

65. IX. 6.

1. óra

A halmaz fogalma

Valamely tárgyak v. fogalmak összességét halmaznak nevezzük. A halmaz egyes tárgyai a halmaz elemei.

A halmaz lehet: véges, végtelen, üres.

Az elemek száma véges, véges halmazról (H.C. o. tan.)
ha pedig végtelen, végtelen halmazról beszélünk
(az egyenes vonalainak halmaza).

Az üres halmaznak nincsenek elemei (osztályban lévő autók halmaza üres).

1, 2, 3, ..., n, ..., n+1, ... természetes számok

A természetes számok halmazában korlátlanul elvégezhető az összeadás és a szorzás.

$$\frac{8}{11}$$

$$a + b = c$$

összeadandó összeg

$$3 \cdot 4 = 12$$

szorzandó szorzó szorzat
lényegű

$$a \cdot b = c$$

65. IX. 7.

2. óra

$$\frac{-4}{-3} \quad \begin{matrix} \text{kiegészítő} \\ \text{kiegészítő} \\ \text{különbség} \end{matrix}$$

$$a - b = c$$

$$\frac{-4}{0}$$

$$\frac{-6}{-2}$$

0 - nulla (nem pozitív, nem negatív - jel, szimbólum)

..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, ... - negatív egészszámok

Természetes számok

Negatív egész számok

} egész számok halmaza

Az egész számok halmazában akkor tudunk korlátlanul osztani, ha az osztandó az osztó egész számú többszöröse.

$$4 : 3 = 1, \dots = \frac{4}{3}$$

Racionális számok halmaza: term. sz.
4 alapművelet
neg. sz.
törtek

$$\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots - \text{törtek}$$

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$ - irracionális számok (gyökök, nem mindig végerkéztető el)

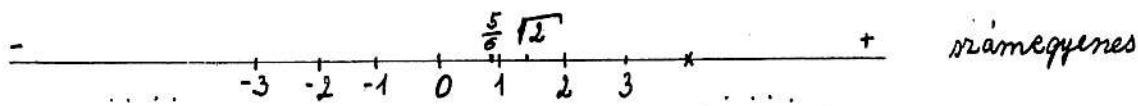
Valós (reális) számok halmaza.

természetes sz.

Negatív egész sz.

racionális sz.

irracionális sz.



Minden valós számhoz tartozik egy pontja a számegyenesnek, és fordítva. A számokat a számegyenesen ábrázoljuk. A valós szám körül a tőle jobbra lévő nagyobb.

3. óra

1965.9.9.

Képzetes és komplex számok

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = x$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = x$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$-2^2 = (-2)(-2) = 4$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

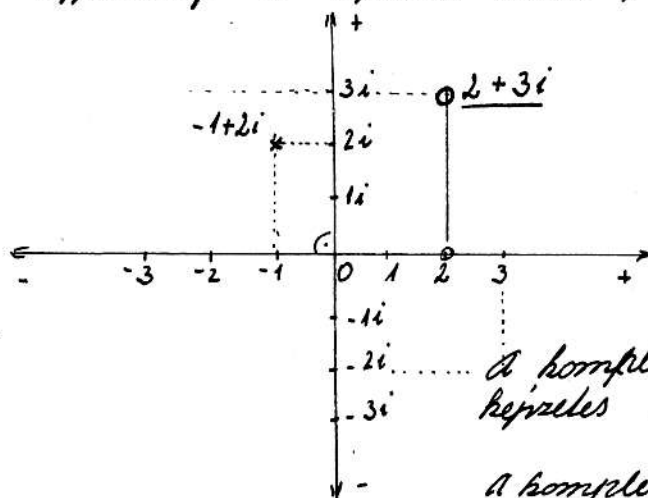
$$x = \sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-1} = i - \text{képzetes egység}$$

$$i^2 = -1$$

Ugyanannyi a képzetes szám, mint a valós szám. (végtelen)

$$-1+2i$$



$$\frac{2}{2} + \frac{3i}{2} - \text{komplex szám}$$

$$\frac{1}{2} - 3,2i$$

$$3-2i$$

A komplex szám egy valós és egy képzetes részből áll. (végtelen)

A komplex számok síkja Gauss-féle számsík.

A sík minden pontjához tartozik 1 komplex szám.

Műveletek körösséges törtekkel

$$\text{valódi tört } -\frac{2}{3} < 1$$

$$\text{áltört } \frac{4}{3} > 1$$

$$3\frac{2}{5} \text{ vegyes szám} = \frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\text{f.k. o.}$$

$$\text{f.k. t.}$$

$$1. \text{ összeadás: } \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+1+5}{3} = \frac{8}{3}$$

4. óra

1965.9.11.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{15}{4} \quad m = 3\frac{3}{4}m.$$

$$4m + 3\frac{1}{2}m + \frac{17}{2}m = \frac{8+7+17}{2} = \frac{32}{2} = 16m.$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{11}{30} ; \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 2}{21} + \frac{3 \cdot 4}{21} = \frac{14+12}{21} = \frac{26}{21} ;$$

$$\frac{1}{5} + \frac{7}{15} + \frac{5}{9} + \frac{2}{3} = \frac{18+21+25+30}{45} = \frac{94}{45} ; \quad 8\frac{1}{4} + 3\frac{13}{24} + 3 = \frac{33}{4} + \frac{85}{24} + \frac{72}{24} =$$

$$= \frac{198}{24} + \frac{85}{24} + \frac{72}{24} = \frac{355}{24} ; \quad \frac{8}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9} ; \quad \frac{12}{7} - \frac{3}{4} = \frac{48-21}{28} = \frac{27}{28} ;$$

$$\frac{14}{9} - \frac{5}{6} = \frac{28-15}{18} = \frac{13}{18} ; \quad \frac{18}{21} - \frac{3}{49} = \frac{126-9}{147} = \frac{117}{147} ;$$

$$5\frac{3}{4} \text{ m} - 15 \text{ cm} = 5\frac{3}{4} \text{ m} - \left(\frac{60}{4} \text{ cm}\right) - \frac{15}{100} \text{ m} = \frac{23}{4} - \frac{15}{100} = \frac{575-15}{100} = \frac{560}{100} \text{ m} = 5,6$$

65.9.11.

Házi feladat

$$5\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4} = \frac{11}{2} - \frac{11}{4} = \frac{22-11}{4} = \frac{11}{4} ;$$

$$18\frac{1}{7} - 12\frac{2}{3} = \frac{127}{7} - \frac{38}{3} = \frac{381-266}{21} = \frac{115}{21} ;$$

$$4\frac{1}{8} \text{ km} - 238 \text{ m} = \frac{33}{8} \text{ km} - \frac{238}{1000} \text{ km} = \frac{4125-238}{1000} = \frac{3887}{1000} ;$$

$$245 \mu - 20'25 \mu = 245 \mu - 145 \mu = 100 \mu = 10'40 \mu ;$$

$$\frac{1}{4} \text{ km}^2 - 1800 \text{ m}^2 = 250000 \text{ m}^2 - 1800 \text{ m}^2 = 248200 \text{ m}^2 = \frac{248200}{1000000} \text{ km}^2 = \frac{1241}{5000} \text{ km}^2 ;$$

65.9.13.

5.óra

Tűlek mérése

$$7 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} ; \quad \frac{5}{2} \cdot 7 = \frac{35}{2} ; \quad \frac{6}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{18}{18} = 1 ; \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} ;$$

$$\frac{11}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{132}{156} = \frac{11}{13} ; \quad 57 + \frac{2}{3} = 38 \quad 76 \cdot \frac{5}{12} = \frac{380}{12} = \frac{95}{3} ;$$

Hány m van 3 km $\frac{5}{8}$ részében.

$$3000 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15000}{8} \text{ m} ;$$

Tűlek aránya

$$\frac{1}{3} \quad \frac{3}{2} \text{ fordított érték } 4 \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \text{ ellenérték}$$

$$6 : \frac{1}{5} = 30 ; \quad \frac{1}{7} : 3 = \frac{2}{7} : \frac{3}{1} = \frac{2}{21} ; \quad \frac{1}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15} ;$$

$$3\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = \frac{11}{3} : \frac{1}{5} = \frac{11}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{55}{3} ;$$

$$\frac{1}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(3 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{9-2}{3} = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{1}{5} - \frac{21}{4} = \frac{4-105}{20} = -\frac{101}{20} ;$$

$$5 + 5 \cdot 5 - 5 : 5 = 5 + 25 - 1 = 29 ;$$

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{8}\right) : \frac{2}{9} = \frac{2}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{32-15}{40} : \frac{2}{9} = \frac{2}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{17}{40} : \frac{2}{9} = \frac{2}{7} + \frac{17}{60} : \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{17}{60} \cdot \frac{9}{2} = \frac{2}{7} + \frac{51}{40} = \frac{120+102}{280} = \frac{222}{280}$$

$$\frac{2}{5} ; \frac{3}{4} ; \frac{2}{5} ;$$

$$\frac{9 + \frac{3}{7}}{4 + \frac{2}{3}} = 9 + \frac{3}{7} : 4\frac{2}{3} = \frac{66}{7} : \frac{14}{3} = \frac{66}{7} \cdot \frac{3}{14} = \frac{198}{98} ;$$

$$\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} = \frac{5}{2} : \frac{10}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} ;$$

$$\frac{\frac{4}{3} - 1}{6 - 1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} : 4\frac{1}{2} = \frac{1}{3} : \frac{9}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27} ;$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{8}}{\frac{7}{3} + \frac{4}{9}} = \frac{3}{4} : \frac{7}{3} + \frac{2}{8} : \frac{4}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{28} + \frac{18}{28} = \frac{27}{28} ;$$

$$\frac{1\frac{1}{4}}{1\frac{1}{3}} + \frac{2\frac{3}{4}}{4\frac{2}{5}} = \frac{5}{4} : \frac{5}{3} + \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{22} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{22} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6+5}{8} = \frac{11}{8} ;$$

6. óra

L. Lőrincz 1965.9.12.

Műveletek összevett törtekkel:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{1}{5}}{2\frac{1}{10} + \frac{2}{5}} + \frac{2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{4\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} : 2\frac{1}{10} + \frac{2}{5} + 2\frac{1}{4} + \frac{1}{8} : 4\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \\ &= \frac{5-4}{20} : \frac{21+4}{10} + \frac{18+1}{8} : \frac{18+3}{4} = \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{10}{25} + \frac{19}{8} \cdot \frac{4}{21} = \frac{10}{500} + \frac{76}{168} = \\ &= \frac{1}{50} + \frac{38}{84} = \frac{1}{50} + \frac{19}{42} = \frac{840 + 1900}{4200} = \frac{2740}{4200} = \left(\frac{274}{420}\right) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{7}} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{8}} &= \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{2}{3} : \frac{3}{8}\right) = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 1} - \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 3} = \frac{14}{3} - \frac{16}{9} = \\ &= \frac{98 - 16}{21} = \frac{82}{21} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{5}} - \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} &= \left(\frac{5+8}{20} : \frac{15+4}{20}\right) - \left(\frac{8+9}{12} : \frac{16+3}{6}\right) = \\ &= \frac{13}{20} \cdot \frac{20}{19} - \frac{17}{12} \cdot \frac{6}{19} = \frac{13}{19} - \frac{17}{38} = \frac{26-17}{38} = \frac{9}{38} . \end{aligned}$$

5.9.14.

Közi feladat

$$\frac{2\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{4\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}}{5\frac{1}{6}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{19}{4}} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{\frac{31}{6}} = \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{4}{19}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{31}\right) = \frac{7}{19} \cdot \frac{5}{31} = \frac{35}{589}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}} : \frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{4}} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4}\right) : \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{12} : \frac{8}{15} = \frac{7}{12} \cdot \frac{15}{8} = \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{35}{32}$$

$$\frac{\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{1}{4}} : \frac{3\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{9}{4}} : \frac{\frac{13}{4}}{\frac{5}{2}} = \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{13}{4} \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{20}{27} \cdot \frac{20}{26} = \frac{20}{27} \cdot \frac{10}{13} = \frac{200}{351}$$

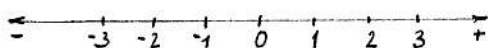
$$\frac{\frac{1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{4}} : \frac{2\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{5\frac{1}{3}} = \frac{\frac{43}{12}}{\frac{13}{4}} : \frac{\frac{12}{4}}{\frac{16}{3}} = \left(\frac{43}{12} \cdot \frac{4}{13}\right) : \left(\frac{12}{4} \cdot \frac{3}{16}\right) = \frac{43}{39} \cdot \frac{16}{9} = \frac{688}{351}$$

$$\frac{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}}{3\frac{1}{3}} : \frac{5\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{12}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{10}{3}} : \frac{\frac{15}{4}}{\frac{49}{12}} = \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{10}\right) : \left(\frac{15}{4} \cdot \frac{12}{49}\right) = \frac{3 \cdot 49}{8 \cdot 45} = \frac{49}{8 \cdot 15} = \frac{49}{120}$$

5.9.16.

7.óra

a számok abszolút értéke



a szám abszolút értéke a szám előjel nélküli értéke.

jele: | |

- 1.) $|5| = 5$ pozitív szám abszolút értéke maga a szám.
 $a > 0 \rightarrow |a| = a$
- 2.) $|0| = 0$ a nulla abszolút értéke 0.
 $a = 0 \rightarrow |a| = 0$
- 3.) $|-3| = 3$ negatív szám abszolút értéke a vele ellentett szám.
 $a < 0 \rightarrow |a| = -a > 0$ $|-10| = -(-10) = 10$

Bármely szám abszolút értéke a 0 kivételével pozitív szám.

$$|-2\frac{3}{10}| = 2,3$$

$$|-\frac{5}{6}| = \frac{5}{6}$$

$$x = 0 \quad |x| = 0$$

$$b < 0 \quad |b| = -b$$

$$|77| = 77$$

$$|-77| = 77$$

$$-2 > -3$$

$$2 < 3$$

$$(3) + (4) = 7$$

$$(5t) + (2t) = 7t$$

$$(-1t) + (-2t) = -3t$$

$$(-5t) + (+5t) = 0$$

$$(-2t) + (3t) = t$$

$$(5) - (4) = 5 - 4 = 1$$

$$(-42) + (56) = 14$$

$$(5) \cdot (+3) = 15$$

$$(-5) \cdot (-3) = 15$$

$$(5) \cdot (-3) = -15$$

$$(-5) \cdot (+3) = -15$$

$$(78) : (13) = 6$$

$$\left(-\frac{18}{5}\right) : (-3) = \frac{6}{5}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{12}$$

$$(-95) : (19) = -5$$

$$(0) : (3) = 0/3 = 0$$

$$\frac{3}{0} = (3) : (0) = \text{mincs értelmetlen.}$$

8. óra

1965.9.20

A hatványozás

$$(2)^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$(4)^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$(3)^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Positív szám bármely kitevőjű hatványa pozitív.

$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

$$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$$

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$

$$(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$$

Negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív, páratlan kitevőjű hatványa pedig negatív.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$\left(-\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$$

Fordít úgy hatványozunk, hogy a számlálót és a nevezőt a kívánt hatványra emeljük.

$$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 7)^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3 = 8 \cdot 27 \cdot 49 \cdot 7 = 74008$$

$$\left(5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\right)^2 = 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9 = 25 \cdot 2,25 = 56,25$$

Sorozatot úgy hatványozunk, hogy minden tényezőt külön hatványozunk.

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3-4}{12} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{12} = \frac{3}{2} - -\frac{1}{36} = \frac{3}{2} + \frac{1}{36} = \frac{55}{36}$$

9. óra

1965.9.21

Gyakorlat

$$\frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(3 : \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4} : \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot (12) = \left(\frac{15}{4} : \frac{10}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} \cdot 12\right) =$$

$$= \left(\frac{15}{4} \cdot \frac{3}{10}\right) - \frac{1}{2} + 8 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} + 8 = \frac{9}{8} - \frac{1}{2} + 8 = \frac{9-4+64}{8} = \frac{69}{8};$$

Algebra.

A változó és a kifejezés fogalma.

Av $a, b, c, d, \dots, k, l, m, n, \dots, x, y, z$ betűket változóknak nevezzük. Ezek bármely számértékkel felvethetnek.

A kifejezések állandó számokból és változókból műveletek segítségével épülnek fel.

$$x + y, 7a^2b, \frac{8ab}{c}, \frac{3}{5}a^4b^3 + c^2$$

$$\boxed{6}^3 \quad 6.3$$

$$\boxed{3}^{1.5} \quad 3.1.5$$

$$T_0 = a.b$$

Arért volt szükség a matematikában a változó számok bevezetésére, hogy meg tudjuk állapítani a kifejezéseket.

A változó szám mindig más értéket vehet fel.

A kifejezések lehetnek egy, kettő, ... változósak.

Műveletek egytagú kifejezésekkel:

Az egytagú kifejezések állandó számokból és változóból a szorzás és az egész"-kifejező hatványozás segítségével épülnek fel: $4a^3$ - $0,3x$ $\frac{2}{3}a^2b^2c^4$ - 8

Azokat az egytagúakat amelyeknek ténylegesen, együlthatói (állandó"-előjeles szám) és különféle változó hatványai vannak, rendezett egytagúnak nevezzük

$$\frac{2}{3}a^2b^2c^4 - \text{rendezett}$$

$$\frac{2}{3}a^4b^2c; 2ab^2a^3b^4 - \text{nem rendezett}$$

Azokat az egytagúakat, amelyek csak az együlthatóban különböznek egymástól, egyneműeknek nevezzük.

$$\frac{3}{4}x^2y - 5x^2y - \text{egyneműek}$$

együlthatók.

Csak egyneműket lehet összeadni v. kivonni.

A nem egyneműket különeműkké nevezzük.

$$2ab, 2ab^2$$

Egytagú kifejezések értékeinek kiszámítása

$$\frac{2}{3}x^2y \quad \frac{2}{3}x^2y = \frac{2}{3}6^2 \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 2 = 2 \cdot 12 \cdot 2 = \underline{48} \quad x=6; y=2$$

$$\frac{2}{3}x^2y = \frac{2}{3} \cdot 3^2 \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 1 = 2 \cdot 3 = \underline{6} \quad x=3; y=1$$

1965.9.21.

Házi feladat.

$$\frac{1}{4}x^3y^2z = \frac{1}{4} \cdot 2^3 \cdot 6^2 \cdot 7 = \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot 36 \cdot 7 = 2 \cdot 36 \cdot 7 = 2 \cdot 252 = 504$$

$$" = \frac{1}{4} \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot 27 \cdot 49 \cdot 4 = 27 \cdot 49 = 1323$$

$$x=2; y=6; z=7 \\ x=3; y=7; z=4$$

$$\frac{4}{5}a^3b^2c^4 = \frac{4}{5} \cdot 2^3 \cdot 12 \cdot 1^4 = \frac{4}{5} \cdot 8 \cdot 12 = \frac{4}{5} \cdot 96 = \frac{384}{5} = 76,8$$

$$\frac{4}{5} \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 2^4 = \frac{4}{5} \cdot 27 \cdot 13 \cdot 16 = 351 \cdot 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{22464}{5} = 4492,8$$

$$a=2; b=12; c=1 \\ a=3; b=13; c=2$$

1965.9.23.

10 - 11. óra

$$\frac{2}{3}a^3b^5c^6 = 0$$

$$a=2; b=3; c=0$$

$$\frac{2 \times 4^2}{12} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{6} = 4$$

$$x=3; y=2; z=6$$

Összeadás. Egynemű, egytagú kifejezésekkel úgy adunk össze, hogy az együlthalálható összeadjuk és a kapott összeget a közös belükifejezés elé írjuk.
Különnemű egytagú kifejezések összeadását csak jelöljük.

$$(4a^2b) + (7a^2b) = 11a^2b$$

$$(3a^2b) + (5a^2b) = 8a^2b$$

$$\left(\frac{1}{5} \times 7^3 n^3\right) + \left(\frac{11}{20} \times 7^3 n^3\right) = \frac{2}{4} \times 7^3 n^3$$

$$[3(u+v)] + [-2(u+v)] + \left[-\frac{3}{8}(u+v)\right] = \left(3-2-\frac{3}{8}\right)(u+v) = \frac{5}{8}(u+v)$$

Kivonás. Két egynemű egytagú kifejezést úgy vonunk ki egymástól, hogy a kisebbítendő együlthalálhatóját kivonjuk a kivonandó együlthalálhatóját és a nyert kifejezést a belükifejezés elé írjuk.
Különnemű egytagú kifejezések kivonását csak jelöljük. (

$$(35 \times^3 n) - (28 \times^3 n) = 7 \times^3 n$$

$$(-3,7x^7) - (x^7) = -4,7x^7$$

$$\left(-2\frac{2}{3}k\right) - \left(-\frac{3}{4}k\right) = \left(-2\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)k = \left(-\frac{8}{3} + \frac{3}{4}\right)k = \left(-\frac{32+9}{12}\right)k = -\frac{41}{12}k$$

$$(9a^2b^3) - (3c^4d) = 9a^2b^3 - 3c^4d$$

$$\left(5\frac{1}{2}a^2b\right) - (2b) - \left(8\frac{5}{8}a^2b\right) + (5a) - (-1,6b) + \left(9\frac{3}{4}a^2b\right) =$$

$$= \left(5\frac{1}{2}a^2b\right) - \left(8\frac{5}{8}a^2b\right) + \left(9\frac{3}{4}a^2b\right) - (2b) + (5a) - (-1,6b) =$$

$$= \left(22 + \frac{\dots}{\dots}\right) \left[\left(5\frac{1}{2} - 8\frac{5}{8} + 9\frac{3}{4}\right)(a^2b) + [(-2 + 1,6)b]\right] + 5a =$$

$$= \left(\frac{11}{2} - \frac{53}{6} + \frac{39}{4}\right)a^2b - 0,4b + 5a = \frac{132 - 212 + 234}{24}a^2b + 5a - 0,4b =$$

$$= \frac{31+144}{24}a^2b + 5a - 0,4b = \frac{77}{12}a^2b + 5a - 0,4b$$

Egytagú kifejezésekkel úgy vonunk, hogy először összerendezünk az együlthalálható, majd az egyenlő alapú hatványokat sorozzuk össze úgy, hogy a közös alapot a kilevő összege elé írjuk.

Különböző alapú kif. sorozását csak jelöljük.

$$(2x^2)(3xy) = 6x^3y$$

$$\left(1\frac{1}{2}a^2b^3c^4\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2c^2d^3\right) = -\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)a^4b^3c^6d^3 = -\frac{1}{2}a^4b^3c^6d^3$$

$$\left(-\frac{1}{3}a\right) \cdot (-0,15b^2) \cdot \left(\frac{6}{5}c^3\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\left(\frac{5}{3} \cdot 0,15 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{5}\right)a b^2 c^3 = 0,15 \cdot \frac{420}{105} a b^2 c^3 =$$

$$= \frac{15}{100} \cdot \frac{420}{105} a b^2 c^3 = \frac{5300}{10500} a b^2 c^3$$

$$(5 \times 7^2)(-x)(2y)(-0,1xy)(-3)(x^2y^2n^2) = -3 \times 5 \times 7^2 n^2$$

Egytagú kifejezést egytagú kifejezéssel úgy osztunk, hogy először az osztó együlthalálhatójaival elosztjuk az osztandó együlthalálhatóit, azután az egyenlő alapú hatványokat osztását végezzük el.

$$(28a^3b^5):(7a^3b^2) = 4a^0b^3$$

$$(6a^3m^6n^2):(-2a^2m^4n^2) = -3a^1m^2n^0$$

$$(-5x^2y^2z^3) : (-x^5y^2z^5) = 5z^3 \frac{x^2}{x^5} = 5z^3 \frac{1}{x^3}$$

$$(-75a^7b^7c^6) : (20b^6) = -\frac{15}{4} a^7b^1c^6$$

Hatványozás

Egylagú kifejezést úgy hatványozunk, hogy az egylagú minden egyes tényezőjét az előírt hatványra emeljük, az így kapott hatványokat összeszorozzuk.

Először az együtthatót emeljük az előírt hatványra, azután a hatványokat hatványozzuk úgy, hogy az alapot a kívánt niszorátára emeljük.

$$(4a^2b^3c^5)^2 = 4^2 a^4 b^6 c^{10} = 16a^4b^6c^{10}$$

$$(-3x^2y^2z^3)^4 = 81 x^8 y^8 z^{12}$$

$$(-\frac{1}{2}p^4q^6r^7)^3 = -\frac{1}{8} p^{12} q^{18} r^{21}$$

$$(1\frac{1}{5}u^2v)^3 = 1,2^3 u^{2 \cdot 3} v^3 = \frac{6}{5} u^{2 \cdot 3} v^3 = \frac{216}{125} u^{2 \cdot 3} v^3$$

1965. 9. 23.

Házi feladat

5. 3p.

$$3ab^2 + 1ab^2 + 25\frac{1}{2}ab^2 = 29\frac{1}{2}ab^2$$

$$[3,14(u+c)] + [15(u+c)] + [92(u+c)] + [65(u+c)] = 175,14(u+c)$$

$$\frac{3}{4}a + \frac{17}{2}a + 5a - 3a = (\frac{12,5}{4} + 2)a = 10,92a$$

$$29acd^7 - 3acd^7 = 26acd^7$$

$$35xzc^6 - 38xzc^6 = -3xzc^6$$

$$1965abc - 297abc = 1668abc$$

$$12ax^2c \cdot 14axc^6 = 168a^2x^3c^7$$

$$12ax^6c^4 \cdot 14ax^4c^6 = 168a^2x^{10}c^{10}$$

$$13ab^9 \cdot 15a^3b^6 = 195a^4b^{15}$$

$$3\frac{1}{6}x^7y^6 \cdot \frac{1}{2}x^6y^7 = \frac{19}{12}x^{13}y^{13}$$

$$382axh : 14axc = 28,57h/c$$

$$82a^6b^8 : \frac{1}{2}ab^6 = 164a^5b^2$$

$$192abz^9 : abz^7 = 192z^2$$

$$(4ab^3cd^7)^2 = 16b^6c^2a^2d^{14}$$

$$(\frac{1}{4}ab^2c^5)^3 = \frac{1}{64}a^3b^6c^{15}$$

$$(3a^3x^2z^4)^5 = 243a^{15}x^{10}z^{20}$$

12. óra.

1965.9.24

Műveletek polinomokkal (többségi)

A polinomok fogalma és rendje.

Egytagúak algebrai összeg polinomnak nevezik.

$$4x^3 + 3/4 x^2 - x + 10$$

$$5a^5 - 2a^4b + 215a^3b^2 + 0,5a^2b^3 + 5ab^4 - 96^5$$

Köbpolinomú rendezett egytagúaknak valamely változó-juk csökkenő v. növekvő hatványai szerint rendezett algebrai összeg polinomnak nevezik.

$$6 - 7a + 3a^2 + 7a^3 - 2a^4$$

negyedfokú rendezett polinom (többségi)

Polinomok értékeinek kiszámítása:

$$x^2 - 4x + 2 = (-2)^2 - (4 \cdot -2) + 2 = 4 + 8 + 2 = 14$$

$$x = -2; 1; 1,6;$$

$$x^2 - 4x + 2 = (1)^2 - (4 \cdot 1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1$$

$$2; \frac{9}{4};$$

$$x^2 - 4x + 2 = (1,6)^2 - (4 \cdot 1,6) + 2 = 2,56 - 6,4 + 2 = -1,84$$

$$x^2 - 4x + 2 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$$

$$x^2 - 4x + 2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(4 \cdot \frac{3}{4}\right) + 2 = \frac{9}{16} - 3 + 2 = \frac{9}{16} - 1 = -\frac{7}{16}$$

A polinomok értelmezési tartományja az összes szám.

A polinomok összeadása:

$$(2x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 3) + (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4) =$$

$$= \underline{2x^4} + \underline{x^3} - \underline{3x^2} - \underline{5x} - \underline{3} + \underline{x^4} - \underline{4x^3} + \underline{3x^2} + \underline{4} = 3x^4 - 3x^3 - 5x + 1$$

$$(-4m^6 + m^5n^2 + \frac{13}{14}m^3n^4 + m^2n^6 - 1\frac{3}{4}mn^8 - 2m^{10}) +$$

$$+ (3m^6 - 3m^5n^2 + \frac{5}{4}m^3n^4 + 4,6m^2n^6 + 2\frac{7}{8}mn^8 - 3m^{10}) +$$

$$+ (-2m^6 + 4m^5n^2 + \frac{5}{6}m^3n^4 - m^2n^6 - 2\frac{1}{2}mn^8 - 4m^{10}) +$$

$$+ (m^6 + 2m^5n^2 + \frac{2}{3}m^3n^4 - 0,6m^2n^6 - 1\frac{1}{3}mn^8 + 2m^{10}) =$$

$$= -2m^6 + 4m^5n^2 + \frac{284,5}{84}m^3n^4 + 4m^2n^6 - 2\frac{1}{2}mn^8 - 7m^{10}$$

13. óra.

1965.9.24

Kivonás:

A kivonás a kivorandó ellentettjének a hozzáadásával helyettesíthető.

$$-(a + b + c + d + \dots + x + y + n) = -a - b - c - d - \dots - x - y - n.$$

Az összeg ellentettje meggyezik a tagok ellentettjeinek összegével.

$$(4a^4 + a^3 + \frac{3}{4}a^2 - 2,6a + 3\frac{1}{2}) - (5a^5 - 2a^3 + \frac{1}{2}a^2 + 0,6) =$$

$$= \underline{4a^4} + \underline{a^3} + \underline{\frac{3}{4}a^2} - \underline{2,6a} + \underline{3\frac{1}{2}} - \underline{5a^5} + \underline{2a^3} - \underline{\frac{1}{2}a^2} - \underline{0,6} =$$

$$= -a^5 + 3a^3 + \frac{1}{4}a^2 - 2,6a + 2\frac{3}{10}$$

$$\left(\frac{5}{3}u^4 + 1,6u^3v + \frac{1}{3}u^2v^2 - 2uv^3 + v^4\right) - \left(\frac{2}{3}u^4 - 2,4u^3v - \frac{1}{4}u^2v^2 + 2uv^3 + v^4\right) =$$

$$\frac{5}{3}u^4 + 1,6u^3v + \frac{1}{3}u^2v^2 - 2uv^3 + v^4 - \frac{2}{3}u^4 + 2,4u^3v + \frac{1}{4}u^2v^2 - 2uv^3 - v^4 =$$

$$= u^4 + 4u^3v + \frac{2}{12}u^2v^2 - 4uv^3$$

$$(n^3 + 2n^2 + n - 1) - (3n^3 + 4n^2 - 3n + 2) + (n^3 + 6n^2 + n + 5) - (-4n^3 - n^2 + 5n) =$$

$$= \frac{n^3 + 2n^2 + n - 1}{-3n^3 + 5n^2 + 2} - \frac{3n^3 + 4n^2 - 3n + 2}{-3n^3 + 5n^2 + 2} + \frac{n^3 + 6n^2 + n + 5}{-3n^3 + 5n^2 + 2} - \frac{-4n^3 - n^2 + 5n}{-3n^3 + 5n^2 + 2} =$$

A polinomok összeadását és kivonását közös neven összevonásoknak nevezzük.

$$\{[(1+a) - (a^2 + 3a^3)] - [(2a^4 + 5) + a^3 - a + 4]\} -$$

$$- \{[a^5 - (a^4 + 2)] + [(a^2 + 2) - (a^3 + a)] - [2a^4 - (5a^3 - 4)]\} +$$

$$+ \{[(a^4 - 5a^3) + (1 + 5a)] - [(1 + 2a) - (3a^2 + 4a^3)]\} =$$

$$= \{[1 + a - a^2 - 3a^3] - [2a^4 + 5 + a^3 - a + 4]\} -$$

$$- \{[a^5 - a^4 - 2] + [a^2 + 2 - a^3 - a] - [2a^4 - 5a^3 + 4]\} +$$

$$+ \{[a^4 - 5a^3 + 1 + 5a] - [1 + 2a - 3a^2 - 4a^3]\} =$$

$$= \{1 + a - a^2 - 3a^3 - 2a^4 - 5 - a^3 + a - 4\} -$$

$$- \{a^5 - a^4 - 2 + a^2 + 2 - a^3 - a - 2a^4 + 5a^3 - 4\} +$$

$$+ \{a^4 - 5a^3 + 1 + 5a - 1 - 2a + 3a^2 + 4a^3\} =$$

$$= \frac{1+a-a^2-3a^3-2a^4-5-a^3+a-4}{-a^5+a^4+2-a^2-2+a^3+a+2a^4}$$

$$- \frac{-5a^3+4+a^4-5a^3+1+5a-1-2a+3a^2+4a^3}{-4+6a+a^2-9a^3} + 2a^4 - a^5$$

Többlagú kifejezést egylagú kifejezéssel úgy sorozunk, hogy a többlagú kifejezés minden egyes tagját megorozzuk az egylagú kifejezéssel.

$$(8a^3 - 4a^2b + ab^2 - 2b^3)(2a^2b) = 16a^5b - 8a^4b^2 + 2a^3b^3 - 4a^2b^4$$

$$\left(\frac{3}{4}x^2y - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{6}xy^2\right)\left(-\frac{4}{3}xy\right) = -\frac{1}{2}x^3y^2 + \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{2}{9}xy^3$$

Polinom sorozása polinommal

Többlagú kifejezést többlagú kifejezéssel úgy sorozunk, hogy az egyik több tagú tényező minden egyes tagjával sorozzuk a másik tényező minden egyes tagjával.

$$(4a^2 + a)(2a + 3) = 8a^3 + 2a^2 + 12a^2 + 3a = 8a^3 + 14a^2 + 3a$$

$$(3x^3 + 2x^2 - x)(4x^2 - 6x + 2) = 12x^5 + 8x^4 - 4x^3 - 18x^4 - 12x^3 + 6x^2$$

$$12x^5 - 10x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 2x$$

Házi feladat

1965.9.21

$$(x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1) = \underline{x^4 - x^3 + x^2 - x + x^3 - x^2 + x - 1} = x^4 - 1.$$

$$(m^4 + 2m^3 - 4m^2 - 5m + 2)(2m^2 - 3m + 4) = 2m^6 + 4m^5 - 8m^4 - 10m^3 + 4m^2 - 3m^5 - 6m^4 + 12m^3 + 15m^2 - 6m + 4m^4 + 8m^3 - 16m^2 - 20m + 8$$

$$2m^6 + m^5 - 10m^4 + 10m^3 + 3m^2 - 16m + 8.$$

$$\left(\frac{2}{3}a^2b^2 + \frac{6}{5}ab + \frac{8}{3}\right)\left(\frac{6}{5}a^3b - 5ab^3\right) =$$

$$= \frac{4}{5}a^5b^3 + \frac{36}{25}a^4b^2 + \frac{16}{5}a^3b - \frac{10}{3}a^3b^5 - 6a^2b^4 - \frac{40}{3}ab^3.$$

14. óra.

1965.9.21

Revenáns sorok

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2 \quad \underline{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Két tag összegének és különbségének a sorozata egyenlő a két tag négyzetének a különbségével.

$$(2a+3)(2a-3) = 4a^2 - 9$$

$$(5a^2b + c^3)(5a^2b - c^3) = 25a^4b^2 - c^6$$

$$\left(\frac{1}{2}xy + 1\right)\left(\frac{1}{2}xy - 1\right) = \frac{1}{4}x^2y^2 - 1$$

$$\left(1\frac{1}{3}m + 3\frac{2}{3}n\right)\left(1\frac{1}{3}m - 3\frac{2}{3}n\right) = \frac{25}{9}m^2 - 10\frac{2}{3}mn$$

$$(ab^3c^5 - 4\frac{1}{2}a^6b^4c^2)(ab^3c^5 + 4\frac{1}{2}a^6b^4c^2) = (a^2b^6c^{10} - 20,25a^{11}b^8c^4)$$

$$= a^2b^6c^{10} - 4\frac{1}{2}a^7b^7c^7 + 4\frac{1}{2}a^6b^4c^2$$

$$(ab^3c^5 - 4\frac{1}{2}a^6b^4c^2)(ab^3c^5 + 4\frac{1}{2}a^6b^4c^2) = a^2b^6c^{10} - 20,25a^{11}b^8c^4$$

$$[(2a+b)+4][(2a+b)-4] = (2a+b)^2 - 4^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 - 16$$

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\underline{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Két tag összegének és különbségének a négyzetét megkapjuk, ha kifejtjük az első tag négyzetét, az első és második tag kétszeres szorzatát, a második tag négyzetét, és összeadjuk.

$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(3x^2 + 2x)^2 = 9x^4 + 12x^3 + 4x^2.$$

$$(4a^3b + a^2b^2)^2 = 16a^6b^2 + 8a^5b^3 + a^4b^4$$

$$\left(\frac{2}{3}x^2y - 6x\right)^2 = \frac{4}{9}x^4y^2 - \frac{24}{3}x^3y + 36x^2$$

1965. 9. 28.

Közi feladat.

Két tag négyzetére 10 feladat!

$$\left(\frac{2}{8}xy^6 + \frac{3}{7}xz\right)^2 = \frac{4}{64}x^2y^{12} + \frac{12}{56}xy^6z + \frac{9}{49}z^2$$

$$\left(\frac{4}{13}ad^2 + 4a^2d^9\right)^2 = \frac{16}{169}a^2d^4 + \frac{32}{13}a^3d^{11} + 16a^4d^{18}$$

$$\left(\frac{9}{2}hi^3 + \frac{2}{4}h^6j^2\right)^2 = \frac{81}{4}h^2i^6 + \frac{36}{8}h^7ij^5 + \frac{4}{16}h^{12}j^4$$

$$(3ab^2c^7 + 9ac^8)^2 = 9a^2b^4c^{14} + 54a^2b^2c^{15} + 81a^2c^{16}$$

$$\left(9xz^6 + \frac{3}{7}xy^2\right)^2 = 81x^2z^{12} + \frac{54}{7}x^2z^6y^2 + \frac{9}{49}x^2y^4$$

$$(a^2\pi + ab^2)^2 = a^4\pi^2 + 2a^3b^2\pi + a^2b^4$$

$$\left(\frac{32}{5}\sigma^2\tau^9 - \frac{9}{2}\sigma^3\right)^2 = \frac{1024}{5}\sigma^4\tau^{18} - \frac{576}{5}\sigma^5\tau^9 + \frac{81}{4}\sigma^6$$

$$\left(\frac{a}{6}c - 3c^5\right)^2 = \frac{a^2}{36}c^2 - 6\frac{a}{6}c^6 + 9c^{10}$$

$$(gh^3 - h^2i)^2 = g^2h^6 - 2gh^5i + h^4i^2$$

$$\begin{aligned} [(c+b) - 6a^2]^2 &= (c+b)^2 - [2(c+b) \cdot 6a^2] + 36a^4 = \\ &= c^2 + 2cb + b^2 - [12c + 12b] \cdot 6a^2 + 36a^4 = \\ &= c^2 + 2cb + b^2 - [12a^2c + 12a^2b] + 36a^4 = \\ &= c^2 + 2cb + b^2 + 12a^2c + 12a^2b + 36a^4. \end{aligned}$$

1965. 9. 30.

15-16. óra

$$(a+b)(a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \underline{a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = \underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Két tag összegének a köbét úgy számoljuk ki, hogy az első tag köbéhez hozzáadjuk az első tag négyzetének és a második tagnak, a háromszoros szorzatát, továbbá a második tag négyzetének és az (második tag négyzetének) szorzatát, a második tag köbét. első tag háromszoros

$$(a-b)(a-b)(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = \underline{a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3}$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = \underline{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

$$(2a^2 + b)^3 = 8a^6 + 12a^4b + 6a^2b^2 + b^3 = 8a^6 + 12a^4b + 6a^2b^2 + b^3.$$

$$(2x^2 + x^3)^3 = 8x^6 + 12x^5 + 6x^4 + x^3.$$

$$(3x + 2x^2)^3 = 27x^3 + 54x^4 + 36x^5 + 8x^6$$

$$(4a^2b^3c + 2ab^2c^4)^3 = 64a^6b^9c^3 + 96a^5b^8c^6 + 48a^4b^7c^9 + 8a^3b^6c^{12}$$

$$(5x - 1)^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x + 1.$$

$$\left(\frac{1}{3}a^2 - a\right)^3 = \frac{1}{27}a^6 - \frac{1}{3}a^5 + \frac{2}{3}a^4 - a^3.$$

$$\begin{aligned} (2x+1)^5 &= (2x+1)^2 \cdot (2x+1)^2 \cdot (2x+1) = (4x^2+4x+1)(4x^2+4x+1)(2x+1) = \\ &= 32x^5 + 48x^4 + 24x^3 + 4x^2 + 32x^4 + 48x^3 + 24x^2 + 4x + 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = \\ &= 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1. \end{aligned}$$

Polinomok sorozatái alakítása

Többségiak sorozatokat a kijelölt sorozat többségi alakítások. A műveleti gyakorlatban előforduló kifejezések alakítások során, ennek a fordítottja, azaz egy többségi sorozat alakítása is szükséges. Sorozat a következőképpen alakítható:

1. kiemeléssel
1. csoportosítással
3. meredek sorozatokkal (kérdés segítségével)

Kiemelés

$$ax + bx + cx + dx + \dots + ux + vx + zx = x(a + b + c + d + \dots + u + v + z).$$

$$2a + 2b = 2(a + b) \quad 50^3b^2 + 15a^2b = 5a^2b(ab + 3)$$

$$6x^5y^4z^2 - 12x^3yz^4 + 9x^3y^6 = 3x^3yz^2(2x^2y^3z^2 - 4z^4 + 3y^5)$$

$$\begin{aligned} (-8a^2b^2x^6 - 40a^4b^5x^4 - 36a^3b^3x^6 - 10a^2b^2x^7) = \\ = -4a^2b^2x^4(2a^5x^2 + 10a^2b^3 + 9abx^2 + 5b^5x^3). \end{aligned}$$

Házi feladat

2 tag kötére 5p.

$$(5a^3b + 2a)^3 = 125a^9b^3 + 150a^7b^2 + 60a^5b + 8a^3.$$

$$(2a^5b^2 + c^2)^3 = 8a^{15}b^6 + 12a^{10}b^4c^2 + 6a^5b^2c^4 + c^6.$$

$$\begin{aligned} [(a+b)+c]^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b) \cdot c^2 + c^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3. \end{aligned}$$

$$(a^6 - cd^2)^3 = a^{18} - 3a^{12}cd^2 + 3a^6c^2d^4 - c^3d^6.$$

$$(9a - \frac{1}{2}c^2)^3 = 729a^3 - \frac{243}{2}a^2c^2 + \frac{27}{4}ac^4 - \frac{1}{8}c^6.$$

1965.9.30

b., Szorzatosság

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 16 = (x^3 + 4x^2) + (4x + 16) = x^2(x+4) + 4(x+4) = \underline{(x+4)(x^2+4)}.$$

$$\begin{aligned} 2a^2x + 3by + bx + 6a^2y^2 &= 2a^2(x+3y^2) + b(3y+x) \\ &= (2a^2x + bx) + (3by + 6a^2y^2) = x(2a^2+b) + y(3b+6a^2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a^2x + 3by^2 + bx + 6a^2y^2 &= (2a^2x + 6a^2y^2) + (3by^2 + bx) = \\ &= 2a^2(x+3y^2) + b(3y^2+x) = \\ &= \underline{(x+3y^2)(2a^2+b)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 + a^2b - a^2c - abc &= (a^2b - a^2c) + (a^3 - abc) = a^2(b-c) + a(a^2-bc) \\ &= (a^3 - a^2c) + (a^2b - abc) = a^2(a-c) + ab(a-c) = \\ &= \underline{(a-c)(a^2+ab)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6xy - 3y + 2y^2 - 4xy^2 &= (6xy - 3y) + (2y^2 - 4xy^2) = 3y(2x-1) + 2y^2(-1+2x) \\ &= \underline{(2x-1)(3y-2y^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 - bx^2 + ax - bx - a + b &= (ax^2 - bx^2) + (ax - bx) + (-a + b) = \\ &= x^2(a-b) + x(a-b) + 1(a-b) = \\ &= \underline{(x^2+x+1)(a-b)}. \end{aligned}$$

c., Szorzatosság alakítás névleges szorzatokkal

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$4x^2 - 4y^2 = (2x+2y)(2x-2y)$$

$$36a^2b^2 - 1 = (6a^2b+1)(6a^2b-1)$$

$$x^6y^4 - \frac{1}{4} = (x^3y^2 + \frac{1}{2})(x^3y^2 - \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{25} - \frac{9}{49}m^2n^2 = (\frac{1}{5} + \frac{3}{7}mn)(\frac{1}{5} - \frac{3}{7}mn)$$

$$(\frac{1}{2}a^2b^3 - ab^2)^2 = \frac{1}{4}a^4b^6 - a^3b^5 + a^2b^4$$

osztás: - polinom osztása egytagú kifejezéssel

Többtagú kifejezést egytagúval úgy osztunk, hogy a többtagú minden egyes tagját elosztjuk az egytagú kifejezéssel.

$$(a+b+c+d+\dots+n):x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x} + \dots + \frac{n}{x}$$

$$(10a^4b^3 - 25a^2b^6):5a^2b^3 = 2a^2 - 5ab^3$$

$$(15m^4 + 30m^3 - m^2 - 3m):3m = 5m^3 + 10m^2 - \frac{1}{3}m - 1.$$

$$(21a^4b^5c^3 - 4a^5b^5c^3 + 49a^4b^3c^3) : (-7a^3b^3c^3) = -3a^2b^2c^3 + a^2b^2c^4 - 7ac^5$$

$$\left(\frac{3}{4}x^5y^2z - 7\frac{1}{2}x^4y^3z^2 + \frac{3}{2}x^3y^4\right) : \frac{3}{2}x^3y^2 = \frac{1}{2}x^2z - 5xy^2z^2 + y^2$$

Föltag osztása föltaggal.

$$(6a^2 + a - 12) : (2a + 3) = 3a - 4 \quad (6x^3 - 13x^2 + 11x - 10) : (3x - 5) = 2x^2 - x + 2$$

$$\begin{array}{r} 6a^2 + a - 12 \\ -6a^2 + 9a \\ \hline 0 - 8a - 12 \\ + 8a + 12 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 - 13x^2 + 11x - 10 \\ -6x^3 + 10x^2 \\ \hline 0 - 3x^2 + 11x - 10 \\ + 3x^2 - 5x \\ \hline 0 + 6x - 10 \\ -6x + 10 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

23. Házi feladat

$$\begin{array}{l} (m^5 - m^5) : (m - m) = \frac{m^4 + m^3m + m^2m^2}{+ m m^3 + m^4} \\ -m^5 = m^4m \\ 0 + m^4m - m^5 \\ -m^4m + m^3m^2 \\ \hline 0 + m^3m^2 - m^5 \\ -m^3m^2 + m^2m^3 \\ \hline 0 + m^2m^3 - m^5 \end{array} \quad \begin{array}{l} (10a^4 - 18a^3b + 7a^2b^2 + b^4) : (2a^2 - 4ab + 2b^2) = \\ -10a^4 + 20a^3b - 10a^2b^2 = 5a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 \\ 0 + 2a^3b - 3a^2b^2 + b^4 \\ -2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 \\ \hline 0 + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\ -a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (30x^2 + 2x - 9) : (5x - 3) = 6x + 4 + \frac{3}{5x-3} \\ -30x^2 + 18x \\ \hline 0 + 20x - 9 \\ -20x + 12 \\ \hline 0 + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (m^2m^3 - m^5) : (m - m) = m m^3 + m^4 \\ -m^2m^3 + m m^4 \\ \hline 0 + m m^4 - m^5 \\ -m m^4 + m^5 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

Egész kifejezések polinomja alakítása.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2x+3}{6} - 4(1-3x) \right] \cdot \frac{x-1}{2} - \frac{(x+2)^2}{3} \cdot [12 - (15-6x)] = \\ & = \left[\frac{2x^2-2x}{6} - 4 \cdot \frac{x-1}{2} (1-3x) \right] - \left[\frac{12x^2+48x+48}{3} - \frac{x^2+4x+4}{3} (15-6x) \right] = \\ & = \left[\frac{2x^2-2x}{6} - \frac{4x-4}{2} (1-3x) \right] - \left[\frac{12x^2+48x+48}{3} - \frac{15x^2+60x+60-6x^3-24x^2-24x}{3} \right] = \\ & = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} - (2x-2)(1-3x) \right] - [4x^2+16x+16 - (5x^2+20x+20-2x^3-8x^2-8x)] = \\ & = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} - [2x-2-6x^2+6x] - [4x^2+16x+16-5x^2-20x-20+2x^3+8x^2+8x] = \\ & = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} - 2x+2+6x^2-6x - 4x^2-16x-16+5x^2+20x+20-2x^3-8x^2-8x = \\ & = -2x^3 + \frac{x^2}{3} - x^2 - \frac{x}{3} - 12x + 6 = -2x^3 + \frac{x^2-3x^2}{3} + \frac{-x-36x}{3} + 6 = -2x^3 - \frac{2x^2}{3} - 12\frac{1}{3}x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 12(x+2y) \left\{ \frac{(x+2y)^2 - x(y-x)}{4} - \left[\frac{y(x-y)}{3} + \frac{xy}{2} \right] + x^2 \right\} = \\
 & = (12x+24y) \left\{ \frac{x^2+4xy+4y^2-xy+x^2}{4} - \frac{2xy-2y^2+3xy}{6} + x^2 \right\} = \\
 & = (12x+24y) \left\{ \frac{3x^2+12xy+12y^2-3xy+3x^2-4xy+4y^2-6xy+12x^2}{12} \right\} = \\
 & = (12x+24y) \left\{ \frac{18x^2+16y^2-xy}{12} \right\} = \\
 & = \frac{(12x+24y)(18x^2+16y^2-xy)}{12} = (18x^2+16y^2-xy)(x+2y) = \\
 & = \underline{18x^3 + 16y^2x - x^2y + 36x^2y + 32y^3 - 2xy^2} = \underline{18x^3 + 35x^2y + 14xy^2 + 32y^3}
 \end{aligned}$$

Műveletek algebrai törtekkel.

Két rendezett polinom kijelölt hányadosát algebrai törteknek nevezzük: $\frac{1}{x}$ $\frac{3x+6}{2x-1}$ $\frac{x^2+5x+2}{3x+2}$ $\frac{7}{x^2-1}$ $\frac{11x}{x^2+1}$ $\frac{14a^2b^5}{5c^2d^3}$

$$\frac{1}{x} \quad x \neq 0 \quad \frac{7}{x^2-1} \quad ; \quad \begin{matrix} x^2-1 \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \\ x \neq \pm 1 \end{matrix} \quad \text{Tört műveletei nem lehet 0.}$$

$$\begin{array}{llll}
 \frac{2x^2y}{x-y} & \begin{matrix} x-y \neq 0 \\ x \neq y \end{matrix} & \begin{matrix} x=3 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=2 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{2 \cdot 9 \cdot 1}{3-1} = \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4 \end{matrix}
 \end{array}$$

$$\begin{matrix} x \neq 2 \\ y \neq -2 \end{matrix} \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{2-2} = \frac{-16}{0} = -4$$

Algebrai törlek bővítése.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad \begin{matrix} b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{matrix}$$

1965. X. 15.

25. óra

Algebrai törlek

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{2x \cdot x}{(x-1) \cdot x} = \frac{2x^2}{x^2-x} \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{4}{1} = 4 \quad x=2$$

$$\frac{x+1}{x} = \frac{(x^2+1)(x+1)}{(x^2+1)x} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x} \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{2x^2}{x^2-x} = \frac{2 \cdot 4}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$$

Algebrai törlek egyszerűsítése - két műveletet azt az eljárást amivel az alg. tört számlálóját és nevezőjét is elosztjuk egy kifejezéssel

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

$$c \neq 0$$

$$\frac{x}{x^2+x} = \frac{1}{x+1} \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{matrix}$$

$$\frac{6a}{a^2} = \frac{6}{a}$$

$$a \neq 0$$

$$\frac{18a^5b^2c^3}{24a^3b^2c^2} = \frac{3a^2}{4c}$$

$$\begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{9a^3 \cdot (c-d)^2}{3a^4b^2(c-d)^3} = \frac{9a^3 \cdot (c-d)(c-d)}{3a^4b^2 \cdot (c-d)(c-d)(c-d)} = \frac{3}{ab^2(c-d)}$$

$$a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad c \neq 0$$

$$\frac{49x(a-2b)}{21\eta(2b-a)} = \frac{-49x(2b-a)}{21\eta(2b-a)} = -\frac{7x}{3\eta}$$

$$\begin{matrix} \eta \neq 0 \\ (2b-a) \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{6x^2\eta^2n + 9x\eta^2n^2}{15x^2\eta^2 + 30x\eta^2n} = \frac{3x\eta^2n(2x+3n)}{15x\eta^2(x+2n)} = \frac{n(2x+3n)}{5(x+2n)} = \frac{2xn+3n^2}{5x+10n}$$

$$\begin{matrix} 5x+10n \neq 0 \\ x \neq 0 \\ n \neq 0 \\ \eta \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{2x^2-4x^2-3x+6}{x^2-4x+4} = \frac{2x^2(x-2)-3(x+2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{2x^2-3}{x-2}$$

$$(x-2) \neq 0$$

25. Kézi feladat

1965. X.

$$\begin{aligned} \frac{12x^2-3\eta^2}{10x^3+20x^2\eta+5\eta^2} &= \frac{3(4x^2-\eta^2)}{5x(4x^2+4x\eta+\eta^2)} = \frac{3(2x+\eta)(2x-\eta)}{5x(2x+\eta)(2x+\eta)} = \frac{3(2x-\eta)}{5x(2x+\eta)} \\ &= \frac{6x-3\eta}{10x^2+5\eta x} \end{aligned}$$

$$(2x+\eta) \neq 0$$

Ar összeadás

Egyenlő nevezőjű alq. törtet úgy adunk össze, hogy a számlálótól összeadjuk, a közös nevezőt változatlanul hagyjuk.

$$\frac{3a^2}{5b} + \frac{4a^2}{5b} = \frac{7a^2}{5b} \quad ; \quad \frac{2a}{3x^2\eta} + \frac{7a}{3x^2\eta} = \frac{9a}{3x^2\eta} = \frac{3a}{x^2\eta}$$

$$\frac{a^2+ab}{a+b} + \frac{ab+b^2}{a+b} = \frac{a^2+ab+ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} = a+b$$

$$\begin{matrix} a+b \neq 0 \\ a \neq -b \end{matrix}$$

$$\frac{1x+4}{2x-\eta} + \frac{8-6}{2x-\eta} + \frac{x+2}{2x-\eta} = \frac{2x+4+8-6+x+2}{2x-\eta} = \frac{5x+4}{2x-\eta}$$

$$2x-\eta \neq 0$$

Különböző nevezőjű törtet összeadásnál úgy végezzük el, hogy először közös nevezőre hozzuk.

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{2ab}{12} + \frac{b^2}{9} = \frac{a^2}{16} + \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{9};$$

$$(6x-1)^3 = 216x^3 - 108x^2 + 18x - 1;$$

$$(3x^2 + 2x + y)^2 = 9x^4 + 4x^2 + y^2 + 12x^3 + 4xy + 6x^2y.$$

$$(2a - 3b + a^2)^2 = 4a^2 + 9b^2 + a^4 - 12ab - 6a^2b + 4a^3.$$

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &= [(a+b) + (c+d)]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 = \\ &= \frac{a^2}{1} + \frac{2ab}{2} + \frac{b^2}{1} + \frac{2ac}{2} + \frac{2ad}{2} + \frac{2bc}{2} + \frac{2bd}{2} + \frac{c^2}{1} + \frac{2cd}{2} + \frac{d^2}{1} = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd. \end{aligned}$$

$$(2m + 3k + 4l - 5p)^2 = 4m^2 + 9k^2 + 16l^2 + 25p^2 + 12mk + 16ml + 20mp + 24kl - 30kp - 40lp.$$

165.X.1.

27 óra.

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$b \neq 0 \quad d \neq 0$$

$$\frac{5b}{6a^4c^5} + \frac{2b^2}{9a^6c^4} = \frac{5b \cdot 3a^2 + 2b^2 \cdot 2c}{18a^6c^5} = \frac{15a^2b + 4b^2c}{18a^6c^5}$$

$$\frac{1}{5x^2y} + \frac{2}{15xy} + \frac{3}{25x^2y^2} + 4 = \frac{(15y) + (10xy) + (9x) + 300x^2y^2}{75x^2y^2}$$

$$\frac{1-2x}{a+b} + \frac{3+5x}{2a+2b} + \frac{-10-\frac{5}{2}x}{5(a+b)} = \frac{(10-20x) + (15+25x) + (-20-5x)}{10(a+b)} = \frac{+5}{10(a+b)} = \frac{1}{2(a+b)}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{(a-b) + (a+b)}{a^2-b^2} = \frac{2a}{a^2-b^2};$$

$$\frac{5a}{x-3} + \frac{6a}{x^2-9} + \frac{4a}{x+3} = \frac{5a(x+3) + 6a + 7a(x-3)}{x^2-9} = \frac{5ax+15a+6a+7ax-21a}{x^2-9} = \frac{12ax}{x^2-9}$$

Egyszerűsítő nevezője alq. törtlek kivonása:

$$\frac{5a}{x+1} - \frac{2a}{x+1} = \frac{3a}{x+1} \quad \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b.$$

$$\frac{x-a}{a^2} - \frac{x+a}{a^2} = \frac{x-a-x-a}{a^2} = \frac{-2a}{a^2} = -\frac{2}{a};$$

Különböző nevezője alq. törtlek kivonása:

$$\begin{aligned} \frac{ax+a}{4x^2-9} - \frac{a}{6x-9} &= \frac{3(2x-3)(2x+3)}{3(2x-3)(2x+3)} = \frac{3(ax+a) - (2x+3)a}{3(2x-3)(2x+3)} = \frac{3ax+3a-2ax-3a}{3(2x-3)(2x+3)} = \frac{ax}{3(2x-3)(2x+3)} = \\ &= \frac{ax}{3(4x^2-9)} = \frac{ax}{12x^2-27} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3a+3b} - \frac{a-b}{2a^2+4ab+b^2} = \frac{1}{3(a+b)} - \frac{a-b}{2(a^2+2ab+b^2)} \stackrel{*}{=} \frac{2(a+b) - (a-b)(3a+3b)}{6(a+b)(a+b)} = \frac{2a+2b - 3a^2+3ab-3ab+3ab}{6(a+b)^2} = \frac{2a+2b-3a^2+3ab}{6(a+b)^2}$$

$$\frac{k+1}{m-n} - \frac{2k+3}{m-n} - \frac{3k+1}{m-n} = \frac{(k+1) + (2k+3) - (3k+1)}{m-n} = \frac{k+1+2k+3-3k-1}{m-n} = \frac{3}{m-n}$$

$$\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{1}{a^2-2ab+b^2} - \frac{2}{a^2-b^2} = \frac{1}{(a+b)(a+b)} + \frac{1}{(a-b)(a-b)} - \frac{2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2 + (a+b)^2 - 2(a^2-b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2} = \frac{a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2-2a^2+2b^2}{(a+b)^2(a-b)^2} = \frac{4b^2}{(a+b)^2(a-b)^2} = \frac{4b^2}{(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)}$$

$$* = \frac{2(a+b) \cdot 3(a-b)}{6(a+b)(a+b)} = \frac{2a+2b-3a+3b}{6(a^2+2ab+b^2)} = \frac{5b-a}{6a^2+12ab+6b^2}$$

Algebrai törtek egyszerűsítése:

$$\frac{5ax^2}{4b^4y^5} \cdot 12ab^2y^3 = \frac{15a^2bx}{y^2}; \quad b \neq 0 \quad y \neq 0$$

$$\frac{a^2b}{6x^3y^2z^2} \cdot (-30x^3y^2z^{10}) = \frac{-a^2bz^8}{2y^5}; \quad x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0$$

$$\left(\frac{-2ax^2}{15b^4y^2z^3}\right) \cdot (6x^25y^9z^{10}) = \frac{2ax^4y^7z^7}{3}; \quad b \neq 0 \quad y \neq 0 \quad z \neq 0$$

$$\frac{5b}{2a^2x} \cdot (3a-4b) = \frac{15ab-20b^2}{2a^2x};$$

$$\frac{3a^2c-2b^2d}{6a^4b^2} \cdot 4ab^3c = \frac{12a^3b^3c^2-8ab^4cd}{6a^4b^2} = \frac{6a^2b^3c^2-4b^3cd}{3a^2}; \quad a \neq 0 \quad b \neq 0$$

$$\frac{3a^2c^3}{5b^2d^5} \cdot \frac{10ab^3d}{9c^2} = \frac{2a^3b^3c^3d}{3b^2c^2d^5} = \frac{2a^3b}{3c^4d^4}; \quad b \neq 0 \quad c \neq 0 \quad d \neq 0$$

$$\frac{5a^3x^5}{4b^3c^2} \cdot \frac{3b^4y^4}{10ac^2} \cdot \frac{8c^4z^6}{15a^2x^4y^2} = \frac{a^3x^5b^4c^4z^6}{5b^3c^2a^2a^3x^4y^2} = \frac{x^5c^4y^2}{5z^2b^2} = \frac{c^4x^5y^2}{5b^2z^2};$$

$$a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad c \neq 0 \quad z \neq 0 \quad x \neq 0 \quad y \neq 0$$

$$\frac{15x^3y^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{5x^4y^2} = \frac{3y}{x^2-xy}; \quad x \neq -y \quad x \neq 0 \quad y \neq 0$$

$$\frac{ax^2+2axy+ay^2}{6xy} \cdot \frac{2x^2-2xy}{a^2x^2-a^2y^2} = \frac{a(x+y)(x+y)}{6xy} \cdot \frac{2x(x-y)}{a^2(x+y)(x-y)} = \frac{x+y}{3ay};$$

$$a \neq 0 \quad x \neq y \quad x \neq -y \quad x \neq 0 \quad y \neq 0$$

Alg. tört osztása:

Az osztandót monoruk az osztó
fordított értékeivel.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{20a^3b^5}{21xy^4} : \frac{10ab^5}{7x^3y^2} = \frac{20a^3b^5 \cdot 7x^3y^2}{21xy^4 \cdot 10ab^5} = \frac{2a^3b^5x^3y^2}{3ab^5xy^4} = \frac{2a^2x^2}{3y^2}; \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{2a^2x^3}{3b^3y^4} : \left(-\frac{4ax}{3b^6y^8}\right) = -\frac{2a^2x^3 \cdot 3b^6y^8}{3b^3y^4 \cdot 4ax} = -\frac{ab^3x^2y^4}{2} \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{2a-2b}{a^2-b^2} : \frac{ab}{a^2+ab} = \frac{(2a-2b) \cdot (a^2+ab)}{(a^2-b^2) \cdot (a^2+ab)} = \frac{2(a-b) \cdot a(a+b)}{(a+b)(a-b) \cdot ab} = 1$$

$$= \frac{2a}{ab} = \frac{2}{b}; \quad a \neq 0 \quad a \neq b \quad a \neq -b \quad b \neq 0$$

$$\frac{2}{a^3-2a^2b+ab^2} : \frac{a^2+2ab+b^2}{a^3-ab^2} = \frac{2 \cdot a(a^2-b^2)}{a(a-b)(a-b)(a+b)(a+b)} = \frac{2}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{2}{a^2-b^2}; \quad a \neq 0 \quad a \neq b \quad a \neq -b$$

a hatványozás: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \begin{matrix} b \neq 0 \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$

$$\left(\frac{2a^2b^5}{3cd^7}\right)^2 = \frac{4a^4b^{10}}{9c^2d^{14}}; \quad c \neq 0 \quad d \neq 0$$

$$\left(-\frac{4xy^4}{2z^3}\right)^2 = \frac{16x^2y^8}{2z^6}; \quad z \neq 0 \quad \left(\frac{2x^2+x}{x+1}\right)^2 = \frac{4x^4+4x^3+x^2}{x^2+2x+1} \quad x \neq -1$$

$$\left(-\frac{c^4}{5ab^5}\right)^3 = -\frac{c^{12}}{125a^3b^{15}}; \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix} \quad \left(\frac{x+1}{x}\right)^3 = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3} \quad x \neq 0$$

$$\left(\frac{ab^2}{2c^3d^4}\right)^5 = \frac{a^5b^{10}}{32c^{15}d^{20}} \quad \begin{matrix} c \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}$$

Tört kifejeések átalakítása alg. törtté.

Minden racionális tört kifejezés alg. törtté átalakítható.

$$1 - \frac{1}{1-a} = \frac{-1}{a-1}; \quad a \neq 0 \quad a \neq 1$$

14. 11. 1941

$$\frac{m}{1-m} \quad m \neq 1$$

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c && \text{asszociatív törvény} \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{"} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1}\right)^2 = \left(\frac{a(a+1) + a(a-1)}{(a-1)(a+1)}\right)^2 = \left(\frac{2a^2}{a^2-1}\right)^2 = \frac{4a^4}{a^4-2a^2+1}, \quad \begin{matrix} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{matrix}$$

$$\frac{x-5}{x-2} \quad x \neq 2$$

$$= 1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{\frac{4x-4}{x-4}}} = 1 + \frac{1}{\frac{4x-4-2x+8}{x-4}} = 1 + \frac{1}{\frac{2x+4}{x-4}} = \frac{\frac{2x+4}{x-4} + 1}{\frac{2x+4}{x-4}} =$$

$$x \neq 0$$
$$x \neq -2$$

$$= \frac{\frac{2x+y-3y-4x+2y}{4x^2-y^2}}{\frac{8x^2}{4x^2-y^2}} = \frac{-2x}{8x^2} = -\frac{1}{4x}; \quad x \neq 0, y \neq 2x$$

9. XI. 1965

$$144x^8 - 81y^6 = (12x^4 + 9y^3)(12x^4 - 9y^3)$$

$$\frac{1}{a} - \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - a \right) = \frac{1}{a} - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{4 - a^2 + 2a^3}{4a}$$

31 óra Arv egyenletek

Arv egyenlőség jellel összekötött két egyenlő "értékű" alg. kifejezést egyenletnek nevezünk.

$$24x - 3 = 10x + 25$$

$$\frac{8x-1}{5} = \frac{2x+5}{3}$$

$$x^2 = \frac{3}{2}x + 1$$

$$4x + 3y = 20$$

Arv egyenleteket felosztjuk:

1. Arv ismeretlen (változó) száma szerint.
2. Arv ismeretlen fokja szerint.

1. Egy-ismeretlenű, két-ismeretlenű, n-ismeretlenű, ...
2. Elsőfokú, másodfokú, harmadfokú, egyenletek.
(differenciál egyenlet,)

Arv ismeretlen változókat az abc végéről jelölük: x, y, z

Arv ismeretlen az abc elejétől: a, b, c

$ax + b = 0 \quad a \neq 0$ - elsőfokú egyismeretlenű egyenlet általános alakja.

a, b - ismert } számok
 x - ismeretlen

Arv a számot, amely az egyenlet értéket kielégíti az egyenlet gyökeinek nevezünk.

Ha egy gyök egyszerre több egyenletet kielégít, azokat az egyenleteket ekvivalens (egyenértékű) egyenleteknek nevezünk.

Arv egyenletek megoldása:

Arv egyenletek ekvivalens átalakítási eljárással oldjuk meg.

a köv. ekv. átalakítási eljárásokkal ismerjük.

1. Arv egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a tetszőszerinti számot hozzáadhatjuk.
2. Arv egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a számmal megszorozhatjuk (0 kivételével)

$$ax + b = 0 \quad | + (-b)$$

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$$

$$ax + b - b = 0 - b$$

$$ax = -b$$

$$\left. \begin{array}{l} ax + b = 0 \\ ax = -b \end{array} \right\} \text{ ekvivalens egyenlet.}$$

$$\begin{array}{lcl}
 ax + b = 0 \quad | \cdot \frac{1}{a} & a \neq 0 & ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \\
 ax \cdot \frac{1}{a} = -b \cdot \frac{1}{a} & & a \cdot (-\frac{b}{a}) + b = 0 \\
 \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} & & -\frac{ab}{a} + b = 0 \\
 x = -\frac{b}{a} & & -b + b = 0 \\
 & & 0 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 ax + b = 0 & 1, a = 0 & a \cdot x = 0 \quad 2, b = 0 \\
 0 \cdot x + b = 0 & & a \neq 0 \\
 \underline{b = 0} & & \Rightarrow \underline{x = 0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 3x - 8 = 4 \quad | +8 & 3 \cdot 4 - 8 = 4 & 6x + 1 = 5 \\
 3x = 12 \quad | :3 & 12 - 8 = 4 & 5x - 2 = 2x + 1 \\
 \underline{x = 4} & \underline{4 = 4} & 4x + 1 = 10x - 11 \\
 & & 1,8 - 0,4x = 3,6x - 5,4 - 10x
 \end{array}$$

31. Kari feladat

1965. XI. 1

$$\begin{array}{lcl}
 6x + 1 = 5 & 6x + 1 = 5 & 5x - 2 = 2x + 1 \quad 5x - 2 = 2x + 1 \\
 6x = 4 & 4 + 1 = 5 & 3x = 3 \quad 5 - 2 = 2 + 1 \\
 \underline{x = \frac{2}{3}} & \underline{5 = 5} & \underline{x = 1} \quad \underline{3 = 3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 4x + 1 = 10x - 11 & 4x + 1 = 10x - 11 & 1,8 - 0,4x = 3,6x - 5,4 - 10x \quad | \cdot 10 \\
 12 = 6x & 8 + 1 = 20 - 11 & 18 - 4x = 36x - 54 - 100x \\
 \underline{x = 2} & \underline{9 = 9} & 60x = -72 \\
 & & \underline{x = -1,2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 1,8 - 0,4(-1,2) & = & 3,6(-1,2) - 5,4 - 10(-1,2) \\
 1,8 + 0,48 & = & -4,32 - 5,4 + 12 \\
 2,28 & = & -9,72 + 12 \\
 \underline{2,28} & = & \underline{2,28}
 \end{array}$$

32. ma

1965. XI. 2

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = x + \frac{5}{6} \quad | \cdot 6 & & \frac{15}{12}x - 3\frac{1}{3}x + 1\frac{25}{100} = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{6}x - 4x - 2 \\
 4x - 3 = 6x + 5 & & \frac{17}{12}x - \frac{10}{3}x + \frac{125}{100} = \frac{7}{2} + \frac{13}{6}x - 4x - 2 \\
 4x - 6x = 5 + 3 & & \frac{17}{12}x - \frac{10}{3}x + \frac{5}{4} = \frac{7}{2} + \frac{13}{6}x - 4x - 2 \quad | \cdot 12 \\
 -2x = 8 & & 17x - 40x + 15 = 42 + 26x - 48x - 24 \\
 \underline{x = -4} & & 17x - 40x - 26x + 48x = 42 - 24 - 15 \\
 & & -\frac{1}{4}x = 3 \\
 & & \underline{x = -12}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (x+5) \cdot (x-2) &= (x+1)(x-4) + 2(x+3) \\
 \textcircled{x^2} + 5x - 2x - 10 &= \textcircled{x^2} + x - 4x - 4 + 2x + 6 \\
 3x + x &= 10 + 2 \\
 4x &= 12 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7(x+1)^2 - (2x+5)(2x-5) &= 2x \cdot (x+1,5) + (x+10)(x+12) \\
 7(x^2+2x+1) - (4x^2-25) &= 2x^2+3x + x^2+10x+12x+120 \\
 7x^2+14x+7-4x^2+25 &= 2x^2+3x+x^2+10x+12x+120 \\
 \textcircled{3x^2} + 14x + 32 &= \textcircled{3x^2} + 25x + 120 \\
 14x - 25x &= 120 - 32 \\
 -11x &= 88 \\
 x &= -8
 \end{aligned}$$

365.XI.29.

32. Hári feladat

$$\begin{aligned}
 (0,6 - \frac{x}{3}) - (0,4x + \frac{1}{15}) &= 1\frac{2}{5} - (-\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}) & x = -\frac{1}{3} \\
 \frac{6}{10} - \frac{x}{3} - \frac{4}{10}x - \frac{1}{15} &= \frac{7}{5} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{5} & / \cdot 30 \\
 18 - 10x - 12x - 2 &= 42 + 20x - 12 \\
 -22x + 16 &= 30 + 20x \\
 -22x - 20x &= 30 - 16 \\
 -42x &= 14 \\
 x &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4(2x+5) &= 3(5-x) - 6 \\
 8x+20 &= 15-3x-6 \\
 8x+3x &= 9-20 \\
 11x &= -11 \\
 x &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4(2 \cdot (-1) + 5) &= 3(5+1) - 6 & x = -1 \\
 4 \cdot 8 &= 3 \cdot 6 - 6 \\
 12 &= 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14(x-1) - 6(2x-1) &= 5(3x+4) - 2 & x = -2 \\
 14x-14-12x+6 &= 15x+20-2 \\
 2x-8 &= 15x+18 \\
 2x-15x &= 18+8 \\
 13x &= -26 \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14(-2-1) - 6(2 \cdot 2 - 1) &= 5(3 \cdot 2 + 4) - 2 \\
 -42 + 30 &= -10 - 2 \\
 -12 &= -12
 \end{aligned}$$

Ha egy egyenlet megoldása közben azt kapjuk hogy az egyenlet bal és jobb oldalán lévő kifejezés teljesen azonos, akkor az egyenlet azonoság, vagyis végletlen sok gyöke van.

$$25(x^2+4) = (3x+8)^2 + (4x-6)^2$$

$$\frac{25x^2+100}{100} = \frac{9x^2+48x+64+16x^2-48x+36}{100}$$

$$5(x+1)^3 + (1-8x)(x+2) = (5x+7)(x-1)(x+1) - (x-2)$$

$$5(x^3+3x^2+3x+1) + x-8x^2+2-16x = (5x+7)(x^2-1) - x+2$$

$$\frac{5x^3+15x^2+15x+5+x-8x^2+2-16x}{4x^2-5x+7} = \frac{(5x+7)(x^2-1)-x+2}{+7x^2-6x-5}$$

$$\begin{array}{r} (-5x^2+x) \\ 6x \\ x \end{array} \quad \begin{array}{r} = -12 \\ = -12 \\ = -2 \end{array}$$

$$14x - [(8x+7) - 3(2x+5)] = 2x(x+3) - 3[(5+x) - 2(1-x)] - 2[5(x-4) + (x-1)]$$

$$14x - [8x+7-6x-15] = 2x^2+6x - 3[5+x-2+2x] - 2[5x-20+x^2-x+4]$$

$$14x - 8x - 7 + 6x + 15 = 2x^2+6x - 15 - 3x + 6 - 6x - 10x + 40 - 2x^2+2x-8x+8$$

$$\begin{array}{r} 12x+8 \\ 30x \\ x \end{array} \quad \begin{array}{r} = -18x+39 \\ = 31 \\ = 1 \end{array}$$

$$\frac{8x-1}{5} = \frac{2x+5}{3} \quad / \cdot 15 \quad \frac{(2x+7)(x+1)}{3} - \frac{x(x-8)}{6} - \frac{1-x}{3} = \frac{(x+4)^2}{6}$$

$$\begin{array}{l} 3(8x-1) = 5(2x+5) \\ 24x-3 = 10x+25 \\ 14x = 28 \\ x = \frac{28}{14} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2(2x+7)(x+1) - x(x-8) - 2(1-x) = 3(x+4)^2 \\ 2(2x^2+7x+2x+7) - x^2+8x-2+2x = 3x^2+24x+48 \\ 4x^2+14x+4x+14 - x^2+8x-2+2x = 3x^2+24x+48 \\ 28x+12 = 24x+48 \\ 4x = 36 \\ x = 9 \end{array}$$

$$x - \frac{\frac{1}{3}x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{15}{8}x + \frac{5}{2}}{3}$$

$$x - \frac{(2x+15)/6}{2} = \frac{(15x+20)/8}{3}$$

$$x - \frac{2x+15}{12} = \frac{15x+20}{24}$$

$$\frac{3x}{x-2} + 1 = \frac{x+4}{x-2}$$

$$[(3x(x+)) \quad 3x + \frac{x-2}{x-2} = x-2]$$

$$3x + x-2 = x+4$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$24x - (4x+30) = 15x+20$$

$$24x - 4x - 30 = 15x+20$$

$$5x = 50$$

$$x = 10$$

$$5 + \frac{1}{x-4} = \frac{5-x}{x-4}$$

$$\begin{aligned} 5x - 20 + 1 &= 5 - x \\ 6x &= 24 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$5 + \frac{1}{4-4} \neq \frac{5-4}{4-4}$$

$$\begin{aligned} 0.5 + 1 &\neq \frac{5-4}{4-4} \\ 1 &\neq 1 \end{aligned}$$

Ar egyenletnek
nincs megoldása
 $5+1=5-4$
 $1=1$

Házi feladat

$$\frac{1}{4} - \frac{8-7x}{5} = \frac{3x+5}{4} - \frac{3-x}{2} \quad | \cdot 20$$

$$\begin{aligned} 25 - 4(8-7x) &= 5(3x+5) - 10(3-x) \\ 25 - 32 + 28x &= 15x + 25 - 30 + 10x \\ -7 + 28x &= 25x - 10 + 5 \\ 28x - 25x &= -5 + 7 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{3(1-x)}{4} - \frac{5(2x+7)}{3} = \frac{9(3-2x)}{8} - \frac{4x+5}{6} - x \quad | \cdot 24$$

$$\begin{aligned} 18(1-x) - 40(2x+7) &= 27(3-2x) - 4(4x+5) - 24x \\ 18 - 18x - 80x - 280 &= 81 - 54x - 16x - 20 - 24x \\ -98x - 262 &= 61 - 94x \\ -4x &= 323 \\ x &= -\frac{323}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{4x+13}{2x+1} = 4 - \frac{6x-17}{3x-2}$$

$$\frac{4x+13}{2x+1} = \frac{4(3x-2) - 6x + 17}{3x-2} \quad | \cdot (2x+1)(3x-2)$$

$$\begin{aligned} (3x-2)(4x+13) &= (2x+1)[4(3x-2) - 6x + 17] \\ 12x^2 - 8x + 39x - 26 &= (2x+1)(12x - 8 - 6x + 17) \\ 12x^2 + 31x - 26 &= (2x+1)(6x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x^2 + 31x - 26 &= 12x^2 + 6x + 18x + 9 \\ 31x - 24x &= 35 \\ 7x &= 35 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{x-1} + \frac{7x}{2x-2} = \frac{2(3x+7)}{5x-5} + 3$$

$$\frac{4}{x-1} + \frac{7x}{2(x-1)} = \frac{2(3x+7)}{5(x-1)} + 3 \quad | \cdot 10(x-1)$$

$$\begin{aligned} 40 + 35x &= 4(3x+7) + 30(x-1) \\ 40 + 35x &= 12x + 28 + 30x - 30 \\ -7x &= -42 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{3x-4}{x+1} + \frac{6-x}{x-1} \quad / \cdot (x^2-1)$$

$$2x^2 = (3x-4)(x+1) + (6-x)(x-1)$$

$$\frac{2x^2}{2x} = \frac{3x^2 - 4x - 3x + 4 + 6x - x^2 + 6 - x}{-10}$$

$$\underline{x = 5}$$

$$\frac{x}{1-4x} = \frac{6}{1-16x^2} - \frac{x+2}{1+4x} \quad / \cdot 1-16x^2$$

$$x(1+4x) = 6 - (x+2)(1-4x)$$

$$\begin{aligned} x + 4x^2 &= 6 - x - 2 + 4x^2 + 8x \\ -6x &= 4 \end{aligned}$$

$$\underline{x = -\frac{2}{3}}$$

33-34. ora

1965. XII. 2

$$1, \quad 1 - \frac{1}{9x^2-1} = \frac{3x-2}{3x+1} - \frac{2}{1-3x}$$

$$1 - \frac{1}{9x^2-1} = \frac{3x-2}{3x+1} + \frac{2}{3x-1} \quad / \cdot 9x^2-1$$

$$(9x^2-1) - 1 = (3x-2)(3x-1) + 2(3x+1)$$

$$\frac{9x^2-1-1}{-2} = \frac{9x^2-6x-3x+2}{-3x+4} + \frac{6x+2}{-2}$$

$$3x = 6$$

$$\underline{x = 2}$$

$$2, \quad \frac{1-x}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2(x+2)}{x^2-1} \quad / \cdot (x+1)^2(x-1)$$

$$(1-x)(x-1) = (x+1)^2 - 2(x+2)(x+1)$$

$$x - x^2 - 1 + x = x^2 + 2x + 1 - 2(x^2 + 2x + x + 2)$$

$$\frac{2x - x^2 - 1}{2x + 3x} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 4x - 2x - 4}{-2}$$

$$6x = -2$$

$$\underline{x = -\frac{1}{3}}$$

$$3, \quad 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{x}}} = \frac{x-1}{3x+2} + 1$$

$$2 - \frac{1}{\frac{3x-2}{x}} = \frac{x-1}{3x+2} + 1$$

$$2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2x-1}} = \frac{x-1}{3x+2} + 1$$

$$2 - \frac{1}{\frac{x(3x-2)}{x(2x-1)}} = \frac{x-1}{3x+2} + 1$$

$$2 - \frac{1}{\frac{2 \cdot \frac{2x-1}{x} - 1}{2x-1}} = \frac{x-1}{3x+2} + 1$$

$$2 - \frac{1}{\frac{3x-2}{2x-1}} = \frac{x-1}{3x+2} + 1$$

$$2 - \frac{1}{\frac{\frac{4x-2-x}{2x-1}}{x}} = \frac{x-1}{3x+2} + 1$$

$$\frac{2 \cdot \frac{3x-2}{2x-1} - 1}{\frac{3x-2}{2x-1}} = \frac{x-1+3x+2}{3x+2}$$

$$\frac{\frac{6x-4-2x+1}{2x-1}}{\frac{3x-2}{2x-1}} = \frac{4x+1}{3x+2}$$

$$\frac{4x-3}{3x-2} = \frac{4x+1}{3x+2} \quad / \cdot (3x-2)(3x+2)$$

$$\frac{\frac{4x-3}{2x-1}}{\frac{3x-2}{2x-1}} = \frac{4x+1}{3x+2}$$

$$\begin{aligned} (4x-3)(3x+2) &= (4x+1)(3x-2) \\ 12x^2 - 9x + 8x - 6 &= 12x^2 + 3x - 8x - 2 \\ -x - 6 &= -5x - 2 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{(4x-3)(2x-1)}{(2x-1)(3x-2)} = \frac{4x+1}{3x+2}$$

1965.XII.2.

34. Hóví feladat

$$1, \quad x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{x - \frac{x}{4}}{3} = 2 \quad / \cdot 12$$

$$x = 2$$

$$12x - 3\left(1 - \frac{3x}{2}\right) - 4\left(x - \frac{x}{4}\right) = 24$$

$$12x - 3 \frac{2-3x}{2} - 4 \frac{4x-x}{4} = 24 \quad / \cdot 4$$

$$48x - 6(2-3x) - 4(4x-x) = 96$$

$$48x - 6 \cdot 2 + 18x - 16x + 4x = 96$$

$$54x = 108$$

$$x = 2$$

1,

$$x - \frac{39}{10} = \frac{3}{4}x - \frac{2 + \frac{x}{2}}{5} \quad | \cdot 20$$

$$x = 10$$

$$20x - 78 = 15x - 4\left(2 + \frac{x}{2}\right)$$

$$20x - 78 = 15x - 8 - 2x$$

$$20x - 13x = 78 - 8$$

$$7x = 70$$

$$\underline{x = 10}$$

3,

$$3x + \frac{1 - \frac{x}{2}}{3} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{4} - 23 = 0 \quad | \cdot 12$$

$$x = 8$$

$$36x + 4\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 3\left(2 - \frac{x}{4}\right) - 23 \cdot 12 = 0$$

$$\begin{array}{rcll} 36x + 4 - 2x & - 6 + \frac{3x}{4} & = 23 \cdot 12 & | \cdot 4 \\ \underline{144x + 16 - 8x} & - 24 + 3x & = 92 \cdot 12 & \\ 139x & & = 92 \cdot 12 + 8 & \\ 139x & & = 1112 & \\ \underline{x} & & = 8 & \end{array}$$

4,

$$(x-1)(x+3) - \frac{x-2}{3} = (x-2)^2 + \frac{3x-9}{2} - 5 \quad | \cdot 6 \quad x = -1$$

$$6(x-1)(x+3) - 2(x-2) = 6(x-2)^2 + 3(3x-9) - 30$$

$$6(x^2 - x + 3x - 3) - 2(x-2) = 6(x^2 - 4x + 4) + 3(3x-9) - 30$$

$$\begin{array}{rcll} \underline{6x^2 + 12x - 18} & - 2x + 4 & = \underline{6x^2 - 24x + 24} & + 9x - 27 - 30 \\ 10x + 15x & & = -33 + 14 & \\ 25x & & = -19 & \end{array}$$

$$\underline{x = -\frac{19}{25}}$$

Paraméteres (belügyíthható) egyenletek

Azokat az egyenleteket, amelyekben belüsrészek (paraméterek) is vannak, paraméteres egyenleteknek nevezzük.

$$\frac{x-a}{x+1} = a+3 \quad x \neq -1 \quad | \cdot (x+1)$$

a — változó szám, paraméter mindig a jobb oldalra v.

$$\frac{(x-a)}{x+1} \cdot (x+1) = (a+3)(x+1)$$

A megoldhatóságot meg kell vizálni

$$x-a = ax+3x+a+3$$

$$x-ax-3x = a+a+3$$

$$-2x-ax = 2a+3$$

$$-x(2+a) = 2a+3$$

$$-x = \frac{2a+3}{a+2} \quad | : (-1)$$

$$x = -\frac{2a+3}{a+2} \quad a \neq -2$$

$$2.) \quad (6x+a)-(x+2b) = 3(x+a) - 2(x+2b)$$

$$6x+a-x-2b = 3x+3a-2x-4b$$

$$5x+a-2b = x+3a-4b$$

$$5x-x = 3a-4b-a+2b$$

$$4x = 2a-2b$$

$$x = \frac{2a-2b}{4}$$

$$x = \frac{a-b}{2}$$

$$3.) \quad (3x-a)(x+b) = (2x+a)(2x-a) - x(x-2a)$$

$$3x^2-ax+3xb-ab = 4x^2-a^2-x^2+2ax$$

$$3x^2-ax-ab+3bx-2ax = 3x^2-a^2+2ax$$

$$-ax-(ab)+3bx-2ax = -a^2+ab$$

$$-3ax+3bx = -a^2+ab \quad a \neq b$$

$$-3x(a-b) = -a(a+b)$$

$$-3x = \frac{-a(a-b)}{a-b}$$

$$-3x = -a$$

$$x = \frac{a}{3}$$

$$4.) \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \quad | \cdot ab$$

$$bx+ax=ab \quad a \neq -b$$

$$x(b+a)=ab$$

$$x = \frac{ab}{b+a}$$

$$5. \quad \frac{x+a}{a} - \frac{x+b}{b} = a-b \quad | \cdot ab$$

$$b(x+a) - a(x+b) = ab(a-b)$$

$$bx + ba - ax - ab = a^2b - ab^2$$

$$bx - ax = a^2b - ab^2$$

$$x(b-a) = a^2b - ab^2$$

$$x = \frac{a^2b - ab^2}{b-a}$$

$$x = \frac{ab(a-b)}{(a-b)}$$

$$x = -ab$$

$$a \neq b$$

34. Hariri feladat

1965.XII.2

$$\frac{2x-a}{x+a} + \frac{2x-b}{x+b} = 4 \quad | \cdot (x+a)(x+b) \quad \frac{a+3b}{x} - a = b - \frac{a-b}{x} \quad | \cdot x$$

$$(2x-a)(x+b) + (2x-b)(x+a) = 4(x+a)(x+b)$$

$$2x^2 + 2x^2 - ax + 2bx - ab - bx - ab = 4x^2 + 4ax + 4bx + 4ab$$

$$4x^2 + ax + bx - 2ab = 4x^2 + 4ax + 4bx + 4ab$$

$$bx + ax - 4ax - 4bx = 2ab + 4ab$$

$$x(b+a-4a-4b) = 2ab + 4ab$$

$$x = \frac{2(ab+2ab)}{-3a-3b} = \left(x = \frac{6ab}{-3a-3b} \right) = -\frac{2ab}{a+b}$$

$$a+3b-ax = bx - a+b$$

$$-ax - bx = -2a - 2b$$

$$ax + bx = 2a + 2b$$

$$x = \frac{2(a+b)}{a+b}$$

$$x = 2$$

$$\frac{x+b}{x-a} - \frac{x-b}{x+a} = \frac{(a+b)^2}{x^2-a^2} \quad | \cdot (x^2-a^2)$$

$$(x+b)(x+a) - (x-b)(x-a) = (a+b)^2$$

$$x^2 + bx + ax + ab - x^2 + bx + ax - ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2ax + 2bx = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x = \frac{(a+b)^2}{2(a+b)}$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{2x} = \frac{2x+a}{2a} - \frac{a}{x} \quad | \cdot 2ax$$

$$2x^2 - a^2 = 2x^2 + ax - 2a^2$$

$$2x^2 - 2x^2 - ax = a^2 - 2a^2$$

$$-ax = a^2 - 2a^2$$

$$x = \frac{a(a-2a)}{-a}$$

$$x = a$$

$$\frac{x}{a-b} - \frac{x}{a+b} = \frac{4ab^2}{a^2-b^2} \quad | \cdot (a^2-b^2)$$

$$x(a+b) - x(a-b) = 4ab^2$$

$$xa + xb - xa + xb = 4ab^2$$

$$2xb = 4ab^2 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$xb = 2ab^2$$

$$x = 2ab$$

$$\frac{x+a}{2} - \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2} \quad | \cdot 2(x+a)$$

$$(x+a)^2 - 4 = x^2 - a^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 - 4 = x^2 - a^2$$

$$2ax = 4 - 2a^2$$

$$x = \frac{2(2-a^2)}{2a}$$

$$x = \frac{2-a^2}{a}$$

$$x = \frac{2}{a} - a$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{x+a}{b-a} &= \frac{bx}{a+b} \quad | \cdot b \cdot a^2 \\
 x(b^2 - a^2) + a(b+a) &= bx(b-a) \quad a \neq b \\
 x(b^2 - xa^2) + ab + a^2 &= b^2x - bxa \quad a \neq -b \\
 x(b^2 - xa^2 - b^2 + bxa) &= -ab - a^2 \\
 x(b^2 - a^2 - b^2 + ba) &= -ab - a^2 \\
 x(b - a^2) &= -ab - a^2 \\
 -xa^2 + xba &= -ab - a^2 \\
 -x(a^2 - ab) &= -ab - a^2 \\
 -x &= \frac{-ab - a^2}{-ab + a^2} \\
 -x &= \frac{-a(b+a)}{-a(b-a)} \\
 x &= \frac{a+b}{b-a}
 \end{aligned}$$

35. Hazi feladat

$$\begin{aligned}
 1. \quad (p+qx):(r-sx) &= (p-q):(r-s) \\
 \frac{p+qx}{r-sx} &= \frac{p-q}{r-s} \quad | \cdot (r-sx)(r-s) \\
 (r-s)(p+qx) &= (p-q)(r-sx) \\
 rp - sp + rqx - sqx &= pr - qr - psx + qsx \\
 rqx - sqx - spx + spr &= -rq + sp \\
 x &= \frac{spr - rq}{sr - 2sq + rq}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{a+x}{3} - 2 &= \frac{x-3}{a} \quad | \cdot 3a \\
 a^2 + ax - 6a &= 3x - 9 \\
 ax - 3x &= 6a - a^2 - 9 \\
 x(a-3) &= -(a-3)(a-3) \\
 x &= -a+3 \\
 x &= 3-a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \frac{x-a}{x+1} - 2 &= a \quad | \cdot x+1 \\
 x-a-2(x+1) &= a(x+1) \\
 x-a-2x-2 &= ax+a \\
 x-2x-ax &= a+a+2 \\
 -x(1+a) &= 2(1+a) \\
 -x &= \frac{2(1+a)}{(1+a)} \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

Előfokú költséreltlenű egyenletrendszer megoldása

$$ax + by = c \quad - \text{általános alak.}$$

a, b, c ismert számok.

x, y ismeretlen számok

Ahol az ismeretlenek száma több mint az egyenleteknek a száma - határozatlan egyenletrendszert kapunk. Az ilyennek sok megoldása van, mert az egyiket számíthat ki csak.

$$4x + 3y = 20$$

$$3y = 20 - 4x$$

$$\times 2 \quad 6$$

$$y = \frac{20 - 4x}{3}$$

$$y \quad 4 \quad -\frac{4}{3}$$

$$y = \frac{20 - 4 \cdot 2}{3}$$

x - független változó

$$y = \frac{12}{3} = 4$$

y - függő változó

Egyenletrendszer, ha több egyenlellől kívánjuk, hogy egyszerre teljesüljenek, így két... több ismeretlenű egyenletrendszerrel beszélünk.

Egyenletrendszer megoldani annyit jelent, mint meghatározni az ismeretleneknek azon értékeit, melyek mind az összes egyenletet kielégítik.

Előfokú költséreltlenű egyenletrendszert ahol két előfokú költséreltlenű egyenlet.

Általános alakja:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ism.

$$a_2x + b_2y = c_2$$

x, y ismeretlen.

$c_1 = c_2 = 0$ - az egyenletrendszer homogén

$c_1 = c_2 \neq 0$ - inhomogén

$$a_{12} \quad b_{12}$$

az ismeretlen együtthatói

$$c_1 \quad c_2$$

abszolút tagok

$$1.) \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \text{egy megoldás van} \quad a_2 \neq 0 \quad b_2 \neq 0$$

$$2.) \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = c_1 : c_2 \quad \text{végtelen sok megoldás van}$$

$$3.) \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq c_1 : c_2 \quad \text{az egyenletrendszernek nincs megoldása.}$$

(2. Az egyik egyenlet a másik többszöröse)

$$1.) \begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & 20 \\ 3x - 2y & = & -2 \end{array} \quad \frac{4}{3} \neq \frac{3}{-2} \quad 2.) \begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & 20 \\ 8x + 6y & = & 40 \end{array} \quad \frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{20}{40}$$

egy megoldás végtelen megoldás

$$3.) \begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & 20 \\ 8x + 6y & = & 28 \end{array} \quad \frac{4}{8} = \frac{3}{6} \neq \frac{20}{28} \quad \text{nincs megoldása.}$$

Az egyenletrendszerek megoldása:

- I. Helyettesítő módszer
- II. Összehasonlító módszer
- III. Egyenlő együtthatók módszere
- IV. Grafikusan
- V. Determinánsok segítségével.

I. Helyettesítő módszer:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 3 \rightarrow x = 3 + 2y \\ 4x + 3y & = & 23 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x & = & 3 + 2 \cdot 1 \\ x & = & 3 + 2 \\ x & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4(3 + 2y) + 3y & = & 23 \\ 12 + 8y + 3y & = & 23 \\ 12 + 11y & = & 23 \\ 11y & = & 23 - 12 \\ 11y & = & 11 \\ y & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 5 - 2 \cdot 1 & = & 3 \\ 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & = & 23 \\ 5 - 2 & = & 3 \\ 20 + 3 & = & 23 \\ 3 & = & 3 \\ 23 & = & 23 \end{array} \quad \frac{1}{4} \neq \frac{-2}{3} \quad \frac{3}{23}$$

egy megoldás

II. Összehasonlító módszer:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ 2x + 5y & = & 11 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2y \\ x & = & \frac{11 - 5y}{2} \end{array}$$

Mindkét egyenletből kifejezzük x-et (y = 1).

$$\begin{array}{rcl} \frac{11 - 5y}{2} & = & 1 + 2y \quad / \cdot 2 \\ 11 - 5y & = & 2 + 4y \\ -5y - 4y & = & 2 - 11 \\ -9y & = & -9 \quad / \cdot (-1) \\ y & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2 \cdot 1 \\ x & = & 1 + 2 \\ x & = & 3 \end{array}$$

a kifejezést egyenlővé tesszük.

III. Az egyenlő együlthaltok módszere:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 5 \\ 5x - y & = & 2 \end{array} \quad | + \quad \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 5 \\ y & = & 5 - 4 \\ y & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 7x + 0 & = & 14 \\ x & = & 2 \end{array}$$

Mindkét egyenletben valamely ismeretlen együlthaltóját ugyanarra a számmal (illetéssel) tegyék:
Összeadás után 1 ismeretlenü egyenletet kapunk.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 2 \\ 9x - 4y & = & 26 \end{array} \quad | \cdot 2 \quad \begin{array}{rcl} 6 + 2y & = & 2 \\ y & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6x + 4y & = & 4 \\ 9x - 4y & = & 26 \\ 15x & = & 30 \\ x & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & \dots & 1.3 \\ 3x & \dots & 1.2 \end{array}$$

37.óra.

1965. XII. 1.

IV. Grafikus megoldás:

Oldj. meg graf. a kör egyek:

$$\begin{array}{rcl} x - y + 1 & = & 0 \\ 2x - y - 2 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} y & = & x + 1 \\ y & = & 2x - 2 \end{array}$$

$$y = x + 1$$

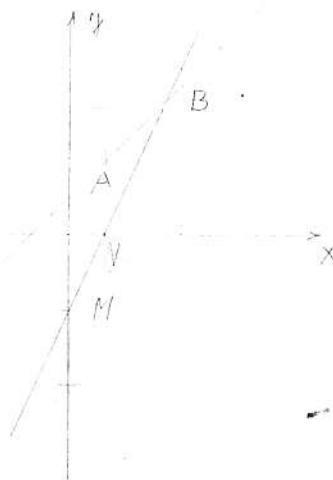
x	1	3
y	2	4

A (1; 2)
B (3; 4)

$$y = 2x - 2$$

x	0	1
y	-2	0

M (0; -2)
N (1; 0)



Ka 2 egyenesnek 1 közös pontja van; az egyenletrendszernek 1 megoldása van.

Ka 2 egyenes párhuzamos, az egyenletnek nincs megold.

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x = 1 \rightarrow y = 2x + 3$$

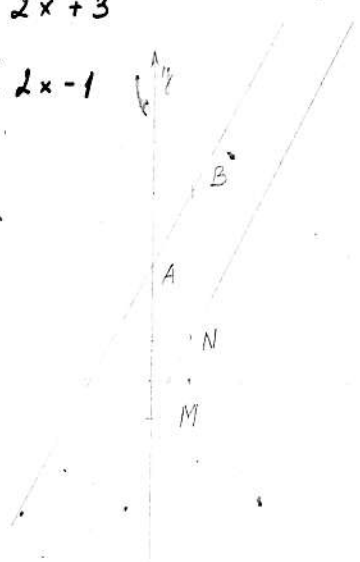
$$2x - y - 1 = 0 \rightarrow y = 2x - 1$$

$$y = 2x + 3$$

$$\begin{array}{cc|c} x & 0 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} A(0;3) \\ B(1;5) \end{array}$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{array}{cc|c} x & 0 & 1 \\ y & -1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} M(0;-1) \\ N(1;1) \end{array}$$



Ka 2 egyenes egybe esik végtelen sok megoldása van.

az egyenletrendszernek

$$2x = y - 3 \rightarrow y = 2x + 3$$

$$2y = 4x + 6 \rightarrow y = 2x + 3$$

$$\begin{array}{cc|c} x & 0 & -1 \\ y & 3 & 1 \end{array}$$

$$K(0;3)$$

$$L(-1;1)$$



Oldjuk meg grafikusan:

$$1, \quad 3x - 2y + 10 = 0$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

$$3, \quad y = x + 2$$

$$2y = 3x$$

$$2, \quad x - 3y + 3 = 0$$

$$4x - y - 5 = 0$$

V. Determinánsok segítségével

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \quad | \cdot b_2 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \quad | \cdot b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y &= c_1 b_2 \quad (1) \\ b_1 a_2 x + b_1 b_2 y &= c_2 b_1 \quad (2) \end{aligned}$$

(1)-(2)

$$a_1 b_2 x - b_1 a_2 x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x(a_1 b_2 - b_1 a_2) = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 b_2 - b_1 a_2 & c_1 b_2 - c_2 b_1 & a_1 c_2 - a_2 c_1 \\ \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right| \\ D & Dx & Dy \end{array}$$

$$x = \frac{Dx}{D}$$

$$y = \frac{Dy}{D}$$

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \quad | \cdot a_2 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \quad | \cdot a_1 \end{aligned}$$

$$a_1 a_2 x + b_1 a_2 y = c_1 a_2 \quad (1)$$

$$a_1 a_2 x + b_2 a_1 y = c_2 a_1 \quad (2)$$

(2)-(1)

$$(a_1 a_2 x + b_1 a_2 y) - (a_1 a_2 x + b_2 a_1 y) = c_1 a_2 - c_2 a_1$$

$$= a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$b_2 a_1 y - b_1 a_2 y = c_2 a_1 - c_1 a_2$$

$$y(b_2 a_1 - b_1 a_2) = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2}$$

D - a rendszer determinánsa

37. Házfi feladat

1965. XI. 14.

1,

$$\begin{array}{ccc} x & 1 & 2 & -2 \\ y & 6,5 & 8 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & 2 & 3 \\ y & 1 & 2,5 \end{array}$$

$$3x - 2y + 10 = 0$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

Nincs megoldása

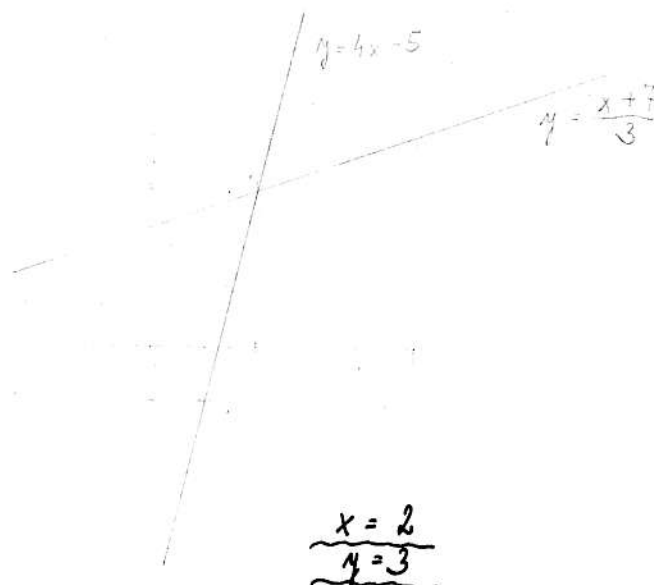
x	2	5
y	3	4
x	1	2
y	-1	3

$$x - 3y + 7 = 0$$

$$4x - y - 5 = 0$$

$$y = \frac{x+7}{3}$$

$$y = 4x - 5$$

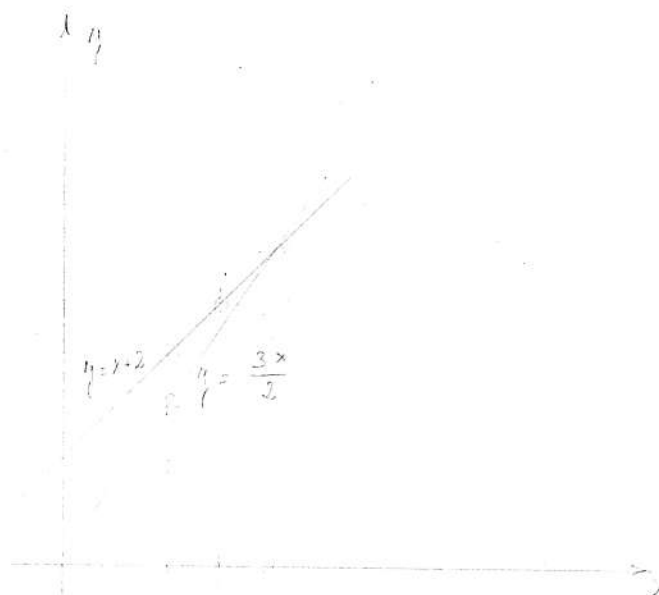


$$\underline{x = 2}$$

$$\underline{y = 3}$$

Egy megoldása van.

x	2	3
y	4	5
x	2	4
y	3	6



$$y = x + 2$$

$$2y = 3x \rightarrow y = \frac{3x}{2}$$

$$\underline{x = 4}$$

$$\underline{y = 6}$$

Egy megoldása van.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{array}{l} 1. \text{ s} \\ 2. \text{ s} \end{array} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = \underline{\underline{1}}$$

másodrendű determ.
a determináns elemi

1. s 2. s fő álló

A fő álló sorozatból kivonjuk a mellék álló sorozatát.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Az első index a sorozatot mutatja
A 2. index az oszlop számát

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} = [(5 \cdot 8 \cdot 10) + (3 \cdot 3 \cdot 2) + (4 \cdot 2 \cdot 1)] - [(4 \cdot 8 \cdot 2) + (3 \cdot 2 \cdot 10) + (5 \cdot 3 \cdot 1)] \\ = (400 + 18 + 8) - (64 + 60 + 15) = 426 - 139 = \underline{\underline{287}}$$

A másodrendű determináns értéket megkapjuk,
ha a fő állókban lévő elemek sorozatából kivonjuk
a mellékállókban lévő elemek sorozatát.

$$\begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 4y = 11 \end{array}$$

A determinánst az ismeretlen
egyenletek mennek

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = \underline{\underline{23}}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 33 = \underline{\underline{69}}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 22 - 45 = \underline{\underline{-23}}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{69}{23} = \underline{\underline{3}}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-23}{23} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\begin{array}{l} 2x - 10y = 3 \\ 4x + 5y = 1 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 40 = \underline{\underline{50}}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{25}{50} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 10 = \underline{\underline{25}}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{50} = \underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = \underline{\underline{-10}}$$

Háromismeretlenű elsőfokú egyenletrendszer

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

x, y, z ismeretlen

$a_{1,2,3}, b_{1,2,3}, c_{1,2,3}$ az ismeretlenek együtthatói

$d_{1,2,3}$ absolut tagok

Leggyakrabban helyettesítő v. determináns módszerrel oldjuk meg.

Helyettesítésként az egyik ismeretlent, és behelyettesítjük a másik egyenletbe.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10 \rightarrow x = 10 - 2y - 3z \\ 4x - y - 5z &= 5 \\ \underline{3x + 3y - 10z} &= 5 \end{aligned}$$

$$1.) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & -10 \end{vmatrix} = 10 + (-30) + 36 - (-2 - 80 - 15) = 16 + 104 = \underline{\underline{120}}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -5 \\ 5 & 3 & -10 \end{vmatrix} = (100 + 45 - 50) - (-15 - 100 - 150) = 95 + 265 = \underline{\underline{360}}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \\ 3 & 5 & -10 \end{vmatrix} = (-50 - 150 + 60) - (45 - 25 - 400) = -140 + 380 = \underline{\underline{240}}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-5 + 30 + 120) - (-30 + 15 + 40) = 145 - 25 = \underline{\underline{120}}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{360}{120} = \underline{\underline{3}}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{240}{120} = \underline{\underline{2}}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{120}{120} = \underline{\underline{1}}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad x + 2y + 3z &= 10 \rightarrow x = 10 - 2y - 3z \\ 4x - y - 5z &= 5 \\ \underline{3x + 3y - 10z} &= 5 \end{aligned}$$

$$40 - 8y - 12z - y - 5z = 5$$

$$\underline{30 - 6y - 9z + 3y - 10z = 5}$$

$$9y + 17z = 35$$

$$\underline{3y + 19z = 25} \quad | \cdot 3$$

$$0 \quad 40z = 40$$

$$\underline{\underline{z = 1}}$$

$$\begin{aligned} 3y &= 25 - 19z & \text{pé.} & \quad 3 + 4 + 3 = 10 \\ 3y &= 6 & & \quad \underline{10 = 10} \\ y &= 2 & & \quad 12 + (-2) - 5 = 5 \\ & & & \quad \underline{5 = 5} \end{aligned}$$

$$x = 10 - 2y - 3z$$

$$x = 10 - 4 - 3$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

$$\begin{aligned} 3 + 6 - 10 &= 5 \\ \underline{5} &= 5 \end{aligned}$$

$$\frac{2x+1}{5} + x = \frac{3y+2}{7} + 2y \quad | \cdot 35$$

$$\frac{3x-1}{4} + y = 2x - \frac{7y+2}{6} \quad | \cdot 12$$

$$7(2x+1) + 35x = 5(3y+2) + 70y$$

$$14x+7 + 35x = 15y+10 + 70y$$

$$3(3x-1) + 12y = 24x - 2(7y+2)$$

$$9x-3 + 12y = 24x - 14y - 4$$

$$49x + 7 = 85y + 10$$

$$9x - 3 + 12y = 24x - 14y - 4$$

$$49x - 85y = 3$$

$$26y - 15x = 7$$

$$(D = \begin{vmatrix} 49 & -85 \\ 26 & -15 \end{vmatrix} = -735 + 2210 = 1475)$$

$$(D_x = \begin{vmatrix} 3 \\ 7 \end{vmatrix})$$

$$49x - 85y = 3$$

$$-15x + 26y = 7$$

$$D = \begin{vmatrix} 49 & -85 \\ -15 & 26 \end{vmatrix} = 1274 - 1275 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -85 \\ 7 & 26 \end{vmatrix} = 78 + 595 = 673$$

$$x = 673$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 49 & 3 \\ -15 & 7 \end{vmatrix} = 343 + 45 = 388$$

$$y = 388$$

$$673 \cdot 49 - 388 \cdot 85 = 3$$

$$388 \cdot 26 - 673 \cdot 15 = 7$$

$$49x - 85y = 3$$

$$26y - 15x = -1$$

Haris feladat

$$3(2x-1) + 5(y+2) = 22$$

$$x=10$$

$$4(x+3) - 10(2y+1) = 22$$

$$y=-9$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{y}{12} = \frac{17}{6}$$

$$x=4$$

$$\frac{5x}{8} - \frac{7y}{6} = \frac{1}{6}$$

$$y=2$$

$$5x - 4y - 2z + 2w = -3$$

$$2x + y + 5z - 4w = 2$$

$$7x + 5y - 3z - w = 0$$

$$5x - 7y + 3z + w = 6$$

$$\frac{2x-4}{10} + \frac{x+3y}{5} = \frac{3(2x+1)}{10}$$

$$x=1$$

$$y=1$$

$$\frac{2(3x+y)}{5} - \frac{2x-y}{2} = \frac{13-2y}{10}$$

$$\frac{5x-4}{2y+5} = \frac{10x-6}{4y+11}$$

$$x=2$$

$$y=-1$$

$$\frac{x+8}{2x+1} = \frac{y+3}{2y+3}$$

Ar egyenlőtlenségek

$$6 \neq 8$$

$$85 \neq 50 + 25$$

Két mennyiség egyenlőlen, ha az egyik több egysé-
get tartalmaz mint a másik.
Jele: $\neq$

$$\begin{matrix} 3 < 5 \\ 6 > 3 \end{matrix}$$

Ha nem egyenlő, az egyik kisebb, mint
a másik.

T₁. Ha van két tetszőszerinti szám, akkor:
 $a - b \rightarrow a > b \quad a = b \quad a < b$

T₂. Ha $a > b$ és $b > c$ akkor $a > c$
 $10 > 8 \quad 8 > 5 \quad 10 > 5$

T₃. $a > b \rightarrow a + c > b + c$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt
a tetszőszerinti számmal hozzáadhatjuk.

$$\begin{array}{lll} 6 > 2 & 6 + 3 > 2 + 3 & 9 > 5 \\ 6 > 2 & 6 + 0 > 2 + 0 & 6 > 2 \\ 6 > 2 & 6 - 10 > 2 - 10 & -4 > -8 \end{array}$$

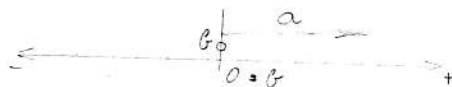
Az egyenlőtlenség egyértelmű, ha a jelek egyirányúak.
pl: $8 > 2 \quad 6 > 3$

T₄. $a > b \quad c > 0$ akkor $a \cdot c > b \cdot c$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal
a pozitív számmal megszorozhatjuk.

$$\begin{array}{lll} 3 > 2 & 1 \cdot 4 & 3 \cdot 4 > 2 \cdot 4 \\ 3 > 2 & 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 > 2 \cdot 0 \\ 3 > 2 & 1 \cdot -2 & -6 > -4 \end{array}$$

$a > 0$ - pozitív szám



$b = 0$

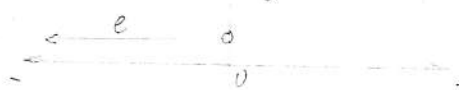
$c < 0$ - negatív szám



$d \geq 0$ - d nem negatív szám.



$e \leq 0$ - e nem pozitív szám



$< x <$

$$\frac{9}{10} \quad \frac{10}{11}$$

$$a = \frac{9}{10}$$

$$b = \frac{10}{11}$$

$$a - b > 0 \rightarrow a > b$$

$$a - b = 0 \rightarrow a = b$$

$$a - b < 0 \rightarrow a < b$$

$$a - b = \frac{9}{10} - \frac{10}{11} = \frac{99 - 100}{110} = -\frac{1}{110} \quad a < b, \text{ mert } -\frac{1}{110} < 0$$

$$a = \frac{6}{7} \quad \frac{6}{7} - \frac{7}{9} = \frac{54 - 49}{63} = \frac{5}{63} > 0 \rightarrow a > b$$

$$b = \frac{7}{9}$$

$$a = -\frac{9}{7} \quad \frac{-45 - (-49)}{35} = \frac{4}{35} \quad a > b$$

$$b = -\frac{7}{5}$$

40. Hari feladat

1965. XII. 1.

$$1, \quad \frac{2x+1}{5} + x = \frac{3y+2}{7} + 2y \quad D = \begin{vmatrix} 49 & -85 \\ -15 & 26 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{array}{r} 49 \cdot 25 \\ 98 \\ \hline 294 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \cdot 15 \\ 425 \\ \hline 1275 \end{array}$$

$$\frac{3x-1}{4} + y = 2x - \frac{7y+2}{6} \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -85 \\ -1 & 26 \end{vmatrix} = 78 - 85 = -7$$

$$\begin{array}{r} 49x + 7 = 85y + 10 \\ 26y - 15x = -7 + 6 \\ 49x - 85y = 3 \\ 26y - 15x = -1 \end{array} \quad D_y = \begin{vmatrix} 49 & 3 \\ -15 & -1 \end{vmatrix} = 45 - 49 = -4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-1} = 7 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$2, \quad \begin{array}{r} 3(2x-1) + 5(y+2) = 22 \\ 4(x+3) - 10(2y+1) = 222 \\ 8x - 3 + 5y + 10 = 22 \\ 4x + 12 - 20y - 10 = 222 \\ 8x + 5y = 15 \\ 4x - 20y = 220 \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -20 \end{vmatrix} = -120 - 20 = -140$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 220 & -20 \end{vmatrix} = -300 - 1100 = -1400$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 15 \\ 4 & 220 \end{vmatrix} = 1320 - 60 = 1260$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1400}{-140} = 10 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1260}{-140} = -9$$

$$3, \quad \begin{array}{r} \frac{2x}{3} + \frac{y}{12} = \frac{17}{6} \quad | \cdot 12 \\ \frac{5x}{8} + \frac{7y}{6} = \frac{1}{6} \quad | \cdot 48 \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 30 & -56 \end{vmatrix} = -448 - 30 = -478$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 34 & 1 \\ 8 & -56 \end{vmatrix} = -1904 - 8 = -1912$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 34 \\ 30 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 1020 = -956$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1912}{-478} = 4 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-956}{-478} = 2$$

$$4.1 \quad \frac{2x-4}{10} + \frac{x+3y}{5} = \frac{3(2x+1)}{10} \quad / \cdot 10 \quad D = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -22 - 10 = \underline{-32}$$

$$\frac{2(3x+7)}{5} - \frac{2x-4}{2} = \frac{13-2y}{10} \quad / \cdot 10 \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 65 = \underline{-32}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x-4 & + & 2x+6y & = & 6x+3 \\ 12x & + & 4y-10x+5y & = & 13-2y \\ \hline -2x & + & 5y & = & 3 \\ 2x & + & 11y & = & 13 \end{array} \quad D_y = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = -26 - 6 = \underline{-32}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-32}{-32} = \underline{1} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-32}{-32} = \underline{1}$$

$$5.1 \quad \frac{5x-4}{2y+5} = \frac{10x-6}{4y+11} \quad D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} = 75 - 12 = \underline{63}$$

$$\frac{x+8}{2x+1} = \frac{y+3}{2y+3} \quad D_x = \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ -21 & 15 \end{vmatrix} = 210 - 84 = \underline{126}$$

$$\begin{array}{l} (5x-4)(4y+11) = (2y+5)(10x-6) \\ (x+8)(2y+3) = (y+3)(2x+1) \\ 20xy - 16y + 55x - 44 = 20xy + 50x - 12y - 30 \\ 2xy + 16y + 3x + 24 = 2xy + 6x + y + 3 \\ \hline 5x - 4y = 14 \\ -3x + 15y = -21 \end{array} \quad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 14 \\ -3 & -21 \end{vmatrix} = -105 + 42 = \underline{-63}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{126}{63} = \underline{2} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-63}{63} = \underline{-1}$$

$$6.1 \quad \begin{array}{rcl} 5x - 4y - 2z + 2u & = & -3 \\ 2x + y + 5z - 4u & = & 2 \\ 7x + 5y - 3z - u & = & 0 \\ 5x - 7y + 3z + u & = & 6 \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 7 & 5 & -3 & -1 \\ 5 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 6 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = (-15 + 60 - 392 + 100) - (250 + 420 + 24 + 14) = (-247 + 160) - (250 + 420 + 24 + 14) = -87 - 708 = \underline{-795}$$

$$D_x = (9 + 60 + 120) - (300 + 252 + 24) = 189 - 576 = -(576 - 189) = \underline{-387}$$

$$D_y = (-30 + 336 + 75) - (360 + 18 - 28) = 381 - 350 = \underline{31}$$

$$D_z = (120 - 588 + 40) - (100 + 48 - 21) = -428 - 127 = \underline{-555}$$

$$D_u = (-90 - 90 + 196) - (-375 + 210 - 84) = 16 + 249 = \underline{265}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{387}{795} = 4,4 \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{31}{795} = -0,3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{555}{795} = 6,4 \quad u = \frac{D_u}{D} = \frac{265}{795} = -3,0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ 7 & 5 & 0 & -1 \\ 5 & -7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 5 & -4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

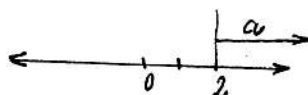
Milyen „a” értéken értendő: ; nincs olyan poz. a

$$\begin{aligned} 2a+3 &> 2(a+2) \\ (2a+3) - 2(a+2) &= 2a+3-2a-4 = \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.) \quad \frac{a^2+b^2}{2} &\geq a \cdot b \quad | \cdot 2 & a=2 & \frac{2^2+3^2}{2} \geq 2 \cdot 3 \\ & & b=3 & \frac{13}{2} \geq 6 \\ & & & \underline{\underline{\frac{13}{2} \geq 6}} \\ & & & \frac{0^2+0^2}{2} \geq 0.0 \end{aligned}$$

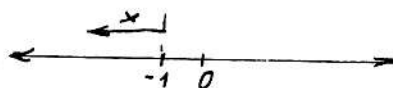
$$\begin{aligned} 2.) \quad \frac{a^2+b^2}{2} - ab &\geq 0 & a \neq b &\rightarrow > \\ & & a = b &\rightarrow = \\ a^2+b^2-2ab &\geq 0 \\ \frac{(a-b)^2}{2} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a-2 &> 2a & | +(-2a) \\ 3a-2-2a &> 0 \\ a-2 &> 0 & | +2 \\ \underline{a} &> \underline{2} \end{aligned}$$



Végül sok megoldás.
Ábrázolni kell.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} &> \frac{1}{6} + x \quad | \cdot 6 \\ 3x-2 &> 1+6x \\ 3x-6x &> 1+2 \\ -3x &> 3 & | \cdot \frac{1}{3} \\ -x &> 1 & | \cdot -1 \\ \underline{x} &\underline{\leq -1} \end{aligned}$$



Az egyenlőtlenség értelme megváltozik, ha mindkét oldalát ugyanazzal a neg. számmal szorozzuk.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \quad ; \quad a > 0 \quad b > 0$$

41. Házi feladat

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad | \cdot ab \quad \underline{\underline{(a-b)^2 \geq 0}}$$

$$\frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} \geq 4 \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 4 \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

1065. XII. 21.

1.

$$\frac{2x+1}{2} > \frac{3x+1}{3} \quad | \cdot 6$$

$$6x+3 > 6x+2$$

$$6x+1 > 6x$$

$$\underline{1 > 0}$$

Ha az ismeretlenek hiunk,
az egyenletet minden ismeretlen
kiegészíti, ha az állítás helyes.

2.

$$\frac{5x-1}{2} < \frac{10x-5}{3} - \frac{5x-1}{6} \quad | \cdot 6$$

$$15x-3 < 20x-10 - 5x+1$$

$$15x-3 < 15x-9 \quad | \cdot (-15x)$$

$$\underline{-3 < -9}$$

Az egyenlőtlenségnek
nincs megoldása, mert
 $-3 \nless -9$.

3.

$$\frac{x+3}{2} > \frac{3}{4} \quad | \cdot 4$$

$$2x+6 > 3$$

$$2x > -3$$

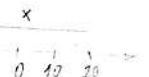
$$\underline{x > -\frac{3}{2}}$$

$$4. \quad \frac{2x-1}{3} < \frac{x+6}{2} \quad | \cdot 6$$

$$4x-2 < 3x+18$$

$$4x < 3x+20$$

$$\underline{x < 20}$$



5.

$$a < b$$

$$c < d$$

$$a+c < b+d$$

Az egyenlőtlenségeket összeadjuk.

$$a+c < b+c$$

$$b+c < b+d \dots T_1$$

$$a < b \quad | +c \dots T_2$$

$$a+c < b+c$$

$$\underline{a+c < b+d}$$

$$c < d \quad | +b$$

$$b+c < d+b$$

6.

$$\text{Ha } a > 0$$

$$b > 0$$

$$c > 0$$

$$d > 0$$

$$a > b$$

$$c > d$$

$$\underline{ac > bd}$$

$$a \cdot c > b \cdot d$$

$$a > b \quad | \cdot c$$

$$ac > bc$$

$$c > d \quad | \cdot b$$

$$bc > bd$$

$$ac > bc$$

$$bc > bd$$

$$\Rightarrow \underline{ac > bd}$$

7.

$$\frac{5(x-1)}{6} - 1 > \frac{2(x+1)}{3} \quad | \cdot 6$$

$$5(x-1) - 6 > 4x+4$$

$$5x-5-6 > 4x+4$$

$$5x-11 > 4x+4$$

$$\underline{x > 15}$$



87

$$2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4} \quad | \cdot 8$$

$$16 + 3x + 3 < 24 - 2x + 2$$

$$3x + 19 < -2x + 26$$

$$5x < 7$$

$$x < \frac{7}{5}$$

~~~~~

42. Hári feladat

1965. XI. 21

$$\frac{2m}{1} + 2 < \frac{3m}{2} + 3 \quad | \cdot 2$$

$$4m + 4 < 3m + 6$$

$$\underline{m < 2}$$

$$\frac{2x+1}{2} < \frac{3x+2}{3} < x+1 \quad | \cdot 6$$

$$\begin{array}{ccc} 6x+3 & < & 6x+4 < 6x+6 & | +(-6x) \\ \underline{3} & < & 4 < 6 \end{array}$$

43. óra

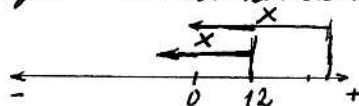
1966. I. 5.

Az egyenlőtlenség rendszer megoldása.

Ha összekapcsolunk 2 egyenlőtlenséget a rendszer megoldása.

$$2x + 8 > 3x - 4 \rightarrow x < 12$$

$$\frac{5x+7}{7} < \frac{2x+7}{3} \rightarrow x < 28$$



$$2x + 8 > 3x - 4$$

$$2x - 3x > -4 - 8$$

$$-x > -12 \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{x < 12}$$

$$\frac{5x+7}{7} < \frac{2x+7}{3} \quad | \cdot 21$$

$$3(5x+7) < 7(2x+7)$$

$$15x+21 < 14x+49$$

$$\underline{x < 28}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x < 12}}$$

$$(2x+1)^2 \leq 4x^2+3$$

$$x-1 < 3x+1$$

$$\underline{4x^2+4x+1 \leq 4x^2+3}$$

$$4x \leq 2$$

$$\underline{x \leq 0,5}$$

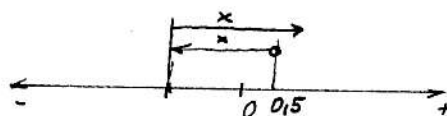
$$x-1 < 3x+1$$

$$x-3x < 1+1$$

$$-2x < 2 \quad | \cdot (-1) \quad \underline{\underline{0,5 \geq x > -1}}$$

$$2x > -2$$

$$\underline{x > -1}$$



$$3) \quad 1 - \frac{3x-88}{7} > 5x$$

$$4x + 5 - \frac{1}{6}(25x + 29,5) < 0$$

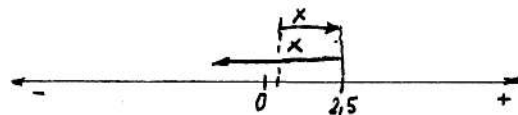
$$1 - \frac{3x-88}{7} > 5x \quad | \cdot 7$$

$$7 - 3x + 88 > 35x$$

$$-3x - 35x > -95 \quad | \cdot -1$$

$$38x < 95$$

$$x < 2,5$$



$$4x + 5 - \frac{1}{6}(25x + 29,5) < 0 \quad | \cdot 6$$

$$24x + 30 - 25x - 29,5 < 0$$

$$-x < -0,5 \quad | \cdot -1$$

$$x > 0,5$$

$$\underline{0,5 < x < 2,5}$$

$$4) \quad \begin{array}{l} 3x-8 < 2(2x-5) \\ 5x+2 > 9(1-x) \end{array}$$

$$3x-8 < 2(2x-5)$$

$$3x-8 < 4x-10$$

$$-x < -2 \quad | \cdot -1$$

$$x > 2$$

$$5x+2 > 9(1-x)$$

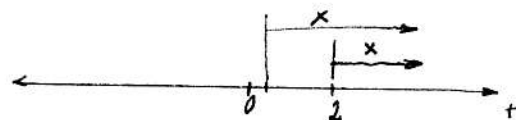
$$5x+2 > 9-9x$$

$$14x > 7$$

$$x > 0,5$$

$$2 < x > 0,5$$

$$\underline{x > 2}$$



$$5) \quad \frac{2(x^2-1)}{5x+2} + \frac{(3x+3)^2}{5} > \frac{(6x-1)^2}{5} - \frac{(5x-2)^2}{5}$$

$$2x^2-2 + 9x^2+18x+9 > 36x^2-12x+1-25x^2+20x-4$$

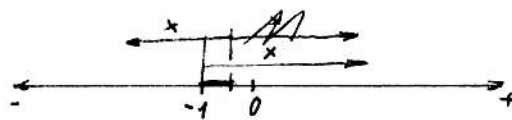
$$11x^2+18x+7 > 11x^2+8x-3$$

$$10x > -10$$

$$x > -1$$

$$5x < -2$$

$$x < -\frac{2}{5}$$



$$\underline{-1 < x < -\frac{2}{5}}$$

$$6) \quad \frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3} - 8 \quad | \cdot 105$$

$$\frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} > \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2}$$

$$15(3x+5) + 21(10-3x) > 35(2x+7) - 840$$

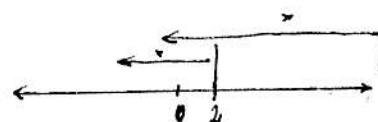
$$45x + 75 + 210 - 63x > 70x + 245 - 840$$

$$-18x + 285 > 70x - 595$$

$$-18x - 70x > -595 - 285$$

$$-88x > -880$$

$$x < 10$$



$$\frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} > \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} \quad | \cdot 30$$

$$70x - 55(x+3) > 6(3x-1) - 15(13-x)$$

$$70x - 55x - 165 > 18x - 6 - 195 + 15x$$

$$15x - 165 > 33x - 201$$

$$15x - 33x > -201 + 165$$

$$-18x > -36$$

$$\underline{x < 2}$$

$$\underline{x < 2}$$

$$\frac{2x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} < 2x$$

$$\frac{2x+15}{9} > \frac{1}{5} \cdot (x-1) + \frac{x}{3}$$

$$2x - 11 + 38 - 4x < 8x$$

$$-2x + 27 < 8x$$

$$-10x < -27 \quad | \cdot -1$$

$$10x > 27$$

$$\underline{x > 2,7}$$

$$\frac{2x+15}{9} > \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3} \quad | \cdot 45$$

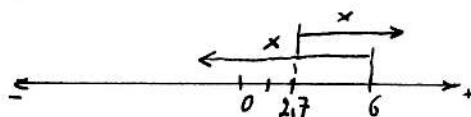
$$10x + 75 > 9x - 9 + 15x$$

$$10x + 75 > 24x - 9$$

$$10x - 24x > -9 - 75$$

$$-14x > -84$$

$$\underline{x < 6}$$



$$\underline{2,7 < x < 6}$$

43. H.f.

$$5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3)$$

$$7x - 3(2x+3) > 2(x-18)$$

$$(x-3)(x-4) < (x+1)(x+2)$$

$$x \cdot (x+1) + x(x+2) > (2x-1)(x+3)$$

$$\frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4$$

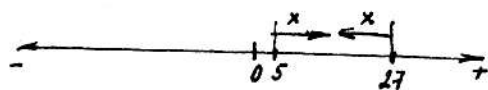
$$\frac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x)$$

1966. 1. 6.

## 43. Háni feladat

$$1, \quad \begin{aligned} 5(x+1) + 6(x+2) &> 9(x+3) \\ 7x - 3(2x+3) &> 2(x-18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x+5 + 6x+12 &> 9x+27 \\ 11x+17 &> 9x+27 \\ 2x &> 10 \\ x &> 5 \end{aligned}$$

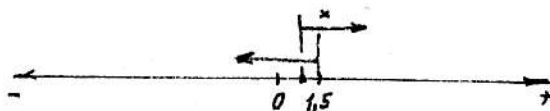


$$\begin{aligned} 7x - 6x - 9 &> 2x - 18.2 \\ x - 9 &> 2x - 36 \\ -x &> -27 \\ x &< 27 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{5 < x < 27}}$$

$$2, \quad \begin{aligned} (x-3)(x-4) &< (x+1)(x+2) \\ x(x+1) + x(x+2) &> (2x-1)(x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4x + 12 &< x^2 + x + 2x + 2 \\ -7x + 12 &< 3x + 2 \\ -10x &< -10 \\ x &> 1 \end{aligned}$$



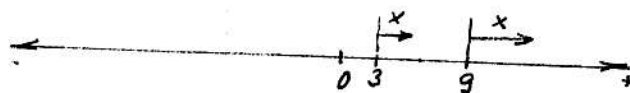
$$\begin{aligned} x^2 + x + x^2 + 2x &> 2x^2 - x + 6x - 3 \\ 3x &> 5x - 3 \\ -2x &> -3 \\ 2x &< 3 \\ x &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{1 < x < 1.5}}$$

$$3, \quad \frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4$$

$$\frac{5x}{3} + 5(4-x) < 2(4-x)$$

$$\begin{aligned} 35 - 5x - 30 &< 6 + 8x - 40 \\ 5 - 5x &< 8x - 34 \\ -13x (29x) &< -39 \\ x &> 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 5x + 60 - 15x &< 24 - 6x \\ 60 - 10x &< 24 - 6x \\ -4x &< -36 \\ x &> 9 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x > 9}}$$

## Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek.

$$|x-2| < 5$$

$$1, x-2 \geq 0 \rightarrow |x-2| = x-2 \geq 0$$

$$0 \leq x-2 < 5$$

$$0 \leq x-2$$

$$x-2 < 5$$

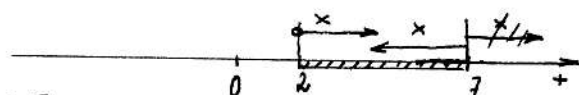
$$0 \leq x-2$$

$$x \geq 2$$

$$x-2 < 5$$

$$x < 7$$

$$\underline{2 \leq x < 7}$$



2.,

$$x-2 < 0 \rightarrow |x-2| = -(x-2)$$

$$-(x-2) < 5$$

$$-x+2 < 5$$

$$-x < 3$$

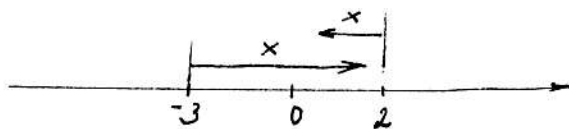
$$x > -3$$

$$-x+2 > 0$$

$$-x > -2$$

$$x < 2$$

$$\underline{2 > x > -3}$$



$$|x+2| < 7$$

$$1, x+2 \geq 0 \rightarrow |x+2| = x+2 \geq 0$$

$$0 \leq x+2 < 7$$

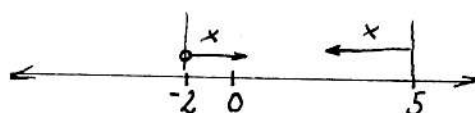
$$x+2 \geq 0$$

$$x+2 < 7$$

$$x \geq -2$$

$$x < 5$$

$$\underline{-2 \leq x < 5}$$



$$2, x+2 < 0 \rightarrow |x+2| = -(x+2) < 0$$

$$-x-2 < 0$$

$$-x < 2$$

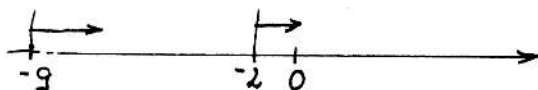
$$x > -2$$

$$-x-2 < 7$$

$$-x < 9$$

$$x > -9$$

$$\underline{x > -2}$$

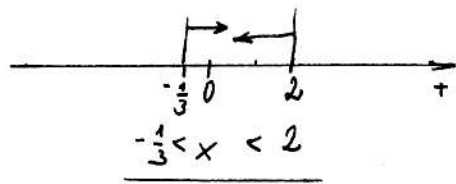


$$\frac{4-2x}{1+3x} > 0$$

$$1, \quad \begin{aligned} 4-2x &> 0 \\ 1+3x &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x &> -4 \\ 2x &< 4 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

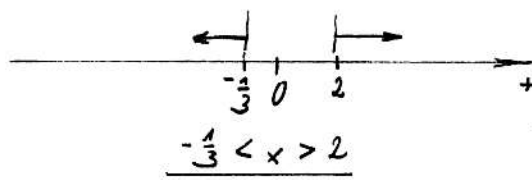
$$\begin{aligned} 3x &> -1 \\ x &> -\frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$2, \quad \begin{aligned} 4-2x &< 0 \\ 1+3x &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x &< -4 \\ 2x &> 4 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &< -1 \\ x &< -\frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$B_2. \quad \frac{4-6}{1+9} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

466. 1. 10.

44. Kézi feladat

$$|2x-3| < \frac{1}{2}$$

$$|x-3| < 5$$

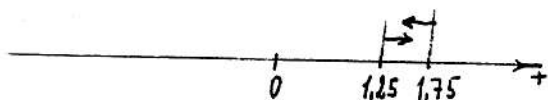
$$\frac{3a+7}{2-6a} > 0$$

$$\frac{5-2a}{8+5a} > 0$$

$$1. \quad |2x-3| < \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |2x-3| &< 0 \\ |2x-3| &= -(2x-3) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3-2x &< \frac{1}{2} \\ -2x &< -3 + \frac{1}{2} \\ 2x &> 2,5 \\ x &> 1,25 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |2x-3| &> 0 \\ |2x-3| &= 2x-3 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-3 &< \frac{1}{2} \\ 2x &< 3,5 \\ x &< 1,75 \end{aligned}$$

$$1,25 < x < 1,75$$

$$2. \quad |x-3| < 5$$

$$\begin{aligned} |x-3| &< 0 \\ |x-3| &= -(x-3) < 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3-x &< 5 \\ -x &< 2 \\ x &> -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x-3| &> 0 \\ |x-3| &= x-3 < 5 \end{aligned}$$

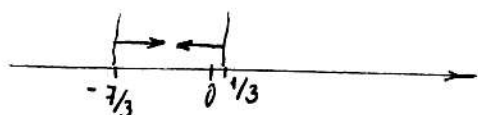
$$\begin{aligned} x-3 &< 5 \\ x &< 8 \end{aligned}$$



$$3. \quad \frac{3a+7}{2-6a} > 0$$

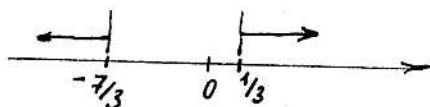
$$\begin{aligned} 3a+7 &> 0 \\ 2-6a &> 0 \\ \hline 3a &> -7 \\ a &> -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6a &> -2 \\ 6a &< 2 \\ a &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3a+7 &< 0 \\ 2-6a &< 0 \\ \hline 3a &< -7 \\ a &< -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

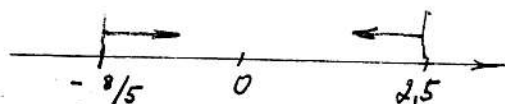
$$\begin{aligned} -6a &< -2 \\ 6a &> 2 \\ a &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$4. \quad \frac{5-2a}{8+5a} > 0$$

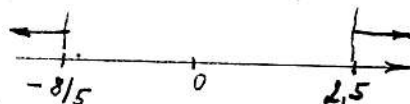
$$\begin{aligned} 5-2a &> 0 \\ 8+5a &> 0 \\ \hline -2a &> -5 \\ a &< 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a &> -8 \\ a &> -\frac{8}{5} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 5-2a &< 0 \\ 8+5a &< 0 \\ \hline -2a &< -5 \\ a &> 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a &< -8 \\ a &< -\frac{8}{5} \end{aligned}$$



45. ora.

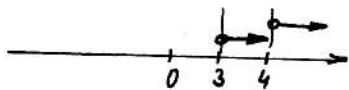
1966. 1. 17

$$1 \leq |x-3| \leq 5$$

$$1 \leq |x-3|$$

$$x-3 > 0 \rightarrow |x-3| = x-3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} x-3 &\geq 0 \\ x-3 &\geq 1 \\ \hline x &\geq 3 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$



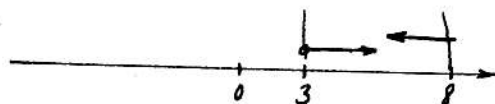
$$\underline{\underline{x \geq 4}}$$

$$\underline{\underline{4 \leq x \leq 8}}$$

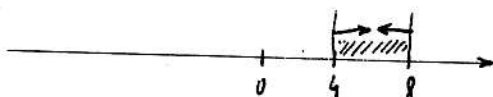
$$|x-3| \leq 5$$

$$x-3 \geq 0 \rightarrow |x-3| = x-3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} x-3 &\geq 0 \\ x-3 &\leq 5 \\ \hline x &\geq 3 \\ x &\leq 8 \end{aligned}$$



$$\underline{\underline{3 \leq x \leq 8}}$$



$$\begin{aligned} 1 \leq |x-3| \leq 5 \\ 1 \leq |5-3| \leq 5 \\ 1 \leq |2| \leq 5 \\ 1 \leq 2 \leq 5 \end{aligned}$$

$$x=5$$

$$\begin{aligned} 1 \leq |x-3| \leq 5 \\ 1 \leq |4-3| \leq 5 \\ 1 \leq 1 \leq 5 \end{aligned}$$

$$x=7$$

$$\begin{aligned} 1 \leq |x-3| \leq 5 \\ 1 \leq |8-3| \leq 5 \\ 1 \leq |5| \leq 5 \\ 1 \leq 5 \leq 5 \end{aligned}$$

$$x=8$$

$$x=4$$

$$\begin{aligned} 1 \leq |4-3| \leq 5 \\ 1 \leq |1| \leq 5 \\ 1 \leq 1 \leq 5 \end{aligned}$$

$$1. \quad x-3 < 0 \rightarrow |x-3| = -(x-3) = 3-x \geq 0$$

$$1 \leq |x-3|$$

$$|x-3| \leq 5$$

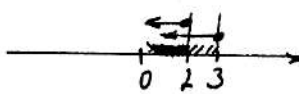
$$3-x \geq 0$$

$$3-x \geq 1$$

$$x \leq 3$$

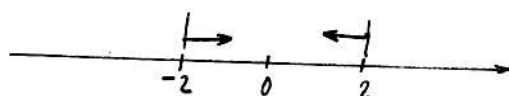
$$-x \geq -2$$

$$x \leq 2$$



$$x \leq 2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

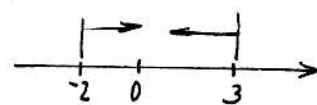


$$3-x \geq 0$$

$$3-x \leq 5$$

$$x \leq 3$$

$$x \geq -2$$



$$-2 \leq x \leq 3$$

$$x = -2$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

$$\frac{x}{2} - 1 < |x| < \frac{x}{2} + 2$$

1966.1.17.

45. Haini feladat

$$1 \leq |-2-3| \leq 5$$

$$1 \leq |2-3| \leq 5$$

$$1 \leq |1-3| \leq 5$$

$$1 \leq |-1-3| \leq 5$$

$$1 \leq |-5| \leq 5$$

$$1 \leq |-1| \leq 5$$

$$1 \leq |-2| \leq 5$$

$$1 \leq |-4| \leq 5$$

$$1 \leq 5 \leq 5$$

$$1 \leq 1 \leq 5$$

$$1 \leq 2 \leq 5$$

$$1 \leq 4 \leq 5$$

$$\frac{x}{2} - 1 < |x| < \frac{x}{2} + 2$$

$$x > 0 \rightarrow |x| = x > 0$$

$$x < 0 \rightarrow |x| = -x > 0$$

$$\frac{x}{2} - 1 < x \quad / \cdot 2$$

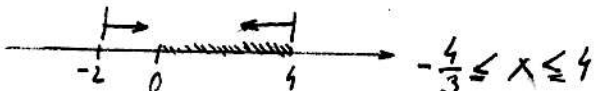
$$x < \frac{x}{2} + 2 \quad / \cdot 2$$

$$x - 2 < 2x$$

$$2x < x + 4$$

$$-x < 2 \rightarrow x > -2$$

$$x < 4 \rightarrow x < 4$$



$$-\frac{4}{3} \leq x \leq 4$$

$$\frac{x}{2} - 1 < -x \quad / \cdot 2$$

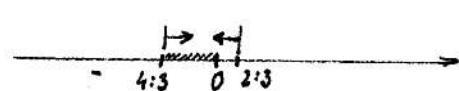
$$-x < \frac{x}{2} + 2 \quad / \cdot 2$$

$$x - 2 < -2x$$

$$-2x < x + 4$$

$$3x < 2 \rightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$-3x < 4 \rightarrow x > -\frac{4}{3}$$



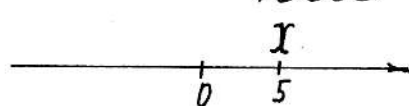
$$1, \quad \frac{2x+1}{2} - \frac{3x-1}{3} > 0 \quad | \cdot 6 \quad 2, \quad \frac{2x+1}{x+2} > 1$$

$$\frac{6x+3-6x+2}{(6)} > 0$$

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$$

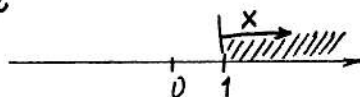
$$\begin{cases} 2x+1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{5}{6} > 0$$



$$2x+1 > x+2$$

$$\frac{x}{1} > 1$$



$$3, \quad \frac{1+r}{1-r} = \frac{p}{q} \quad \text{ismeretlen a } r$$

$$q+r \cdot q = p - p \cdot r$$

$$r \cdot p + r \cdot q = p - q$$

$$r = \frac{p-q}{p+q}$$

5, a, y, ma

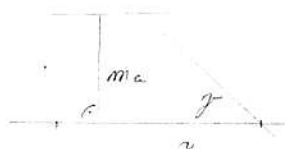
elemzés:

$$4, \quad \frac{x+5}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2} \quad | \cdot 6$$

$$2x+10-3x = 2x-4-3x+9$$

$$10-x = 5-x$$

$$0 \neq -5 \quad \text{minden } m.$$



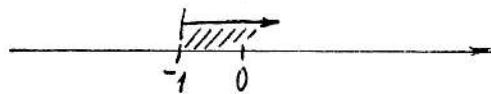
$$6, \quad 2 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} > 3 - \frac{7-3x}{5} \quad | \cdot 10$$

$$20-3+7x+5x+5 > 30-14+6x$$

$$12x+22 > 6x+16$$

$$6x > -6$$

$$\frac{x}{1} > -1$$



$$7, \quad \frac{x-4}{x+2} < 0$$

$$x-4 > 0$$

$$x+2 < 0$$

$$\frac{x}{1} > 4$$

$$\frac{x}{1} < -2$$

$$x-4 < 0$$

$$x+2 > 0$$

$$\frac{x}{1} < 4$$

$$\frac{x}{1} > -2$$

$$8, \quad x^2-4x+5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0$$

$$(x+1) > 0$$

$$(x-5) < 0$$

$$\frac{x}{1} > -1$$

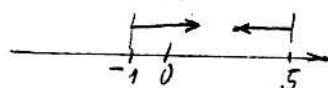
$$\frac{x}{1} < 5$$

$$(x+1) < 0$$

$$(x-5) > 0$$

$$\frac{x}{1} < -1$$

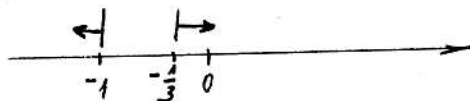
$$\frac{x}{1} > 5$$



$$9, \quad 2x > |x+1|$$

$$x+1 \leq 0 \rightarrow |x+1| = -x-1 \quad x+1 \geq 0 \rightarrow |x+1| = x+1$$

$$\begin{array}{l} 2x > -x-1 \\ x+1 < 0 \\ \hline 3x > -1 \quad x > -\frac{1}{3} \\ x < -1 \quad x < -1 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 2x > x+1 \\ x+1 \geq 0 \\ \hline x > 1 \\ x \geq -1 \end{array}$$



$$10, \quad \frac{2x+5}{2} + \frac{2y-5}{5} = 1 \quad / \cdot 10$$

$$10x + 25 + 4y - 10 = 10$$

$$\begin{array}{l} 10x + 4y = -5 \\ 12x - 17y = 6 \\ \hline y = \frac{-5 - 10x}{4} \end{array}$$

$$12x - 17 \cdot \frac{-5 - 10x}{4} = 6 \quad / \cdot 4$$

$$48x - 17(-5 - 10x) = 24$$

$$48x + 85 + 170x = 24$$

$$218x = -61$$

$$x = -\frac{61}{218}$$

$$\frac{2x-3y}{2} + \frac{3x-4y}{3} = 1 \quad / \cdot 6$$

$$6x - 9y + 6x - 8y = 6$$

$$y = \frac{-5 + \frac{610}{218}}{4}$$

$$y = -\frac{5}{4} + \frac{610}{872}$$

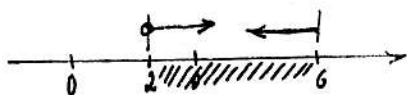
$$y = \frac{-5 \cdot 218 + 610}{872}$$

$$y = \frac{-1090 + 610}{872} = -\frac{480}{872} = -\frac{120}{218} = -\frac{60}{109}$$

$$11, \quad |x-6| \leq 4$$

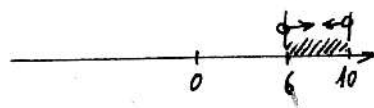
$$x-6 < 0 \rightarrow |x-6| = 6-x$$

$$\begin{array}{l} 6-x \leq 4 \\ x-6 < 0 \\ \hline -x \leq -2 \rightarrow x \geq 2 \\ x < 6 \end{array}$$



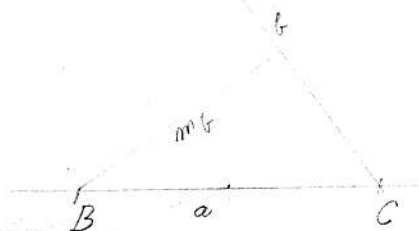
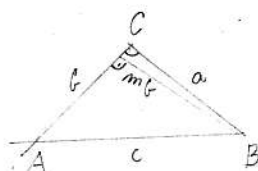
$$x-6 \geq 0 \rightarrow |x-6| = x-6$$

$$\begin{array}{l} x-6 \geq 0 \\ x-6 \leq 4 \\ \hline x \geq 6 \\ x \leq 10 \end{array}$$



$$12, \quad a, mb, \gamma$$

elementos:



13,

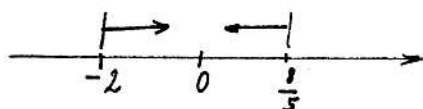
$$\frac{5x-8}{2x+4} < 0$$

$$\frac{5x-8 < 0}{2x+4 > 0}$$

$$\frac{5x < 8}{2x > -4}$$

$$\underline{x < \frac{8}{5}}$$

$$\underline{x > -2}$$

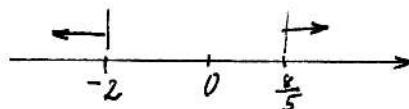


$$\frac{5x-8 > 0}{2x+4 < 0}$$

$$\frac{5x > 8}{2x < -4}$$

$$\underline{x > \frac{8}{5}}$$

$$\underline{x < -2}$$



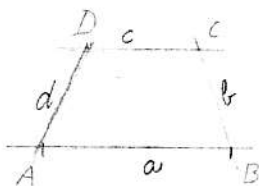
14,

$$a = 8$$

$$b = 4$$

$$c = 6$$

$$d = 5$$



47. ora

1966. 1. 24.

$$\frac{|2x-2|}{2-x} < 1$$

$$|2x-2| < 2-x$$

$$2x-2 \geq 0 \rightarrow |2x-2| = 2x-2$$

$$2x-2 < 0 \rightarrow |2x-2| = 2-2x$$

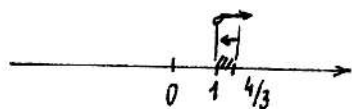
$$\frac{2x-2 \geq 0}{2x-2 < 2-x}$$

$$\underline{2x \geq 2}$$

$$\underline{x \geq 1}$$

$$3x < 4$$

$$\underline{x < \frac{4}{3}}$$



$$\frac{2-2x \geq 0}{2-2x < 2-x}$$

$$\underline{-2x \geq -2}$$

$$\underline{-x < 0}$$

$$\underline{x < 1}$$

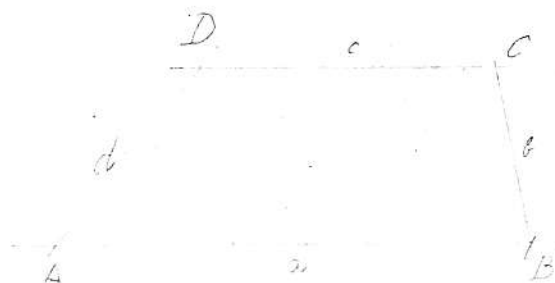
$$\underline{x > 0}$$



$$2, \frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a} - \frac{a(4-a)}{1-a^2} =$$

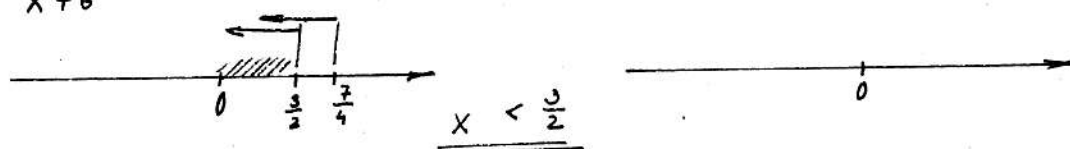
$$\frac{(1+a)^2 - (1-a)^2 - a(4-a)}{1-a^2} = \frac{1+2a+a^2-1+2a-a^2-4a+a^2}{1-a^2} = \frac{a^2}{1-a^2};$$

3, a; b; c; d;



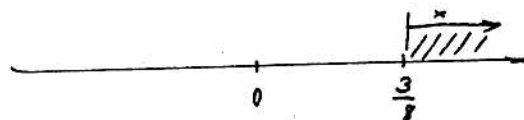
$$4, \frac{3x-2}{x+1} < 1 \quad 3x-2 < x+1 \quad 2x < 3 \quad \underline{x < \frac{3}{2}}$$

$$\frac{5x-1}{x+6} < 1 \quad 5x-1 < x+6 \quad 4x < 7 \quad \underline{x < \frac{7}{4}}$$

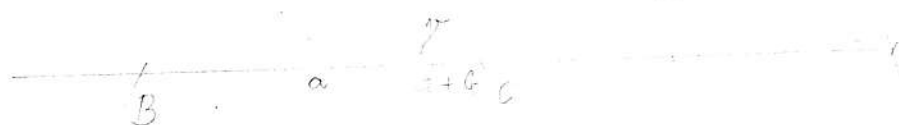


$$5, \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{a^2}{2x}\right)^2 \cdot \frac{3x^2}{(a^2)^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^4}{4x^2} \cdot \frac{3x^2}{a^6} = \frac{6a^4x^2}{12a^6x^2} = \frac{1}{2a^2};$$

$$6, \frac{x-3}{3x-2} < 3 \quad \begin{aligned} x-3 &< 9x-6 \\ -8x &< -3 \\ 8x &> 3 \\ \underline{x &> \frac{3}{8}} \end{aligned}$$



7,



1,

$$4x-3 > 5x-5$$

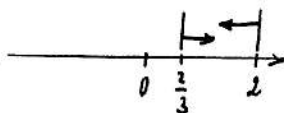
$$2x+4 < 8x$$

$$-x > -2$$

$$-6x < -4$$

$$x < 2$$

$$x > \frac{2}{3}$$



$$|4x-2| \leq 0$$

$$4x-2 \geq 0 \rightarrow |4x-2| = 4x-2$$

$$4x-2 < 0 \rightarrow |-2+4x| = 2-4x$$

2,

$$4x-2 \geq 0 \rightarrow 4x \geq 2 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

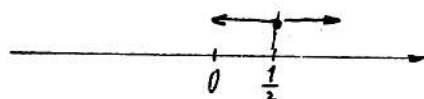
$$4x-2 \leq 0 \rightarrow 4x \leq 2 \rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$



$$4x-2 < 0 \rightarrow 4x < 2 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$2-4x \leq 0 \rightarrow -4x \leq -2 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$



$$3, \quad \frac{7-x}{6} - 1 < \frac{3+4x}{15} - \frac{4}{3}$$

$$5x+15(4-x) < 6(4-x)$$

$$35-5x-30 < 6+8x-40$$

$$5x+60-15x < 24-6x$$

$$-13x < -39$$

$$-4x < -36$$

$$x > 3$$

$$x > 9$$

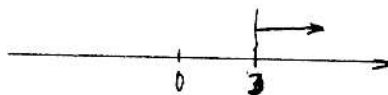


$$\underline{\underline{x > 9}}$$

$$4, \quad \frac{x^2-x-6}{x-3} > x+1 \quad /:(x-3)$$

$$x^2-x-6 > x^2-2x-3$$

$$\underline{\underline{x > 3}}$$



$$5, \quad 6x - 10y = +7$$

$$\frac{4x}{7} = 9 \rightarrow x = \frac{97}{4}$$

$$\left( \begin{array}{l} 6 \cdot \frac{97}{4} - 10 \cdot \frac{9}{4} = -7 \\ 6x - \frac{90}{4} = -7 \end{array} \right)$$

$$6 \cdot \frac{97}{4} - 10y = 7 \quad x = \frac{9.2}{4}$$

$$\frac{547}{4} - 10y = 7 \quad \underline{\underline{x = 4,5}}$$

$$13,57 - 10y = 7$$

$$\underline{\underline{y = 2}}$$

1966. II. 7.

50. óra

### A háromlagú másodfokú kifejezések

$$ax^2 + bx + c$$

$ax^2$  - négyzetes, másodfokú tag

$bx$  - lineáris, elsőfokú tag

$c$  - abszolút tag

$a, b, c$  - állandó számok

$x$  - változó

$$x^2 + bx + c$$

Leggyakrabban tényezőkre bontjuk fel.

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta) \quad \alpha, \beta - \text{ismert számok}$$

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$\underline{\underline{b = \alpha + \beta}}$$

$$\underline{\underline{c = \alpha \cdot \beta}}$$

Abban tudjuk felbontani, ha  $\alpha + \beta = b$ ,  
 $\alpha \cdot \beta = c$ , Leggyakrabban  $a = 1$ .

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

$$ax^2 + bx + c \quad \alpha \quad \beta$$

$$a = 1, b = -8, c = 15$$

$$15 = \begin{array}{l} 1 \cdot 15 \\ 3 \cdot 5 \end{array}$$

$$(-1) \cdot (-15)$$

$$(-3) \cdot (-5) \parallel$$

$$(x-3)(x-5) = x^2 - 3x - 5x + 15 = x^2 - 8x + 15$$

$$c = \alpha \cdot \beta = 15 = (-3) \cdot (-5)$$

$$b = \alpha + \beta = -8 = (-3) + (-5)$$

$$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$$

$$x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2)$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)(3x + 1)$$