyanaz.

k hasonlósági együttható

$$\begin{aligned} \text{Ha } k &= 1 \rightarrow ABC \triangleq \text{egyenlő} A'B'C' \\ k &> 1 \rightarrow \text{nagyobbság} \\ k &< 1 \rightarrow \text{kicsinyítés} \end{aligned}$$

Hasonlóság jele: $\sim$ pl.: $ABC \triangleq \sim A'B'C'$

$$1, \text{ Ha } ABC \Delta \sim A'B'C' \Delta \rightarrow \begin{matrix} \angle = \angle' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{matrix}$$

$$2, \text{ Ha } ABC \Delta \sim A'B'C' \Delta \rightarrow \frac{a}{a'} = k \quad \frac{b}{b'} = k \quad \frac{c}{c'} = k$$

28. óra

1966. IV. 22.

1, Két háromszög hasonló ha a két megfelelő oldal aránya és a közbeeső szög egyenlő.

$$\text{Ha } a:a_1 = b:b_1 \text{ és } \gamma = \gamma_1 \rightarrow ABC \Delta \sim A_1B_1C_1 \Delta$$

2, A megfelelő oldalak aránya egyenlő

$$\text{Ha } a:a_1 = b:b_1 = c:c_1 \rightarrow ABC \Delta \sim A_1B_1C_1 \Delta$$

3, Két $\Delta \sim$, ha 2,2 megfelelő szög egyenlő

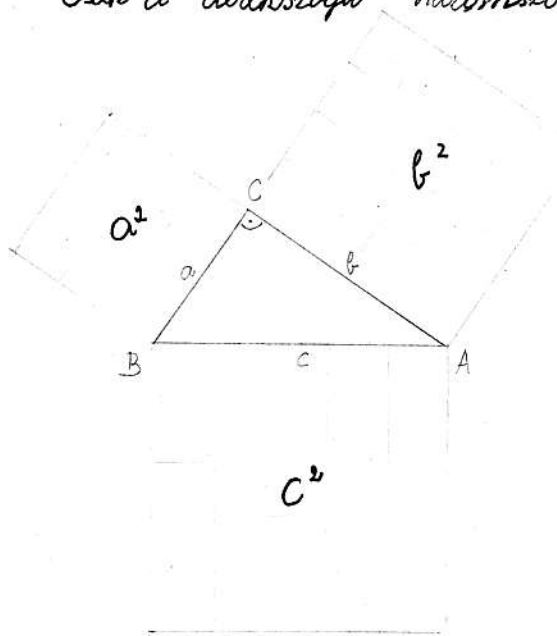
$$\text{Ha } \alpha = \alpha_1 \text{ és } \beta = \beta_1 \rightarrow ABC \Delta \sim A_1B_1C_1 \Delta$$

4, Két $\Delta \sim$, ha 2 megfelelő oldal aránya és a nagyobbik-
kal szemben fekvő szög egyenlő.

$$\text{Ha } a > b \text{ és } a:a_1 = b:b_1 \text{ és } \angle = \angle_1 \text{ akkor } ABC \Delta \sim A_1B_1C_1 \Delta$$

Euklidesz és Pitagorasz tételei.

Csak a derékszögű háromszögekre érvényesek.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a=3 \quad b=4 \quad c=5$$

Pitagorász háromszög.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

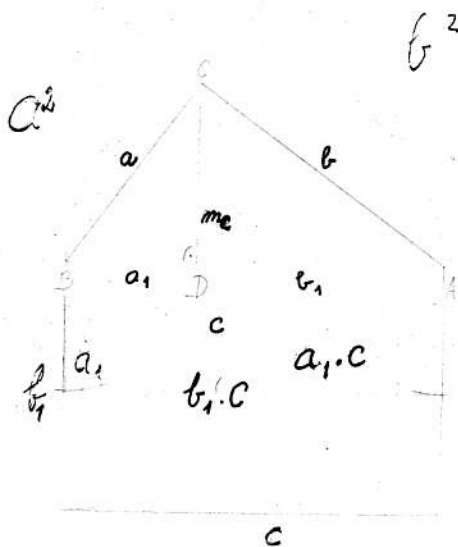
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

1966. IV. 24.

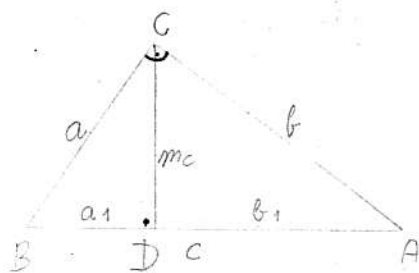
29. dia.

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1 c \\ b^2 &= b_1 c \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} BD &= a_1 \\ AD &= b_1 \end{aligned}$$

$$m_c^2 = a_1 b_1$$



$$\begin{aligned} a &= BC \\ b &= AC \\ c &= AB \\ m_c &= CD \\ a_1 &= BD \\ b_1 &= AD \end{aligned}$$

- 1, $ABC \Delta$
- 2, $BDC \Delta$
- 3, $ADC \Delta$

$$1, a^2 = a_1 c \quad ABC \Delta \sim BDC \Delta \Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{c}{a} \quad | \cdot a a_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} a a &= a_1 c \\ \underline{a^2} &= \underline{a_1 c} \end{aligned}$$

$$2, b^2 = b_1 c \quad ABC \Delta \sim ADC \Delta \Rightarrow \frac{b}{b_1} = \frac{c}{b} \quad | \cdot b b_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} b \cdot b &= b_1 c \\ \underline{b^2} &= \underline{b_1 c} \end{aligned}$$

$$3.) m_c^2 = a_1 \cdot b_1$$

$$BDC \triangle \sim DAC \triangle \Rightarrow \frac{m_c}{a_1} = \frac{b_1}{m_c} \quad | \cdot a_1 \cdot m_c \neq 0$$

$$m_c \cdot m_c = a_1 \cdot b_1$$

$$\underline{m_c^2 = a_1 b_1}$$

$$4.) a^2 = 2,6$$

$$b^2 = 2,6$$

$$a^2 + b^2 = c(a_1 + b_1)$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c$$

$$\underline{a^2 + b^2 = c^2}$$

30. óra Gyakorlat.

1965. IV. 29.

A létra hossza 11,7 m. A vízszintes talajon úgy támasztjuk a falhoz, hogy a lábát 4,5 m-re legyünk a falától. Milyen magarra ér?

$$11,7^2 - 4,5^2 = m^2$$

$$m = \sqrt{116,64}$$

$$m = 10,8 \text{ m}$$

Tehát 10,8 m magarra ér.

Egy csatorna 1,5 m széles, de meggyőződéses kanyar van rajta, melynek kúlső sugara 19,5 m. Fűrészlélésre akarják keszteni. Milyen fák iszathalnak rajta. (fűrészlélés = 0).

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 19,5^2 - 1,5^2$$

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 380,25$$

$$\frac{h}{2} = 19,5$$

$$h = 39 \text{ m.}$$

Tehát 39 m-es fák iszathalnak rajta.

Stábályos $\square$ alakú csavarfejű, melynek élei 1 cm hosszúságúak, mekkora nyílású csavarhúzó való?

$$2^2 - 1^2 = m^2$$

$$m = \sqrt{3}$$

$$m = 1,7.$$

1,7 cm nyílású csavarhúzó szükséges.

A 8,5 m hosszú létra talpát milyen messze kell a faltól a vízszintes talajon a földre támasztani, hogy 8,4 m magasságra érjen fel.

$$f^2 = h^2 - m^2$$

$$f^2 = 8,5^2 - 8,4^2$$

$$f^2 = 1,69$$

$$f = 1,3 \text{ m}$$

1,3 m-re kell állítani a faltól.

A víznyitható keltágyi létra szára 6,1 m hosszúak. Milyen távol kell a talpaikat állítani egymástól, hogy 6 m magasságra érjen fel?

$$m^2 = 6,1^2 - 6^2$$

$$m^2 = 37,21 - 36$$

$$m^2 = 1,21$$

$$m = 1,1$$

$$h = 2,2 \text{ m}$$

A szarvak talpát 2,2 m-re kell állítani egymástól.

A téglalap alakú ajtónyílás méretei 1,2 és 2,4 m. Mekkora az a legnagyobb méretű négyzet alakú fémlemez, melyet be lehet rajta vinni?

$$c^2 = 1,2^2 + 2,4^2$$

$$c = \sqrt{1,44 + 5,76}$$

$$c = \sqrt{7,20}$$

$$c = 2,8 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 24^2 = 576 \\ 416 \\ \hline 16 \end{array}$$

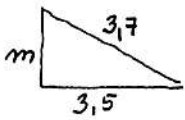
$$\begin{array}{r} \sqrt{7,2} = 2,8 \\ 320 : 46,8 \\ \hline 46 \end{array}$$

A fémlemez legnagyobb mérete 2,8 m lehet.

31. dar

1966. V. 4.

Teknautóra hordól gurítunk fel 1 deszkalejtőn. A deszka 3,7 m hosszú és az autótól 3,5 m-re éri a földet. Milyen magasan van az autó rakodósítyja?



$$m = \sqrt{3,7^2 - 3,5^2}$$

$$m = \sqrt{13,69 - 12,25}$$

$$m = \sqrt{1,44}$$

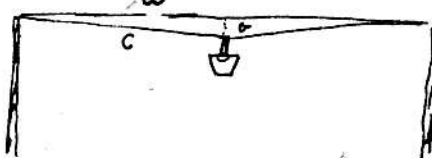
$$m = 1,2 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 3,7^2 = 13,69 \\ 949 \\ 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5^2 = 12,25 \\ 925 \\ 30 \end{array}$$

Tehát a rakodósíty 1,2 m magasan van.

2. A drótkötélpálya konténerjei egymástól 30 m távolságra vannak. Ha a csille 2 oszlop között pontosan középen van, és a kötelel 8 cm-rel megnyúlik, mennyivel süllyed elállát a drótkötél középpontja a feszítés hiúsított helyét alá.



$$a = 15 \text{ m} = 1500 \text{ cm}$$

$$b = ?$$

$$c = 1504 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} 1504^2 = 2262016 \\ 1250016 \\ 101200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2262016 \\ - 2250000 \\ \hline 12016 \end{array}$$

$$\sqrt{12016} = 109$$

$$\begin{array}{r} 20:2 \\ 2016:208.8 \\ 56.8 \\ 352 \end{array}$$

$$b = \sqrt{1504^2 - 1500^2}$$

$$b = \sqrt{12016}$$

$$b = 109 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} 1500^2 = 2250000 \\ 125 \\ 10 \end{array}$$

Tehát a csille 1,09 m-rel süllyed.

3.

$$R = 13 \text{ cm}$$

$$l = 24 \text{ cm}$$

$$d = ?$$

$$d = \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$d = \sqrt{169 - 144}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

a his a középponttól 5 cm-re van.

4.

A hársfő egyik fedélgyája egyenlő oldalú a alakú, melynek oldalai 4 m hosszúak. Mennyi bádoglemez kell a befedezéshez?



$$m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$T = \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot a}{4}$$

$$T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

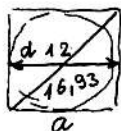
$$T = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$T = 4 \cdot \sqrt{3}$$

$$T = 1,73 \cdot 4 = 6,92$$

A befedezéshez 6,92 m² bádog kell.

A falba a cső márnája, melynek külső átmérője 12 cm, a hővezetők olyan $\square$ alakú lyukat, hagyjak, mely átlója 16,93 cm. Beilleszthető-e a cső a lyukba?



$$\frac{d}{\sqrt{2}} \geq 12$$

$$\frac{141 \cdot 12}{282}$$

$$\frac{16,93}{\sqrt{2}} \geq 12$$

$$\frac{16,9^2}{1}$$

$$16,93 \geq 12 \cdot 1,41$$

$$\underline{16,93 \geq 16,92}$$

Tehát a cső beilleszethető.

1966. V. 4.

31. Házvi feladat

1, A téglalap egyik oldala $a = 5$ cm
 $b = 2$ cm. Terüetszámát az adott
 téglalappal egyenlő területű négyzettel!

2, A kőcső alakú víztartály élén 3 m hosszúak.
 henger alakú víztoronyban helyezik el.
 Mekkora lesz a víztorony belső körének sugara, ha a fal
 és a tartály között mindenütt legalább 70 cm-es túlnyomást
 kell lennie?

1,

$$m^2$$

$$m$$

$$m^2 = a \cdot b$$

$$a_1 \cdot b_1$$

$$a_1$$

$$b_1$$

2,



$$d_1 = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{141 \cdot 150}{7050}$$

$$d = 3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 70,7$$

$$d = 300 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 70$$

$$r = 150 \cdot \sqrt{2} + 70$$

$$r = 211,5 + 70$$

$$r = 281,5 \text{ cm}$$

Tehát a henger-alakú építmény sugara 281,5 cm.

1. Egy 2,5 cm átmérőjű lyukba szerelt körben olyan kisebb alakú pálcát kell beilleszteni, melynek keresztmetszete téglalap: 1,5 cm és 2,3 cm mérettel. Beilleszthető-e? Ha nem, illeszthető le, akkor a 2,3 cm-es mérettől milyen vastag méretet kell levágni?



$$d = \sqrt{1,5^2 + 2,3^2}$$

$$d = \sqrt{2,25 + 5,29}$$

$$d = \sqrt{7,54}$$

$$d = 2,7 \text{ cm}$$

$$\sqrt{7,54} = 2,7$$

$$354 : 47,7$$

$$35$$

$$25^2 =$$

$$425$$

$$2,3^2 = 5,29$$

$$4$$

$$129$$

Tehát a kisebb nem illeszthető le.

$$a = \sqrt{2,5^2 - 1,5^2}$$

$$a = \sqrt{6,25 - 2,25}$$

$$a = \sqrt{4}$$

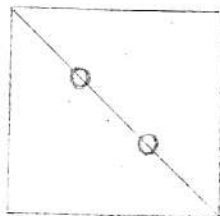
$$a = 2$$

Tehát 0,3 cm-t kell levágni.

2.

$$a, b, = \overline{AB}^2$$

3. 15 cm oldalú négyzet alakú vaslemez állja mentén 2. 1,5 cm sugarú kör alakú lyukat kell fúrni úgy, hogy a lyukak pereme egymástól és a lemez cséljától egyenlő távra legyen. Mekkora távolságra lesznek egymástól.



$$d = a \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 15 \cdot 1,41$$

$$d = 21,15 \text{ cm}$$

$$1,41 \cdot 15$$

$$705$$

$$21,15$$

$$21,15 \text{ cm} - 6 = 15,15$$

$$f = 15,15 : 3 = 5,05 \text{ cm.}$$

A lyukak távolsága 5,05 cm.

$$\begin{aligned} a &= 4m \\ b &= 4m^2 - 1 \\ c &= 4m^2 + 1 \end{aligned}$$

Derékszögű -e.

$$\begin{aligned} (4m^2 + 1)^2 &= (4m)^2 + (4m^2 - 1)^2 \\ \underline{16m^4 + 8m^2 + 1} &= \underline{16m^2} + \underline{16m^4 - 8m^2 + 1} \\ &\quad \underline{8m^2} \quad \underline{+ 8m^2} \end{aligned}$$

~~Hom~~ derékszögű.

A rombusz átlója 16 dm. oldalai 25 dm hosszúak. Mekkora a területe.



$$\begin{aligned} m &= \sqrt{25^2 - 7^2} \\ m &= \sqrt{625 - 49} \\ m &= \sqrt{576} \\ m &= 24 \text{ dm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{576} &= 24 \\ 176 : 44.4 & \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 24.14 \\ 96 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$T = 2 \cdot \frac{16 \cdot 24}{2}$$

$$T = 16 \cdot 24 = 384 \text{ dm}^2$$

Létráállványokat készítünk. A legfelső létrát 3,7 m hosszú deszkákkal rögzítik. Két létra távolsága 3,5 m. Milyen magasak a létrák, ha az állványok két létra köze egy récsa 8 "merevítő" deszkát tartalmazzak?



$$m = 4 \cdot \sqrt{3,7^2 - 3,5^2}$$

$$\begin{array}{r} 3,7^2 = 13,69 \\ 949 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5^2 = 12,25 \\ 925 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$m = 4 \cdot \sqrt{13,69 - 12,25}$$

$$m = 4 \cdot \sqrt{1,44}$$

$$m = 4 \cdot 1,2$$

$$m = 4,8$$

Tehát a létra magassága 4,8 m.

30.

Gagarin órnagy sorjelt űrhajós 302 km magasságra emelkedett földünk felszínéről. Földgömbünk azt a részet, melyet ebből a magasságból látható, gömbreleletnek nevezzük. Számítsátok ki a földgömbrelet magasságát és a földgömbnek azt a részet, amelyet a magasból látható.

$$r = 6370 \text{ km}$$

$$c = 6370 + 302 \text{ km} = 6672 \text{ km}$$

$$c : r = r : a$$

$$a = \frac{r^2}{c}$$

$$a = 6081,6$$

$$m = r - a$$

$$m = 6370 - 6081,6$$

$$m = 288,4 \text{ km}$$

$$M = 2\pi r m$$

$$M = 2\pi \cdot 1.837 \cdot 10^8$$

$$M = 6,30 \cdot 1.837 \cdot 10^8$$

$$M = 11,4 \cdot 10^6 \text{ km}^2$$

$$6370^2 = 40576900$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 369 \\ 882 \\ 4900 \end{array}$$

$$40576900 : 6672 = 6081,6$$

$$(216)$$

$$= 54490$$

$$11140$$

$$44680$$

$$6370,0$$

$$- 6081,6$$

$$= 288,4$$

$$6370 \cdot 288,4$$

$$17304$$

$$8652$$

$$20188$$

$$1837108$$

$$1.837 \cdot 10^8 = 6,3$$

$$11022648$$

$$550324$$

$$115737804 (\pm) 42 \text{ m}$$

A gömbrelet magassága $288,4(\pm) \text{ km}$, palástjának területe $11,4 \cdot 10^6 (\pm) \text{ km}^2$.

32.

Két egyenes orrágút derékszögben keresztezi egymást. Az egyikből 400 m-re a kereszteződéstől gyalogút ágazik el a másik úthoz. A gyalogút leghísebb távolsága az útkereszteződéstől 350 m. Milyen hosszú a gyalogút és hol csatlakozik a másik úthoz?

$$400 : 350 = a : m \rightarrow m = \frac{7a}{8}$$

$$m \cdot c = a^2$$

$$c^2 = 400^2 + a^2$$

$$c^2 = 400^2 + \frac{7^2 c^2}{8^2}$$

$$\frac{7^2 c^2}{8^2} = c^2 - 400^2$$

$$7^2 c^2 = 8^2 c^2 - (8 \cdot 400)^2$$

$$15c^2 = 3200^2$$

$$c = \sqrt{\frac{10240000}{15}}$$

$$c = 826 \text{ m}$$

$$a = \frac{7 \cdot 826}{8}$$

$$a = \frac{5782}{8}$$

$$a = 723 \text{ m}$$

$$(\sqrt{10240000})$$

$$\sqrt{682666} = 826$$

$$4261672$$

$$102661666$$

$$390$$

33. Számítsátok ki az ABC derékszögű háromszög területét, ha átfogója $AB = 10\text{ cm}$, és az egyik befogó vétele az átfogóra 7 cm



$$\begin{aligned} m_c^2 &= m \cdot n \\ m_c^2 &= (10-7) \cdot 7 \\ m_c^2 &= 3 \cdot 7 \\ m_c^2 &= 21 \\ m_c &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= AB \cdot \frac{m_c}{2} \\ T &= \frac{10}{2} \cdot \sqrt{21} \\ T &= 5 \cdot \sqrt{21} \\ T &= 22,9 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{21} &= 4,58 \\ 500:85.5 \\ 7500:908.8 \\ 234 \end{aligned}$$

az adott Δ terület $22,9 \text{ cm}^2$

34. Számítsátok ki a rombuszba írt kör sugarát, ha a kör érintési pontja a rombusz egyik oldalát 5 cm és 3 cm hosszú szakaszokra osztja.



$$\begin{aligned} m_c^2 &= m \cdot n \\ m_c^2 &= 5 \cdot 3 \\ m_c^2 &= 15 \\ m_c &= \sqrt{15} \\ r &= m_c \\ r &= \sqrt{15} \\ r &= 3,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{15} &= 3,8 \\ 600:68.8 \\ 56 \end{aligned}$$

A beírt kör kör sugara $r = 3,8 \text{ cm}$ hosszú.

35. Milyen hosszú az $r = 17\text{ cm}$ sugarú körnek az a húja, amely a rá merőleges átmérőt $1:16$ arányban osztja két részre?

$$\begin{aligned} h &= 2 \cdot \sqrt{17^2 - \left(\frac{1}{17}\right)^2} \\ h &= 2 \cdot \sqrt{289 - 141^2} \\ h &= 2 \cdot \sqrt{288 - 136} \\ h &= 2 \cdot \sqrt{152} \\ h &= 2 \cdot (16,8) \cdot 9,6 \\ h &= 33,6 \cdot 19,2 \\ h &= 19 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{285} &= 16,8 \\ 185:26.6 \\ 2900:328.8 \\ 276 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{93} &= 9,6 \\ 1200:186.6 \\ = 84 \end{aligned}$$

A húr valammivel kevesebb, mint 19 cm .

36. Az $r_1 = 3$ és $r_2 = 5$ sugarú két koncentrikus kör körgyűrűt alkot. Szerkesztétek olyan harmadik koncentrikus kört, amely a körgyűrű területét két egyenlő részre osztja.

$$\begin{aligned} r_2^2 \pi - R^2 \pi &= R^2 \pi - r_1^2 \pi \\ r_2^2 - R^2 &= R^2 - r_1^2 \\ r_2^2 + r_1^2 &= 2R^2 \\ R &= \sqrt{\frac{r_2^2 + r_1^2}{2}} \end{aligned}$$

$$r_1 = 3 \quad r_2 = 5 \quad R = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{9 + 25}{2}} = \sqrt{\frac{34}{2}} = \sqrt{17}$$

$$T_1 \quad T_2$$

$$T_1 = T_2$$

33. óra

248./38.

Egy falórozó átmérője a vékonyabb végén 32 cm. Mekkora a belőle faragott négyzet keresztmetszetű gerenda egyik oldala

$$d = 32 \quad a = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad a = \frac{32}{\sqrt{2}} = 46 \cdot \sqrt{2} = 22,56 \text{ cm.} \quad \begin{array}{r} 141,16 \\ 846 \\ \hline 22,56 \end{array}$$

A gerenda oldala 22,56 cm.

Az $r = 6$ cm sugarú kör két párhuzamos körjének hossza 6 cm és 10 cm. Mekkora a körök távolsága?

$$\begin{array}{ll} a = \sqrt{r^2 - 5^2} & a' = \sqrt{r^2 - 3^2} \\ a = \sqrt{6^2 - 5^2} & a' = \sqrt{6^2 - 3^2} \\ a = \sqrt{36 - 25} & a' = \sqrt{36 - 9} \\ a = \sqrt{11} & a' = \sqrt{27} \\ a = 3,3 & a' = 5,2 \end{array}$$

$$h_1 = 5,2 - 3,3 = 1,9 \text{ cm}$$

$$h_2 = 5,2 + 3,3 = 8,5 \text{ cm}$$

1966. V. 13.

Vezessék le az oldalainak adott egyenlőoldali háromszög magassága kiszámításának képletét.

$$m = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$m = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$m = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

Vezessék le a négyzet és a téglalap átlójának, továbbá a kocka és a négyzetes hasáb testátlójának kiszámítására vonatkozó képleteket, ha adva vannak az oldalai, illetve az élük.

$$d_{\square} = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

$$d_{\square} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e_{\square} = \sqrt{d^2 + a^2}$$

$$e = \sqrt{(a \cdot \sqrt{2})^2 + a^2}$$

$$e = \sqrt{a^2 \cdot 2 + a^2}$$

$$e = \sqrt{3a^2}$$

$$e = a \cdot \sqrt{3}$$

$$e_{\square} = \sqrt{a^2 + (b \cdot \sqrt{2})^2}$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 \cdot 2}$$

1966. V. 13.

33. Házi feladat

45

44

42

41

37

Bizonyítsatok le, hogy a derékszögű háromszögben a befogók átfogóra és vetületeinek aránya egyenlő a megfelelő befogók négyzeteinek arányával.

$$b_1 : a_1 = b^2 : a^2$$

$$b_1 = \frac{b^2}{c} \quad a_1 = \frac{a^2}{c}$$

$$\frac{b^2}{c} : \frac{a^2}{c} = b^2 : a^2$$

$$\underline{\underline{\frac{a^2 \cdot b^2}{c} = b^2 \frac{a^2}{c}}}$$

Bizonyítsatok le, hogy a derékszögű háromszögben

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{a_1 c} + \frac{1}{b_1 c} = \frac{1}{b_1 a_1} \quad | +1$$

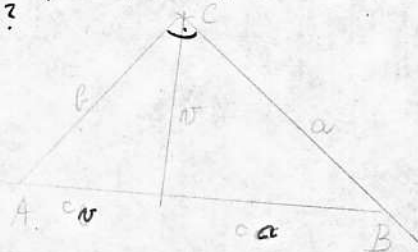
$$\frac{1}{a_1 c} + \frac{1}{b_1 c} - \frac{1}{b_1 a_1} + 1 = 1$$

$$\frac{b_1 + a_1 - c + a_1 b_1 c}{a_1 b_1 c} = 1$$

$$\underline{\underline{a_1 b_1 c = a_1 b_1 c}} \\ \underline{\underline{c^2 = c^2}}$$

Az ABC derékszögű háromszögben felismerhetők meg számítások és szerkesztéssel az $a, b, c, c_a, c_b, v, \alpha, \beta$ oldalhosszok nagyságát, ha

$$\begin{array}{lll} a, & c_a = 4 & c_b = 9 \\ b, & a = 5 & c_a = 4 \\ c, & b = 5 & c = 13 \\ d, & v = 6 & c_b = 4 \end{array}$$



a, $c_a = 4$ $c_b = 9$

$$a = 7,2$$

$$b = 10,8$$

$$c = 13$$

$$c_a = 4$$

$$c_b = 9$$

$$v = 6$$

$$\alpha = 33^\circ 50'$$

$$\beta = 56^\circ 10'$$

$$v = \sqrt{c_a \cdot c_b} = \sqrt{4 \cdot 9}$$

$$v = \sqrt{36} = 6$$

$$c = c_b + c_a = 13$$

$$b = \sqrt{c \cdot c_b}$$

$$b = \sqrt{13 \cdot 9}$$

$$b = \sqrt{117}$$

$$b = 10,8$$

$$a = \sqrt{c \cdot c_a}$$

$$a = \sqrt{13 \cdot 4}$$

$$a = \sqrt{52}$$

$$a = 7,2$$

$$\sqrt{117} = 10,8$$

$$17:2$$

$$1700:208,8$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{10,8}{13} = 0,83$$

$$\alpha = 33^\circ 50'$$

b, $a = 5$ $c_a = 4$

$$a = 5$$

$$b = 4,9$$

$$c = 6,25$$

$$c_a = 4$$

$$c_b = 2,25$$

$$v = 3$$

$$\alpha = 53^\circ 10'$$

$$\beta = 36^\circ 50'$$

$$c = \frac{a^2}{c_a} = \frac{25}{4} = 6,25 \quad c_b = c - c_a = 6,25 - 4 = 2,25$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{6,25^2 - 5^2}$$

$$b = \sqrt{49,0625 - 25}$$

$$b = \sqrt{24,0625}$$

$$b = 4,9$$

$$v^2 = c_a \cdot c_b = 4 \cdot 2,25 \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{6,25} = \frac{1}{1,25}$$

$$v = \sqrt{9,00}$$

$$v = 3$$

$$\sin \alpha = 0,8$$

$$\alpha = 53^\circ 10'$$

$$\beta = 90 - 53^\circ 10' = 36^\circ 50'$$

c, $b = 5$ $c = 13$

$$a = 12$$

$$b = 5$$

$$c = 13$$

$$c_a = 11,1$$

$$c_b = 2$$

$$v = 4,7$$

$$\alpha = 67^\circ$$

$$\beta = 23^\circ$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$a = \sqrt{169 - 25}$$

$$a = \sqrt{144}$$

$$c_a + c_b = 13 \rightarrow c_a = 13 - c_b$$

$$c_a : c_b = a^2 : b^2$$

$$c_a : (13 - c_a) = 144 : 25$$

$$25c_a = 144(13 - c_a)$$

$$25c_a = 1872 - 144c_a$$

$$169c_a = 1872$$

$$c_a = 11,1$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 11}$$

$$v = \sqrt{22}$$

$$v = 4,7$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{12}{13} = 0,92 \quad \alpha = 67^\circ$$

$$n = 6 \quad c_r = 4$$

$$c_a = \sqrt{\frac{n^2}{4}} = \frac{36}{4} = 9$$

$$c = c_a + c_r = 9 + 4 = 13$$

$$a = 10,8$$

$$b = 7,2$$

$$c = 13$$

$$c_r = 4$$

$$c_a = 9$$

$$n = 6$$

$$B = 33^\circ 50'$$

$$A = 56^\circ 10'$$

$$a = \sqrt{c \cdot c_a}$$

$$b = \sqrt{c \cdot c_r}$$

$$a = \sqrt{13 \cdot 9}$$

$$b = \sqrt{13 \cdot 4}$$

$$a = \sqrt{117}$$

$$b = \sqrt{52}$$

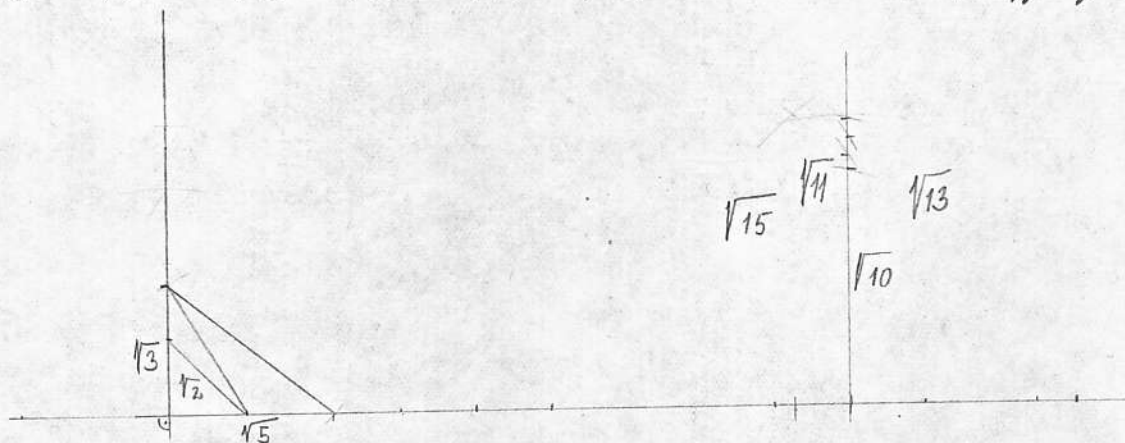
$$a = 10,8$$

$$b = 7,2$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{10,8}{13} = 0,83$$

$$A = 33^\circ 50'$$

maga Euklides tételei és Pitagorasz tétele alapján szerkeszthetők nagyságú szakaszok.



Derékszögű-e a háromszög, ha oldalainak nagysága:

a_1	4 5 6	4^2 5^2 6^2	
		16 25 36	nem!
		41 36	

b_1	3 5 6	9 25 36	nem!
		34 36	

c_1	5 12 13	25 144 169	igen!
		169 169	

d_1	$4m$ $4m^2+1$ $4m^2-1$	$(4m^2+1)^2 = (4m^2-1)^2 + (4m)^2$	igen!
		$16m^4+8m^2+1 = 16m^4-8m^2+1 + 16m^2$	

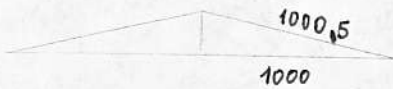
e_1	m^2-n^2 $2mn$ m^2+n^2
-------	---------------------------

$$(m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2$$

$$\underline{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = \underline{m^4 - 2m^2n^2 + n^4} + \underline{4m^2n^2}$$

igen!

Egy 2 km hosszúságú útszakasz két végpontjában rögzítünk egy 200 m hosszúságú kötelet a kötel középpontját emelve fel amennyire csak lehet. Al tud-e alatta menni egy felnőtt ember anélkül, hogy lehajolna.



$$a = \sqrt{1000,5^2 - 1000^2}$$

$$a = \sqrt{1001000,25 - 1000000}$$

$$a = \sqrt{1000,25}$$

$$a = 31,6 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 1000,5^2 = 1001000,25 \\ 1000000 \\ \hline 1000,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001000,25 \\ - 1000000 \\ \hline 1000,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{1000,25} = 31,6 \\ 100 : 61.1 \\ 3925 : 62 \end{array}$$

Fára erősített forgódarunknak a fallal párhuzamos vasrudja 3,2 m, rá merőleges forgórúdja 5,2 m. Milyen hosszú az eredeti "összekötő" húr? 6,1 m

$$l = \sqrt{5,2^2 + 3,2^2}$$

$$l = \sqrt{27,04 + 10,24}$$

$$l = \sqrt{37,28}$$

$$l = 6,1 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 5,2^2 = 27,04 \\ 25 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,2^2 = 10,24 \\ 9 \\ \hline 124 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{37,28} = 6,1 \\ 128 : 121.1 \\ 7 \end{array}$$

Egy 20 m széles úton 2 szemközti ház közt kifeszített acélkuszalra függesztett villany lámpa belöngése 60 cm. Milyen hosszú a húr? 20,04 m

$$l = \sqrt{10^2 + 0,6^2}$$

$$l = \sqrt{100 + 0,36}$$

$$l = \sqrt{100,36}$$

$$l = 10,018 \text{ m}$$

$$l \approx 20,04 \text{ m}$$

$$\sqrt{100,36} = 10,01$$

$$00,36 : 20$$

$$3600 : 2001.1$$

$$1599$$

Egy rönkfa átmérője 12 cm. Lehet-e belőle 10 cm elő réggel alapú gerenda készíteni.

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{12}{1,41} = \frac{12 \cdot 1,41}{2} = 8,46$$

Nem lehet, csak 8,46 cm oldalalú.

Milyen mélység kell lenni egy B vasrudnak, ha belőle 32 mm alapú négyzetes kaszát akarunk készíteni.

$$d = 32 \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 32 \cdot 1,41$$

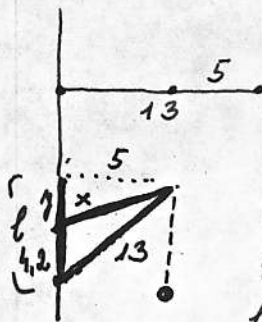
$$d = 45,12 \text{ mm}$$

$$\begin{array}{r} 32 \cdot 1,41 \\ 128 \\ 32 \\ \hline 45,12 \end{array}$$

1966. V. 20

34. Házi feladat

Egy falra szerelt forgókaru alsó rudja 13 m és a rud végpontjának távolsága a tengelytől 5 m. Mekkora a felső rud hossza, ha a rudnak a tengelyen forgó részei 4,2 m-re vannak egymástól.



$$l = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$l = \sqrt{169 - 25}$$

$$l = \sqrt{144}$$

$$l = 12$$

$$y = l - 4,2$$

$$y = 12 - 4,2$$

$$y = 7,8$$

$$x = \sqrt{y^2 + 5^2}$$

$$x = \sqrt{7,8^2 + 5^2}$$

$$x = \sqrt{60,84 + 25}$$

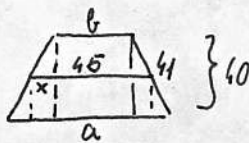
$$x = \sqrt{85,84}$$

$$x = 9,2 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{85,84} = 9,2 \\ 484 : 182,2 \\ \hline 110 \end{array}$$

Tehát a felső rud hossza 9,2 m.

Egy egyenlőszárú trapéz körívmérete 45 cm, magassága 40 cm. A trapéz szára 41 cm hosszú. Számítsuk ki a párhuzamos oldalak hosszát!



$$x = \sqrt{20,5^2 - 20^2}$$

$$x = \sqrt{420,25 - 400}$$

$$x = \sqrt{20,25}$$

$$x = 4,5$$

$$\frac{a+b}{2} = 45$$

$$a+b = 90$$

$$b = 90 - 2x$$

$$b = (90 - 2 \cdot 4,5) = 45 - 9 = 36$$

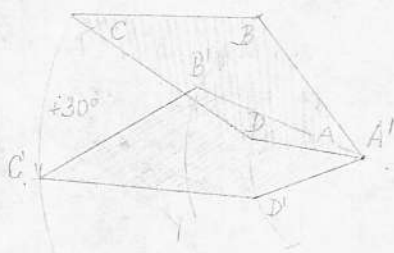
$$a = 45 + 2x = 45 + 9 = 54$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{20,25} = 4,5 \\ 425 : 85,5 \\ \hline = 0 \end{array}$$

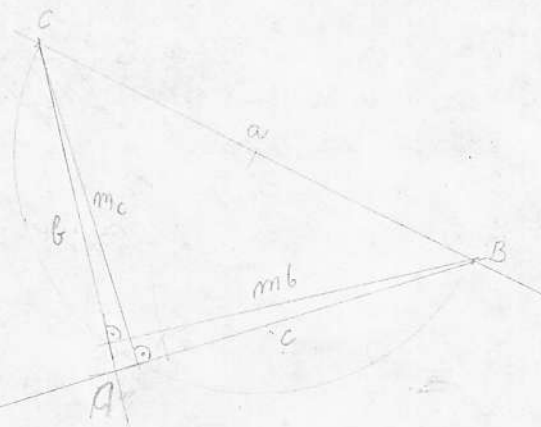
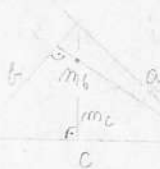
Tehát az alap 54 cm, a fedőlap 36 cm hosszú.

291, 101

Feladat: az ABCD négyszög A csúspontja körül $+30^\circ$ -kal az A'B'C'D' négyszögbe, amelyben $A' \equiv A$. Igazolja, hogy az ABCD négyszög az A'B'C'D' négyszögbe a tengelyes szimmetria is átvívi.



$$\begin{aligned} a &= 6,5 \text{ cm} \\ mb &= 5 \text{ cm} \\ mc &= 4,5 \text{ cm} \end{aligned}$$



Térmetlan.

Térbeli alakzatokkal foglalkozik. Szükséges a: pont egyenes, vonal, felület szabálytalan felületű "sík". felület, sík.



Két pont meghatároz egy egyenest.

2, Az egyenes a síkban fekszik, ha 2 pontja benne van.

A sík meghatározása.

Meghatározza: 3 nem egy egyenesbe eső pont. $\angle = ABC$

1 egyenes és egy rajta kívül fekvő pont. $a.A = \sigma$

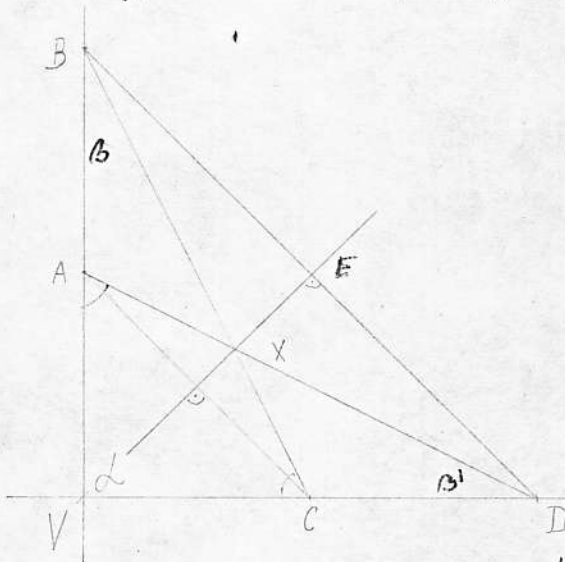
2 egymást metsző egyenes $a.b = \rho$

2 párhuzamos egyenes $a \parallel b = \tau$

1966. V. 31.

35. Házi feladat

Rajzoljálék egy $0^\circ < \angle < 180^\circ$ szög és csúcspontját jelöljétek V-vel. Egyik szárán húzzátok ki két különböző A, B pontot, a másik szárán pedig merőketek olyan két pontot, C-t és D-t, hogy $VC = VA$, $VD = VB$, és húzzátok meg az AD és BC egyenesét. Igazoljátok, hogy e két egyenes X metszéspontja az AVC $\triangle$ belsejében van. Ugyanúgy rajzoljálék meg a VX egyenest, és keressétek meg az ábrán a 4 egybevágó háromszöget. Igazoljátok, hogy a VX félegyenes az AVC $\triangle$ szögfelezője, és hogy az AC is, meg a BC is merőleges VX-re.



$$VC = VA$$

$$VD = VB$$

X az AVC $\triangle$ belsejében van, mivel $\angle B = \angle B' < \angle / 2$.

$$\begin{array}{ll} VCX \triangle \cong VAX \triangle & OS = O \\ CDX \triangle \cong ABX \triangle & S_2 S_2 O \\ VDX \triangle \cong VBX \triangle & OS = O \\ VDA \triangle \cong VBC \triangle & OS = O \end{array}$$

Mivel $VC = VA$ (szab.)

VX közös

$$VCX \triangle \cong VAX \triangle$$

$$OS_2 \text{ szerint } VCX \triangle \cong VAX \triangle \rightarrow XC = XA$$

tehát VX AVC $\triangle$ szögfelezője.

$$\angle V + \angle D + \angle B = 180^\circ$$

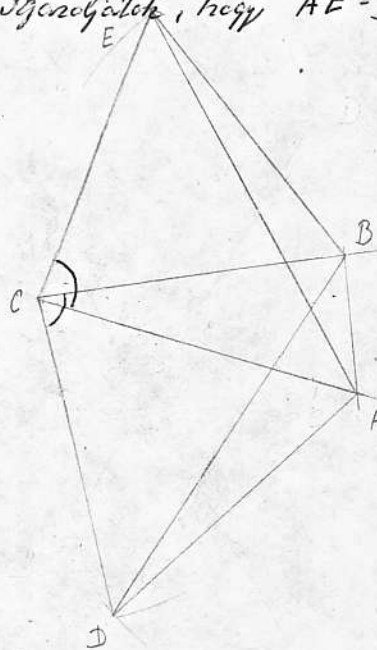
$$\angle V + \angle D + \angle E + \angle E + \angle B' = 360^\circ (2 \cdot 180^\circ) \quad , \text{ de mivel}$$

VDE $\triangle$ szumm. $VBE \rightarrow E \triangle E \triangle$

$$- (\angle V + \angle D + \angle B) + (\angle V + \angle D + \angle E + \angle E + \angle B') = 360 - 180 = 180 \rightarrow \angle E = 180^\circ \rightarrow$$

$$\underline{\underline{E \triangle = 90^\circ}}$$

Bizonyítsd az adott ABC háromszögű $\triangle AC$ és BC oldalának a háromszögön kívül oldalára egyenlő oldalú ACD , illetve BCE háromszöget. Igazold, hogy $AE = BD$.



$$\triangle ACE \cong \triangle BCD$$

$$CE = CB$$

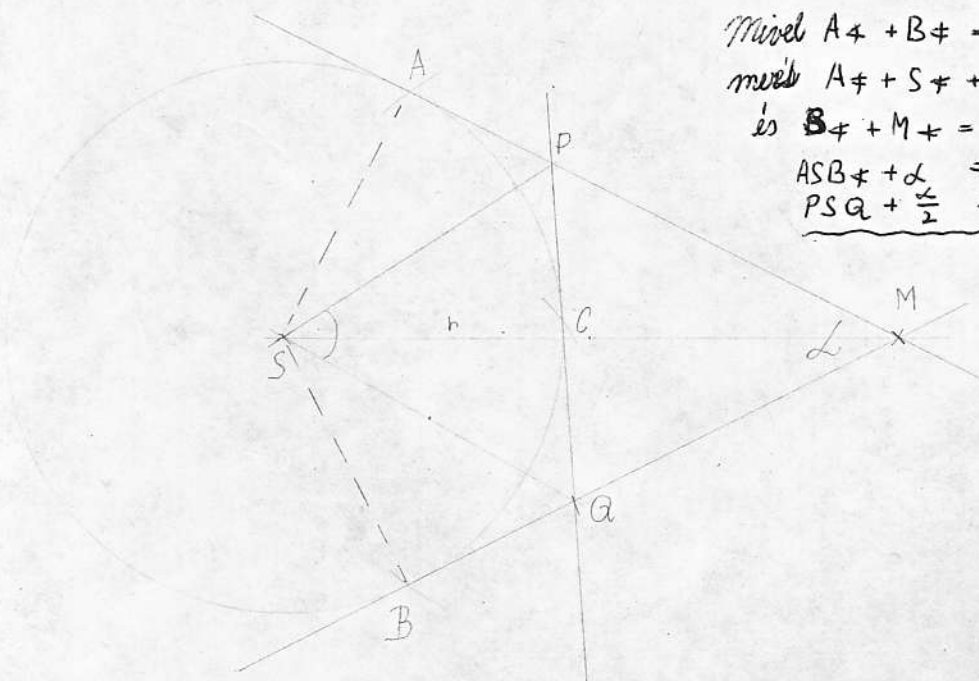
$$CA = CD$$

$$\angle BCD = \angle ACE$$

$$\angle C - \angle SC - \angle C \rightarrow$$

$$\underline{DB = AE}$$

Készítsd az adott $k = (S; r)$ körhöz a rajta kívül fekvő M pontból két érintőt, egyik A , másik B pontban érinti a kört. A két tangens érintője az MA érintőt a P , az MB érintőt a Q pontban metszi. Igazold, hogy $\angle PSQ = R + \frac{1}{2}\alpha$ vagy $\angle PSQ = R - \frac{1}{2}\alpha$, ahol $\alpha = \angle AMB$.



$$\text{Mivel } \angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\text{mivel } \angle A + \angle S + \angle B + \angle M = 360$$

$$\text{és } \angle B + \angle M = 180$$

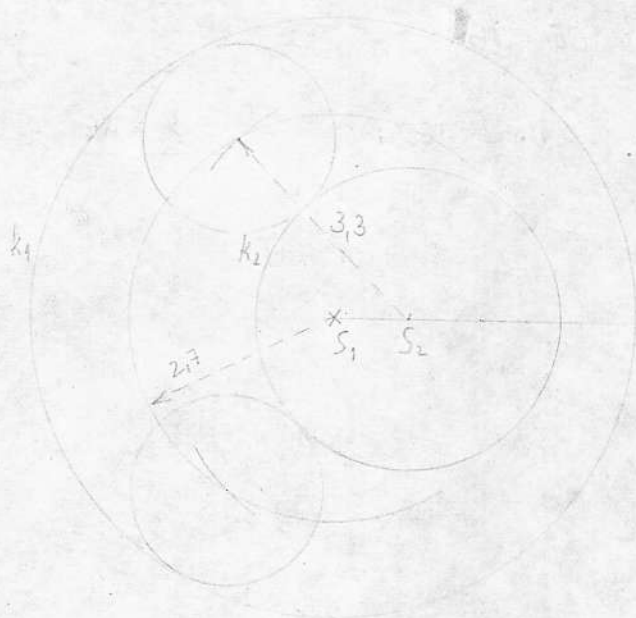
$$\angle ASB + \alpha = 180 \quad | :2$$

$$\underline{\angle PSQ + \frac{\alpha}{2} = 90}$$

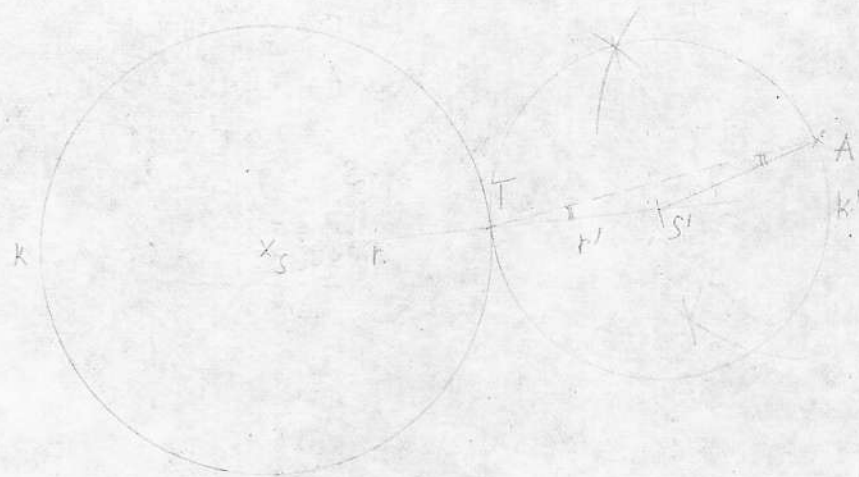
1966. VI. 1.

36. óra

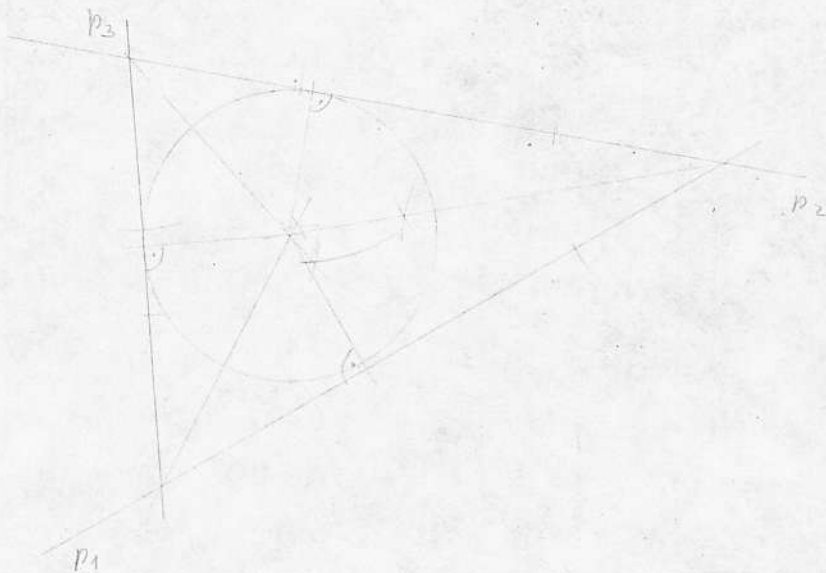
25. Adva van két kör $k_1 \equiv (S_1; 4)$, $k_2 \equiv (S_2; 2)$, $S_1 S_2 = 1$.
 Keressük olyan $r = 1,3$ sugarú kört, amely az adott 2 körrel érinti.



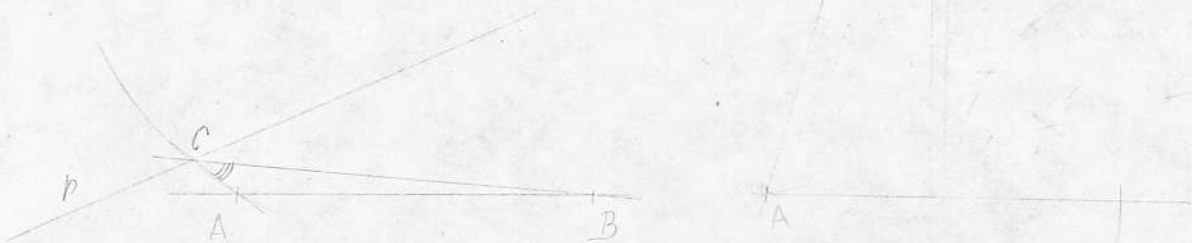
176. 26. Adva van egy k kör és kerületén egy T pont. Keressük olyan kört, amely az adott kört a T pontban érinti és
 a, kerületén megy egy másik adott ponton
 b, és egy adott egyenest érint



27. Szerkesztés kört, mely 3 egyenest érint:



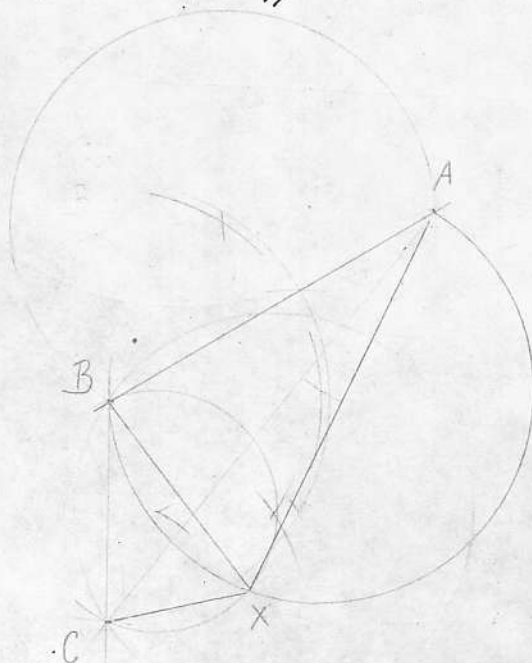
28. Adva van egy AB szakasz és egy p egyenes, amely nem megy át az A és B ponton. Szerkesztés a p egyenesen olyan C pontot, hogy $\angle ACB = 30^\circ$



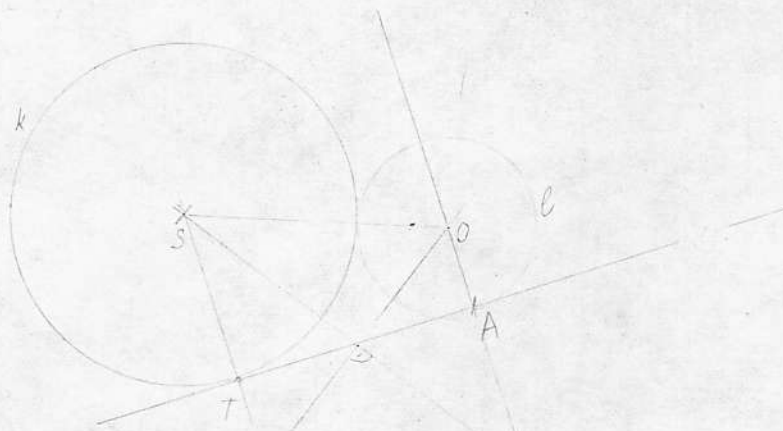
36. Házi feladat

1966.VII.1.

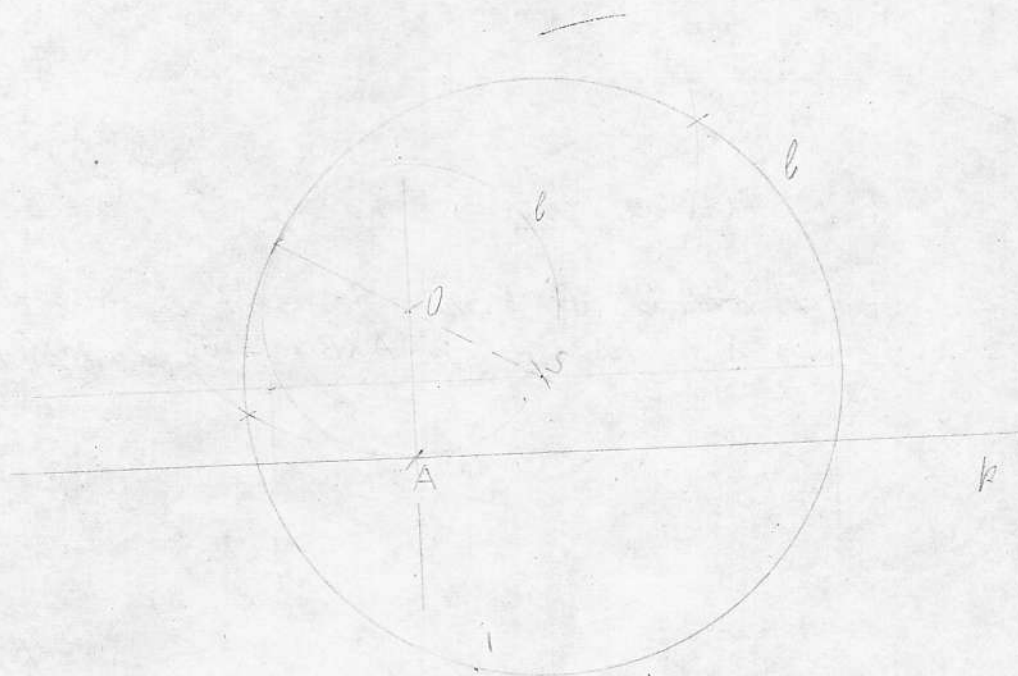
176.29 Adva van 2 szakasz $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 3\text{ cm}$ és $\angle ABC = 120^\circ$. Szerkesztés olyan X pontot, hogy $\angle AXB = 60^\circ$ és $\angle BXC = 67^\circ 30'$



Adottak egy kör, húszalk meg egy t érintője és húszalk meg rajta egy az érintőjéről húzódó A pont. Feladatunk olyan kör, mely érinti az adott kör és a t érintőt az A pontban.



Adva van egy π egyenes, rajta egy A pont és egy kör $k = (S; 4)$ [az egyenes távolsága a kör középpontjától 4cm , $SA = 2\text{cm}$]. Feladatunk kör, amely az adott kör és az adott egyenest az A pontban érinti.



$$\frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3} - 8 \quad | \cdot 105$$

$$\frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} > \frac{3x-1}{5} - \frac{13x-7}{2} \quad | \cdot 30$$

$$15(3x+5) + 21(10-3x) > 35(2x+7) - 840$$

$$10(7x) - 55(x+3) > 6(3x-1) - 15(13x-7)$$

$$45x + 75 + 210 - 63x > 70x + 245 - 840$$

$$40x - 55x - 165 > 18x - 6 - 195x + 105$$

$$-18x + 285 > 70x - 595$$

$$15x - 165 > -177x + 99$$

$$-88x > -880$$

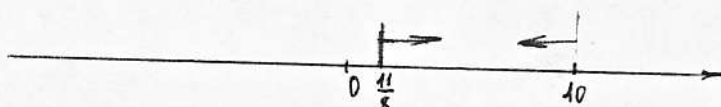
$$88x < 880$$

$$\underline{x < 10}$$

$$192x > 264$$

$$x > \frac{264}{192} = \frac{11}{8}$$

$$\underline{\underline{\frac{11}{8} < x < 10}}$$



$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \frac{(a+b)^3}{8} \quad \begin{matrix} a > b \\ b > 0 \end{matrix}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$4(a^3+b^3) \geq 4(a+b)^3$$

$$4(a^3+b^3) \geq 4(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$

$$[a^3+b^3 \geq 4a^3+12a^2b+12ab^2+4b^3]$$

$$4a^3+4b^3 \geq a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \geq ab(a+b)$$

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$\frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-1 \quad | \cdot 9(2x-3)$$

$$9(5x-7)/(2x-3) + 9 \cdot 14 = 9(x-1)(2x-3)$$

$$9(10x^2-14x-15x+21)+126 = 9(2x^2-2x-3x+3)$$

$$\underline{90x^2 - 126x - 135x + 189 + 126} = \underline{18x^2 - 18x - 27x + 24}$$

$$72x^2 - 216x + 388 = 0 \quad | : 72$$

$$x^2 - 3x +$$

$$(5x-7)(2x-3) + 9 \cdot 14 = 9(x-1)(2x-3)$$

$$10x^2 - 14x - 15x + 21 + 126 = 9(2x^2 - 2x - 3x + 3)$$

$$\underline{10x^2 - 29x + 147} = \underline{18x^2 - 45x + 27}$$

$$0 = 8x^2 - 16x - 120$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$= 1 \pm \sqrt{1+15}$$

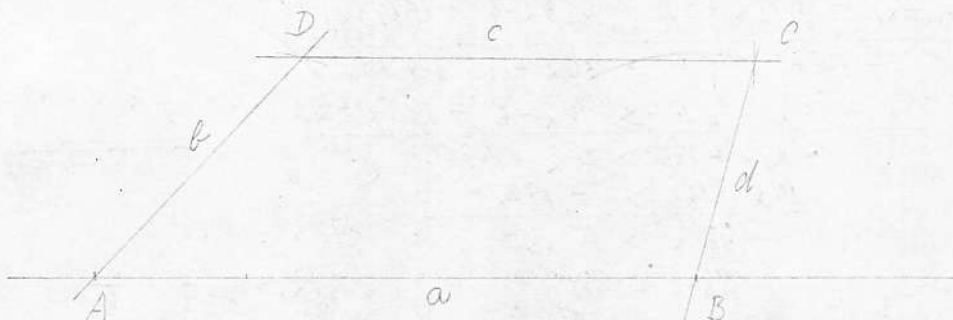
$$= 1 \pm 4$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -3$$

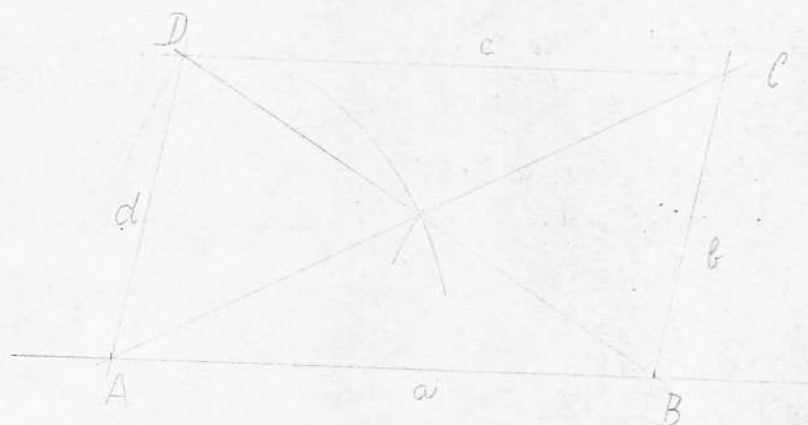
- 1, Szekesszintű trapéz $a=8$ $b=4$ $c=6$ $d=3$
 2, " paralelogrammál $AB=7,2$ $AC=9$ $BD=7,6$

- 3, Mekkora a körgyűrű területe ha a koncentrikus körök sugara 11cm, 9cm.

4,



2,



3,

$$T = T_1 - T_2$$

$$T = r_1^2 \pi - r_2^2 \pi$$

$$T = 11^2 \pi - 9^2 \pi$$

$$T = \pi (11^2 - 9^2)$$

$$T = \pi (121 - 81)$$

$$T = \pi \cdot 40$$

$$T = 125,664 \text{ cm}^2$$

$$\pi = 3,14159265358979...$$

$$T = \pi \cdot 40 = 125,6637061435916$$

Az adott körgyűrű területe $125,6637 \text{ cm}^2$.

38. Házi feladat

$$1. \quad \frac{7-x}{5} > \frac{2x-3}{7} - \frac{1-2x}{5} \quad | \cdot 35$$

$$7(7-x) > 5(2x-3) - 7(1-2x)$$

$$49-7x > 10x-15-7+14x$$

$$49-7x > 24x-22$$

$$71 > 31x$$

$$\frac{71}{31} > x$$

$$2. \quad (3x-5)^2 + (4x-3)^2 > (5x-4)^2$$

$$9x^2 - 30x + 25 + 16x^2 - 24x + 9 > 25x^2 - 40x + 16$$

$$25x^2 - 54x + 34 > 25x^2 - 40x + 16$$

$$18 > 14x$$

$$x < \frac{18}{14}$$

$$x < \frac{9}{7}$$

$$3. \quad \frac{2x}{2-a} - \frac{a(x+1)}{2-a} < 1 \quad | \cdot (2-a)$$

$$2x - a(x+1) < 2-a$$

$$2x - ax - a < 2-a$$

$$x(2-a) < 2 \quad a \neq 2$$

$$x < \frac{2}{2-a}$$

$$4. \quad |x-4| \leq 3 \quad x \geq 4 \rightarrow |x-4| = x-4$$

$$x-4 \leq 3$$

$$\underline{x \leq 7}$$

$$\underline{1 \leq x \leq 7}$$

$$x < 4 \rightarrow |x-4| = 4-x$$

$$4-x \leq 3$$

$$\underline{1 \leq x}$$

$$5. \quad \left(\frac{5x}{3} + \frac{5}{6} \right) \left(\frac{5x}{3} - \frac{5}{6} \right) = 0$$

$$\frac{25x^2}{9} - \frac{25}{36} = 0 \quad | \cdot 36$$

$$4(25x^2) - 25 = 0$$

$$100x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$