Házi feladat

$x^2+10x+25=$ $\qquad$ $+5$ fejből

$=$

Másodfokú egyenlőtlenség megoldása

Az ismeretlen a 2. hatványon fordul elő.

Milyen x esetében lesz pozitív a köv. háromtagú 2. fokú tag. (pozitív)

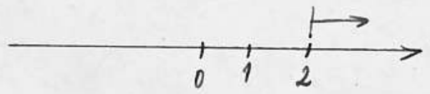
x^2-3x+2

$x^2-3x+2>0$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$

1., $(x-1)>0$ $\qquad$ $(x-2)>0$

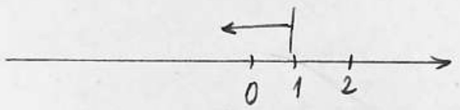
$x>1$ $\qquad$ $x>2$



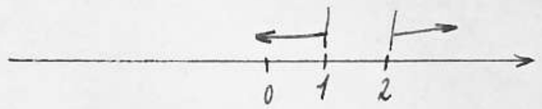
$x>2$

2., $(x-1)<0$ $\qquad$ $(x-2)<0$

$x<1$ $\qquad$ $x<2$ $\qquad$ $x<1$



$2<x<1$



Mikor negatív:

x^2-2x-8

Mikor pozitív:

$4x^2-12x+9>0$ $\quad=(2x-3)^2>0 \longrightarrow x\neq\frac{3}{2}$

$x^2+2x+5<0$ $\quad=(x^2+1)^2+4<0$, nincs megoldása

$x^2+5x+6>0$ $\qquad$ $x^2-4x+4>0$

$2x^2-9x+4>0$ $\qquad$ $x^2-6x+10>0$

$x^2-3x-4\leq 0$

$(x-3)(x-7)<5.(x-3)$

1966. II. 7.

50. Házi feladat

$$x^2+10x+25 = (x+5)(x+5)$$

$$x^2+12x+36 = (x+6)(x+6)$$

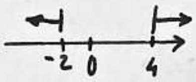
$$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$x^2-7x-18 = (x-9)(x+2)$$

$$x^2+x-20 = (x+5)(x-4)$$

$$x^2+4x-5 = (x+5)(x-1)$$

$x^2-2x-8<0 \qquad (x-4)(x+2)<0$

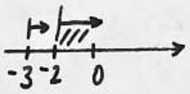


$$\begin{aligned} x-4 &> 0 \\ x+2 &< 0 \\ \hline x &> 4 \\ x &< -2 \end{aligned}$$

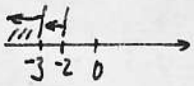
$$\begin{aligned} x-4 &< 0 \\ x+2 &> 0 \\ \hline x &< 4 \\ x &> -2 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{4<x<-2}}$

$x^2+5x+6>0 \qquad (x+3)(x+2)>0$



$$\begin{aligned} (x+3) &> 0 \\ (x+2) &> 0 \\ \hline x &> -3 \\ x &> -2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (x+3) &< 0 \\ (x+2) &< 0 \\ \hline x &< -3 \\ x &< -2 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{x>-2}}$

$2x^2-9x+4>0 \qquad (2x-3)(x-3)-5>0$

$$\begin{aligned} (2x-3)(x-3) &> 5 \\ 2x-3 &> 5:(x-3) \\ \frac{2x-3}{5} &> x-3 \quad /\cdot 5 \\ 2x-3 &> 5x-15 \\ 12 &> 3x \rightarrow \underline{\underline{x<4}} \end{aligned}$$

$x^2-3x-4 \leqq 0 \qquad (x+1)(x-4) \leqq 0$

$$\begin{aligned} x+1 &> 0 \\ x-4 &< 0 \\ \hline x &> -1 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+1 &< 0 \\ x-4 &> 0 \\ \hline x &< -1 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{-1 \leqq x \leqq 4}}$

1966. II. 7.

$(x-3)(x-7) < 5.(x-3)$ $x-7<5$ $\underline{\underline{x<12}}$

$x^2-4x+4 > 0$ $(x-1)(x-3)+1 > 0$

$(x-2)(x-2) > 0 \longrightarrow (x-2)^2 > 0$ $\underline{\underline{x \neq 2}}$

$x^2-6x+10>0$ $(x-3)(x-3)+1 > 0 \rightarrow (x-3)^2+1>0$

$\underline{\underline{(x-3)^2 > -1}}$

L. Károly

51. óra

1966. II. 8.

$x^2+9x-22 < 0$ $(x-11)(x+2) < 0$

közös megoldás $\underline{\underline{-11 < x < 2}}$

<u>Szöveges egyenletek</u>

$\frac{3}{x-12} = 4 \cdot \frac{3}{x} \longrightarrow$ $\underline{\underline{x = 16}}$

$\frac{3x-5}{4} + 2x = 18$

Két egymás után következő egész szám közül a nagyobbiknak a négyzete 51-gyel több a kisebbik négyzeténél, melyek ezek a számok.

$(x+1)^2 = x^2+51$ pl. $25^2=625$ $26^2=676$

$\cancel{x^2}+2x+1 = \cancel{x^2}+51$ 436 24

$2x = 50$

$\underline{\underline{x = 25}}$ $676-625=51$

Egy fiú így szólt a hugához. Mai életkorodnak felével vagyok idősebb nálad. Ha te oly idős leszel, mint én most, éveink számának összege annyival fogja meghaladni a 30 évet, amennyivel én ma fiatalabb vagyok a 30 évnél. Hány évesek a testvérek?

x $x+\frac{x}{2}$

$x+\frac{x}{2}+2x = 30+\left(30-\left[x+\frac{x}{2}\right]\right)$ a lány 12, a fiú 18 éves

$x+\frac{x}{2}+2x = 30+30-x-\frac{x}{2}$ $/ \cdot 2$

$2x+x+4x = 120-2x-x$

$7x = 120-3x$

$10x = 120 \rightarrow \underline{x = 12}$

Egy tört nevezője kettővel nagyobb mint a számlálója. Ha ezen tört 3x-osához adjuk az adott tört fordított értékét, összegül 4-et kapunk. Melyik ez a tört

$$3 \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 4$$

$$\frac{3x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 4$$

$$\frac{3x^2 + (x+2)^2}{x(x+2)} = 4$$

$$\frac{3x^2 + x^2 + 4x + 4}{x(x+2)} = 4$$

$$3x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4x(x+2)$$

$$\cancel{4x^2} + 4x + 4 = \cancel{4x^2} + 8x$$

$$4 = 4x$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Egy diák 40 Kčs-ért írószereket vásárol. Vásárlás után 3x kevesebb pénze volt, mint előtte. Mennyi pénze volt?

$$x - 40 = \frac{x}{3}$$

$$3(x-40) = x$$

$$3x - 120 = x$$

$$2x = 120$$

$$\underline{\underline{x = 60}}$$

Tehát 60 Kčs-ja volt a vásárlás előtt.

Egy gyümölcsösben 150 fa állt. 10-zel több a körtefa, mint a szilbafa kétszerese, míg az almafák száma 20-szal kevesebb, mint a körtefák számának 2x-esét. Mennyi van mindegyik gyümölcsfából.

$$x + 2x + 10 + 2(2x+10) - 20 = 150$$

$$x + 2x + 10 + 4x = 150$$

$$7x = 140$$

$$\underline{x = 20}$$

pr.

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 50 \\ +\ 80 \\ \hline \underline{\underline{150}} \end{array}$$

Tehát $x = 20$ szilbafa, $2x + 10 = 50$ körtefa és $2(2x+10) - 20 = 80$ almafa volt a kertben.

72 három olyan részre bontható, hogy minden köv. rész 7-tel nagyobb mint az előtte levő.

$$x + x+7 + x+14 = 72 \qquad 17+24+31 = 72$$
$$3x = 51 \qquad 72 = 72$$
$$\underline{x = 17}$$

Egy gyalogos reggel 8 ó-kor útnak indult. 10 ó-kor egy lovast küldenek utána, aki óránkint 5 km-rel több utat tesz meg a gyalogosnál és 12 órakor utóléri. Hány km/ó a gyalogos sebessége?

$$x \cdot 4 = 2(x+5) \qquad 4 \cdot 5 = 2(5+5)$$
$$4x = 2x + 10 \qquad \underline{20 = 20}$$
$$2x = 10$$
$$\underline{\underline{x = 5}}$$

A gyalogos óránkint 5 km-t tett meg.

52. óra

1966. II. 9

Egy birtok területe 5490 hold. Rajta épületek, utak, szántóföldek, rétek és erdők vannak. Az utak $1\frac{1}{2}$ a rét $2\frac{1}{4}$-szer az erdők 11-szer a szántóföldek 30-szor akkora területet foglalnak el, mint az épületek, milyen területet foglalnak el ezek egyenkint.

épületek : x

$$x + 1\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{4}x + 11x + 30x = 5490 \text{ ha}$$
$$45\tfrac{3}{4}x = 5490 \text{ ha}$$
$$\frac{183}{4}x = 5490 \text{ ha}$$
$$183x = 4 \cdot 5490 \text{ ha}$$
$$x = \frac{21960}{183}$$
$$\underline{\underline{x = 120 \text{ ha}}}$$

épületek	: 120 ha
utak	: 180 ha
rét	: 270 ha
erdők	: 1320 ha
föld	: 3600 ha
	5490

Egy lakás kifestése egy szobafestőnek 10 órai, egy másiknak 12 órai, egy harmadiknak 15 órai munka. Hány óra alatt festi ki a 3 festő együtt?

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{12} + \frac{x}{15} = 1 \qquad 15x = 60$$
$$\frac{6x+5x+4x}{60} = 1 \qquad \underline{\underline{x = 4 \text{ ó.}}}$$
$$\frac{15x}{60} = 1$$

Állami gazdaságunkban a csépelést 3 gépnél 3 munkabrigád végzi. Az első brigád 24 nap alatt a második brigád 21 nap alatt, a 3. brigád 16 nap alatt végezné el a munkát. Azonban mind a 3 munkabrigád együtt végzi a csépelést olyan formában, hogy a 2. brigád 3 nappal, a 3. brigád 6 nappal később kezdi a munkát. Hány nap alatt végezték el a csépelést?

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{21+3} + \frac{x}{16+6} = 1$$

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{24} + \frac{x}{22} = 1$$

$$\frac{22x + 22x + 24x}{528} = 1$$

$$44x + 24x = 528$$

$$68x = 528$$

$$x = 4$$

$$\frac{x}{24} + \frac{x-3}{21} + \frac{x-6}{16} = 1$$

$$\frac{14x + 16(x-3) + 21(x-6)}{336} = 1$$

$$14x + 16x - 48 + 21x - 126 = 336$$

$$51x = 336 + 174$$

$$x = 10 \text{ nap}$$

53, 54. óra.

Egy községből egy gyalogos indul el az országúton és óránként 6 km-t halad. 4 órával később ugyanabból a községből kerékpáros indul el óránként 12 km-t tesz meg. Mennyi idő múlva és a községtől hány km-re éri el a kerékpáros a gyalogost.

$$6 \cdot x = 12(x-4)$$

$$6x = 12x - 48$$

$$6x = 48$$

$$x = 8$$

4. óra múlva éri utól, a községtől 48 km-re.

pr. $6 \cdot 8 = 4 \cdot 12$

$48 = 48$

3 hordóban összesen 99 liter benzin van. Az elsőben 7 literrel kevesebb mint a másodikban, de 13 literrel több mint a 3.-ban. Hány l benzin van mindegyik hordóban.

2 hord. x

$$x - 7 + x + x + 6 = 99$$

$$3x = \cancel{98}\ 100$$

$$x = 33{,}3\dot{3}\ l$$

$x-7 \quad + x \quad + x - 20 = 99$
$3x = 126$
$x = 42\ l.$

1. $x - 7 = 35$
2. $x = 42$
3. $x - 20 = 22$

99

Két exkavátor homokot rak teherautókra. Mikor mindkettő működik, óránként együtt 29 teherautót raknak meg. Egy napon az egyik exkavátor 8 órán át, a másik 6 órán át dolgozott, és a "kettő" együtt, ezen a napon 200 teherautót rakott meg. Hány teherautót rak meg óránként az egyik és hányat a másik exkavátor?

y, x autó/ó $\quad x + y = 29 \rightarrow x = 29 - y$
$8x + 6y = 200$

$8(29-y) + 6y = 200$
$232 - 8y + 6y = 200$
$-2y = -32$
$y = 16$

$x = 29 - 16 = 13$

pr. $16 \cdot 6 = 96$
$13 \cdot 8 = 104$
200

Az első óránként 16, a 2. 13 autót rak meg.

Melyik az a két szám, melyek összege 897, különbsége 163.?

$x + y = 897 \rightarrow x = 897 - y$
$x - y = 163$

$897 - y - y = 163$
$-2y = 163 - 897$
$-2y = -734$
$y = 367$

$x = 897 - 367$
$x = 530$

Egy szám 2-szerese és egy másik szám 3-szorosa 81.
A második 2-szerese meg az első ötszöröse 120.
Melyik ezek a számok.

$$2x + 3y = 81 \rightarrow 2x = 81 - 3y$$
$$5x + 2y = 120$$

$$\frac{5(81-3y)}{2} + 2y = 120$$

$$5(81-3y) + 4y = 240$$

$$405 - 15y + 4y = 240$$

$$-11y = 240 - 405$$

$$y = \frac{165}{11}$$

$$y = 15$$

$$x = \frac{81-45}{2}$$

$$x = \frac{36}{2}$$

$$x = 18$$

Melyik az a 2 szám, melynek különbsége is, hányadosa is 5.

$$x - y = 5 \rightarrow x = 5 + y$$
$$\frac{x}{y} = 5$$

$$\frac{5+y}{y} = 5$$

$$5 + y = 5y$$

$$5 = 4y$$

$$y = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{25}{4}$$

pr. $x - y = 5$

$$\frac{25}{4} - \frac{5}{4} = 5$$

$$\frac{25}{4} \cdot \frac{4}{5} = 5$$

Két szám közül az első fele, meg a 2. harmada összesen 4-gyel nagyobb, mint a 2 szám összegének $\frac{1}{7}$ része.
Az első negyede, meg a 2. fele 4-gyel nagyobb, mint az 1. és 2. szám különbségének fele. Melyik ez a 2 szám

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 4 = \frac{x+y}{7} \quad / \cdot 42$$
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} - 4 = \frac{x-y}{2} \quad / \cdot 4$$

$$21x + 14y - 168 = 6x + 6y$$
$$x + 2y - 16 = 2x - 2y$$

$$15x + 8y = 168$$
$$x - 4y = -16$$

$$x = 4y - 16$$

$$15(4y - 16) + 8y = 168$$

$$60y - 240 + 8y = 168$$

$$68y = 408$$

$$y = 6$$

$$x = 24 - 16$$

$$x = 8$$

Egy fiú 2× annyi idős mint az öccse, de tavalyelőtt 3× annyi idős volt. Hány évesek most?

$$x = 2y$$
$$x - 2 = 3\cdot(y-2)$$

$$x = 2y$$
$$x - 2 = 3y - 6$$

$$2y - 2 = 3y - 6$$
$$\underline{\underline{y = 4}} \quad \underline{\underline{x = 8}}$$

pr. $2.4 = 8$

$8 - 2 = 3(4-2)$

$6 = 6$

Tehát a fiú 8, öccse 4 éves.

A másodfokú egyenletek

Az olyan egyenleteket, melyekben az ismeretlen 2. hatványon fordul elő, másodfokú egyenleteknek nevezzük.

Általános alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

x - ismeretlen
a, b, c - ismert számok
ax^2 - négyzetes tag
bx - lineáris tag
c - abszolut tag
a - a másodfokú tag együtthatója
b - az elsőfokú tag együtthatója.

$$18x^2 + 9x + 1 = 0$$

$$a = 18 \quad b = 9 \quad c = 1$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad /\cdot 4a \leftarrow$$
$$4a(ax^2 + bx + c) = 4a\cdot 0$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \quad /+(-4ac)$$
$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \quad /\cdot +(b^2) \leftarrow$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad \sqrt{}$$
$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad /+(-b)$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad /\cdot \frac{1}{2a}$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$12x^2 - 17x + 6 = 0 \qquad a = 12 \quad b = -17 \quad c = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4.12.6}}{2.12} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 288}}{24} =$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{1}}{24} = \frac{17 \pm 1}{24}.$$

$$x_1 = \frac{18}{24} = \underline{\frac{3}{4}} \qquad x_2 = \frac{16}{24} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$x_1 = \frac{3}{4}$ $\quad 12x^2 - 17x + 6 = 0$

$$12\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 17\cdot\frac{3}{4} + 6 = 0$$
$$\frac{12\cdot 9}{16} - \frac{17\cdot 3}{4} + 6 = 0$$
$$\frac{27}{4} - \frac{51}{4} + 6 = 0$$
$$-\frac{24}{4} + 6 = 0$$
$$0 = 0$$

$x_2 = \frac{2}{3}$ $\quad 12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 17\frac{2}{3} + 6 = 0$

$$\frac{12\cdot 4}{9} - \frac{34}{3} + 6 = 0$$
$$\frac{16}{3} - \frac{34}{3} + 6 = 0$$
$$-\frac{18}{3} + 6 = 0$$
$$0 = 0$$

1966. II. 10. 54. *Házi feladat*

Oldjuk meg a köv. másodfokú egyenleteket:

$$3x^2 - 15x + 12 = 0 \qquad x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x^2 - 11x + 30 = 0 \qquad x^2 + 8x + 15 = 0$$

1., $3x^2 - 15x + 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4.3.12}}{2\cdot 3} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{6} ; \quad x_1 = \frac{15+9}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad x_2 = \frac{15-9}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

2., $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.-5}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} ; \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -1$$

3., $x^2 - 11x + 30 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4.1.30}}{2.1} = \frac{11 \pm \sqrt{1}}{2} = x_1 = 6 \quad x_2 = 5$$

4., $x^2 + 8x + 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.1.15}}{2.1} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2}.$$

$$x_1 = \frac{-8+2}{2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-8-2}{2} = -5$$

55. óra

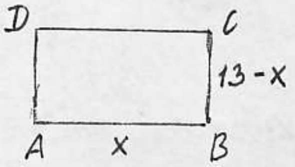
1966. II. 11.

1. A téglalap területe 40 cm², kerülete 26 cm. Milyen hosszúak az oldalai?

$$T = 40\,cm^2 = ab$$
$$K = 26\,cm = 2(a+b)$$

$a = ?$
$b = ?$

a



$$x \cdot (13 - x) = 40$$
$$13x - x^2 = 40 \quad / \cdot (-1)$$
$$x^2 - 13x + 40 = 0$$

$$x^2 - 13x + 40 = (x-5)(x-8)$$
$$x - 5 = 0 \rightarrow \underline{x_1 = 5}$$
$$x - 8 = 0 \rightarrow \underline{x_2 = 8}$$

2. $x^2 + 5x = 104$

$$x^2 + 5x - 104 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -104}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 416}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{441}}{2} =$$
$$= \frac{-5 \pm 21}{2}; \quad \underline{\underline{x_1 = 8}} \quad \underline{\underline{x_2 = -13}}$$

$$5x^2 - 19x + 12 = 0$$

55. Házi feladat. (1).

1966. II. 11.

$$5x^2 - 19x + 12 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 240}}{10} =$$
$$= \frac{19 \pm \sqrt{121}}{10} = \frac{19 \pm 11}{10}$$

$$x_1 = \frac{30}{10} = \underset{\sim}{3} \qquad x_2 = \frac{8}{10} = \underset{\sim}{\frac{4}{5}}$$

$\longrightarrow$

$ax^2+bx+c=0$ $\quad a,b,c \neq 0$ Ez vegyes másodfokú egyenlet.

1. $a=0 \quad b\neq 0 \quad c\neq 0$

$\downarrow$ $bx+c=0$ $\rightarrow$ megold $\quad bx=-c$

$$x=-\frac{c}{b}$$

$6x-2=0$

$6x=2$

$x=\frac{2}{6}$

2. $b=0 \quad a\neq 0 \quad c\neq 0$

$\downarrow$ $ax^2+c=0$

Tiszta másodfokú egyenlet, az ismeretlennek csak a második hatványa fordul elő.

$\rightarrow$ megold: $\quad ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$x^2=-\frac{c}{a}$

$x=\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

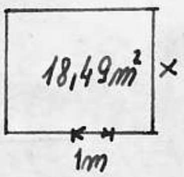
$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x_{1,2}=\pm 2$

Egy négyzet alakú szoba padlózatához 18,49 m^2 parkettát használunk fel. Mekkora hosszúságú szegélyrész szükséges, ha az ajtó 1m széles?



$T_0=a^2$

$T_0=x^2$

$x^2=18,49\,m^2$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{18,49}=\pm 4,3$

$x_1=4,3\,m$

$x_2=-4,3\,m$

$x=4,3\,m$

$h=4\cdot 4,3-1=17,2-1$

$h=16,2$

3. $c=0 \quad b\neq 0 \quad a\neq 0$

$\downarrow$ $ax^2+bx=0$ Abszolut tag nélküli másodfokú egyenlet. Rendszerint szorzattá alakítással oldható meg a legkönnyebben.

$\rightarrow$ megold: $\quad ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

1, $x_1=0$

2, $(ax+b)=0 \rightarrow ax=-b$

$$x_2=-\frac{b}{a}$$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

1, $x=0$

2, $x-3=0$

$x=3$

$K=r^2\pi \quad s=\frac{1}{2}gt^2$

$r=\sqrt{\frac{K}{\pi}} \quad 2s=gt^2$

$t^2=2s/g$

$t=\sqrt{2s/g}$

55. Házi feladat (2.)

1966. II. 11.

$x^2 - 49 = 0 \quad x_1 = \sqrt{49} = \underline{7} \quad x_2 = \underline{-7}$

$x^2 - 169 = 0 \quad x_1 = \sqrt{169} = \underline{13} \quad x_2 = \underline{-13}$

$x^2 - 256 = 0 \quad x_1 = \sqrt{256} = \underline{16} \quad x_2 = \underline{-16}$

$2x^2 - 13 = 5 \quad x_1 = \sqrt{18:2} = \underline{3} \quad x_2 = \underline{-3}$

$7x^2 = 2527 \quad x_1 = \sqrt{2527:7} = \underline{19} \quad x_2 = \underline{-19}$

$19x^2 = 31\,939 \quad x_1 = \sqrt{31939:19} = \underline{41} \quad x_2 = \underline{-41}$

$x^2/9 - 575 = 0 \quad x_1 = \sqrt{575 \cdot 9} \doteq \underline{72} \quad x_2 \doteq \underline{72}$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{27}{64} = 0 \quad x_1 \sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 64}} = \sqrt{\frac{108}{192}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \underline{\frac{3}{4}}; \; x_2 = \underline{-\frac{3}{4}}$

$x^2 + 7x = 0 \quad \underline{x_1 = -7} \quad \underline{x_2 = 0}$

$x^2 - \frac{2}{5}x = 0 \quad \underline{x_1 = 0} \quad \underline{x_2 = \frac{2}{5}}$

$x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \quad \underline{x_1 = 0} \quad \underline{x_2 = \frac{3}{2}}$

$5x^2 - 11x = 0 \quad \underline{x_1 = 0} \quad x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-11}{5} = \underline{\frac{11}{5}}$

$5{,}5x^2 + 140x = 0 \quad \underline{x_1 = 0} \quad x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{140}{5{,}5} \doteq \underline{-25{,}4}$

$\frac{4}{5}y^2 + 8y = 0 \quad \underline{y_1 = 0} \quad y_2 = -\frac{b}{a} = \frac{8}{4/5} = \underline{-10}$

56. óra.

1966. II. 12.

$\frac{5y}{2} = \frac{800}{0{,}2y} \qquad \frac{5y}{2} = \frac{800}{0{,}2y} \quad /\cdot 2y$

$5y = \frac{1600}{0{,}2y} \qquad (5y^2) =$

$1y^2 = 1600 \quad \rightarrow \underline{y = 40}$

$(3r + 1{,}5)(3r - 1{,}5) = 54$

$9r^2 - 2{,}25 = 54$

$9r^2 = 54 + 2{,}25$

$r^2 = \frac{56{,}25}{9}$

$r = \sqrt{\frac{56{,}25}{9}}$

$r_{1,2} = \pm\sqrt{6{,}25}$

$r_{1,2} = \pm 2{,}5$

$$(x+7)(x-9) + (x-7)(x+9) + 76 = 0$$
$$x^2 \underbrace{-2x}_{} - 63 + x^2 \underbrace{+2x}_{} - 63 + 76 = 0$$
$$2x^2 = 50$$
$$x_{12} = \pm\sqrt{\frac{50}{2}}$$
$$x_{12} = \pm 5$$

$$\frac{(25+x)}{(9+x)} = \frac{(13+x)}{(47-x)}$$

$$(47-x)(25+x) = (13+x)(9+x)$$
$$1175 - 25x + 47x - x^2 = 117 + 9x + 13x + x^2$$
$$1175 \underline{+22x} \underline{-x^2} = 117 \underline{+22x} \underline{+x^2}$$

$$-2x^2 = 117 - 1175$$
$$-2x^2 = -1058$$
$$2x^2 = 1058$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{529}$$
$$x_{1,2} = \pm 23$$

I. $3x^2 + 2x - 5 = 0 \rightarrow x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{5}{3}$

II. $\cancel{3}x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x_{12} = \frac{12 \pm \sqrt{144-144}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2}$;

$x_1 = 6 \qquad x_2 = 6$

III. $2x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow x_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9-40}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4} \rightarrow$

Az egyenletnek a valós számok körében nincs megoldá
a gyök komplex szám.

$$x^2 + 16 = 0$$
$$x^2 = -16$$
$$x = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \underset{\sim}{4i}$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \sqrt{b^2 - 4ac} = \text{diskrimináns}$$

A gyökök minősége a $\sqrt{\ }$ alatt álló kifejezés értékétől függ. Ezt a kifejezést a 2. fokú egyenlet diskriminánsának, megkülönböztetőjének nevezzük. Jele: D.

$D = b^2 - 4ac$

1., $D = b^2 - 4ac > 0$ → Ebben az esetben a másodfokú egyenletnek 2 különböző valós gyöke van.

2., $D = b^2 - 4ac = 0$ → A másodfokú egyenletnek két egyforma valós gyöke van, kettős gyök.

3., $D = b^2 - 4ac < 0$ → A másodfokú egyenletnek a valós számok halmazában nincs megoldása. (A gyökök konjugált komplex számok)

1., $4x^2 + 7x - 2 = 0$ $D = b^2 - 4ac = 49 + 32 = 81$ nagyobb mint 0. Két különböző valós gyöke van.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{8};$$

$$x_1 = \frac{-7+9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad x_2 = \frac{-7-9}{8} = -\frac{16}{8} = -2$$

2., $25x^2 - 30x + 9 = 0$ $D = b^2 - 4ac = 900 - 900 = 0$ → kettős gyök van.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{50};$$

$$x_{1,2} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

3., $4x^2 - 20x + 89 = 0$ $D = 400 - 1424 = -1024 < 0$ komplex szám

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 1424}}{8} = \frac{20 \pm \sqrt{-1024}}{8}$$

$$x_1 = \frac{20 + 32i}{8} \qquad x_2 = \frac{20 - 32i}{8}$$

1966. II. 13.

56. Házi feladat

$3x^2+5x-42=0$

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{25+504}}{6}=$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{529}}{6};\qquad x_1=\frac{-5+23}{6}=\underline{\underline{3}}\qquad x_2=-\frac{28}{6}=\underline{\underline{4\frac{2}{3}}}$$

$2x^2-11x+14=0\quad (2;\frac{7}{2})$

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{4}=$$

$$=\frac{11\pm\sqrt{9}}{4};\qquad x_1=\frac{11+3}{4}=\underline{\underline{\frac{7}{2}}};\qquad x_2=\frac{11-3}{4}=\underline{\underline{2}};$$

$3x^2+23x-70=0\quad (\frac{7}{3};-10)$

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-23\pm\sqrt{529+840}}{6}=$$

$$=\frac{-23\pm\sqrt{1369}}{6};\qquad x_1=\frac{-23+37}{6}=\frac{14}{6}=\underline{\underline{\frac{7}{3}}};\qquad x_2=\frac{-23-37}{6}=\underline{\underline{-10}};$$

$2x^2-x=1\quad (1;-\frac{1}{2})$

$$2x^2-x-1=0\qquad x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4};$$

$$x_1=\frac{1+3}{4}=\underline{\underline{1}};\qquad x_2=\frac{1-3}{4}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}};$$

$16x^2+9=24x\quad (\frac{3}{4})$

$$16x^2-24x+9=0\qquad x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{24\pm\sqrt{576-576}}{32}$$

$$x_{12}=\frac{24}{32}=\underline{\underline{\frac{3}{4}}};$$

$4x-5=x^2\quad$ (komlex sz.)

$-x^2+4x-5=0\quad /\cdot(-1)$

$$x^2-4x+5=0\qquad x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$x_1=\frac{4+2i}{2}\qquad x_2=\frac{4-2i}{2}$$

57. óra

1966. II. 13.

$ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$

$D=b^2-4ac=0 \rightarrow$

$$b^2-4ac=0$$
$$b^2=4ac$$
$$b=\sqrt{4ac}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{ac}$$
$$b=2\sqrt{ac}$$

$ax^2+2x\sqrt{ac}+c=0$ | $(\sqrt{a}x+\sqrt{c})^2=ax^2+2x\sqrt{ac}+c$

$(\sqrt{a}x+\sqrt{c})^2=0$

Ha a másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla, akkor az egyenlet többtagú-ja valamely kéttagú kifejezés négyzete.

$25x^2-30x+9=0$ $\qquad$ $b^2-4ac=900-900=0$

$D=0$

$25x^2-30x+9=(5x-3)^2$

$25x^2-30x+9=0$

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{30\pm\sqrt{900-900}}{50}=\frac{3}{5}$$

$(5x-3)(5x-3)=0$ $\qquad$ $5x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{5}$

$16x^2-24x+9=0$ $\qquad$ $b^2-4ac=576-576=0$

$D=0$

$(4x-3)^2=$

$=(4x-3)(4x-3)=0 \rightarrow x_{12}=\frac{3}{4}$

A másodfokú egyenlet normál alakja:

$ax^2+bx+c=0 \,/\cdot\frac{1}{a}$ $\quad a\neq 0$

$\frac{1}{a}(ax^2+bx+c)=0$

$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$ $\qquad$ $\underline{\underline{x^2+px+q=0}}$ - normál alak.

$\frac{a}{a}x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ $\qquad$ A négyzetes tag együtthatója: 1.

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$\frac{b}{a}=p \quad \frac{c}{a}=q$

$6x^2 - 55x + 9 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{6}$

$x^2 - \frac{55}{6}x + \frac{9}{6} = 0$

$x^2 - \frac{55}{6}x + \frac{3}{2} = 0$

$p = -\frac{55}{6} \quad q = \frac{3}{2}$

$5x^2 - 19x + 12 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{5}$

$x^2 - \frac{19}{5}x + \frac{12}{5} = 0$

$x^2 - px + q = 0$

$p = \frac{19}{5} \quad q = \frac{12}{5}$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}$

$x^2 - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

$x^2 = \frac{5}{16} + \frac{1}{4}$

$x^2 = \frac{5+4}{16}$

$x^2 = \frac{9}{16}$

$x = \sqrt{\frac{9}{16}}$

$\underline{x_{12} = \pm\frac{3}{4}}$

1966. II. 14.

57. Házi feladat

$(7+x)(9-x) + (7-x)(9+x) = 76$

$63 \underline{+9x} \underline{-7x} \underline{-x^2} + 63 \underline{-9x} \underline{+7x} \underline{-x^2} = 76$

$-2x^2 + 126 = 76$

$2x^2 = 50$

$x^2 = \sqrt{25}$

$\underline{x_{12} = \pm 5}$

$18x^2 + 11x - 94 = 0$

$x^2 + \frac{11}{18}x - \frac{94}{18} = 0$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 6768}}{32} =$

$= \frac{-11 \pm \sqrt{6889}}{36} = \frac{-11 \pm 83}{36}$

$x_1 = \frac{72}{36} = \frac{8}{4} = 2 \quad x_2 = \frac{-94}{32} = \frac{-47}{18}$

$14x^2 + 9x - 760 = 0$

$x^2 + \frac{9}{14}x - \frac{760}{14} = 0$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 42560}}{28} =$

$= \frac{-9 \pm \sqrt{42641}}{28} = \frac{-9 \pm 208.6}{28}$

$x_1 \doteq \frac{197}{28} \doteq 7 \quad x_2 \doteq -\frac{215}{28} \doteq -7{,}7$

$(x+4)^2 = 100 \qquad (x+4)(x+4) = 100$

$x^2 + 8x + 16 - 100 = 0$
$x^2 + 8x - 84 = 0$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+336}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{400}}{2}$

$x_1 = \frac{-8+20}{2} = \underline{\underline{6}} \qquad x_2 = \frac{-8-20}{2} = -\underline{\underline{14}}$

58. óra 1966. II. 15.

$x^2 + px + q = 0$
$x^2 + px = -q \quad / + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$A^2 - B^2 = (a+b)(A-B)$

A baloldal teljes négyzet lesz.

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = 0$

$\sqrt{4^2} = \left(\sqrt{4}\right)^2$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]}^2 = 0$

$\left[x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]\left[x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] = 0$

$x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$ v. $x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$\underline{\underline{x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$$

A másodfokú normál alakú egyenlet megoldásának képlete.

$x^2 + 18x + 48 = 0$

$x^2 + 8x + 1 = 0 \qquad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{16+1}$

$x_{12} = -4 \pm \sqrt{17}$;

$x_1 = -4 + \sqrt{17} \qquad x_2 = -4 - \sqrt{17}$

$x^2 - 10x + 21 = 0$ $\quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 5 \pm \sqrt{25-21} = 5 \pm \sqrt{4}$

$x_1 = 5 + 2 = 7$ $\quad x_2 = 5 - 2 = 3$

1966. 11. 15.

58. Házi feladat

1., $x^2 + 18x + 48 = 0$ $\quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -9 \pm \sqrt{81 - 48} = -9 \pm \sqrt{33}$

$x_1 = \sqrt{33} - 9$ $\quad x_2 = -\left[9 + \sqrt{33}\right]$

2., $x^2 - 21x + 68 = 0$ $\quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 10{,}5 \pm \sqrt{10{,}5^2 - 68} = 10{,}5 \pm \sqrt{42{,}25}$

$x_1 = \sqrt{42{,}25} + 10{,}5 = 6{,}5 + 10{,}5 = 17$ $\quad x_2 = 10{,}5 - 6{,}5 = 4$

3., $8x^2 - 3 = 6x^2 + 5$ $\quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x_{12} = \pm 2$

4., $\frac{4-x}{x+4} = \frac{x-1}{1+x}$ $\quad 2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x_{12} = \pm 2$

$(4-x)(1+x) = (x-1)(x+4)$

$4 - x + 4x - x^2 = x^2 - x + 4x - 4$

$0 = 2x^2 - 8$

5., $2x \cdot (5x-4) + (1+x) = 0$ $\quad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{20}$;

$10x^2 - 8x + 1 + x = 0$

$10x^2 - 7x + 1 = 0$

$x_1 = \frac{7 + \sqrt{9}}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ $\quad x_2 = \frac{7-3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

6.) $x^2 - \frac{1}{5}x + 1 = 0$

$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} - 1}$

$x_1 = \underset{\sim\sim\sim}{0{,}1 + \sqrt{-0{,}99}}$

$x_2 = \underset{\sim\sim\sim}{0{,}1 - \sqrt{-0{,}99}}$

7.) $\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} = \frac{26}{5} \quad /.20$

$5x^2 + 30x = 104$

$5x^2 + 30x - 104 = 0$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 2080}}{10}$

$x_1 = \frac{-30 + \sqrt{2980}}{10} \doteq -3 + \frac{55}{10} \doteq \underset{\sim\sim}{2{,}5}$

$x_2 = \frac{-30 - \sqrt{2980}}{10} \doteq -3 - \frac{55}{10} = \underset{\sim\sim}{-8{,}5}$

8.) $\frac{7 + 5x}{7 + x} = \frac{7 - x}{x}$

$7x + 5x^2 = 49 - x^2$

$6x^2 + 7x - 49 = 0$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 1176}}{12}$

$x_1 = \frac{-7 + 35}{12} = \underset{\sim\sim}{\frac{7}{3}}$ $\quad x_2 = \frac{-7 - 35}{12} = \frac{-42}{12} = \underset{\sim\sim}{-\frac{21}{6}}$

9.) $\frac{6}{x-1} = \frac{7}{x-3} - \frac{10}{x-2}$

$\frac{6}{x-1} = \frac{7x - 14 - 10x + 30}{(x-3)(x-2)}$

$\frac{6}{x-1} = \frac{16 - 3x}{x^2 - 3x - 2x + 6}$

$\underset{\sim}{6x^2} - \underset{\sim}{30x} + \underset{\sim}{36} = \underset{\sim}{16x} \underset{\sim}{- 3x^2} \underset{\sim}{- 16} \underset{\sim}{+ 3x}$

$9x^2 - 49x + 52 = 0$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{12} = \frac{49 \pm \sqrt{2401 - 1872}}{18}$

$x_{12} = \frac{49 \pm \sqrt{529}}{18}$

$x_1 = \frac{49 + 23}{18} = \frac{72}{18} = \underset{\sim\sim}{4}$ $\quad x_2 = \frac{49 - 23}{18} = \frac{26}{18} = \underset{\sim\sim}{\frac{13}{9}}$

1966. II. 16.

59. óra

$x^2+8x-33=0$ $\qquad x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} = -4\pm\sqrt{16+33}$

$x_1=-4+\sqrt{49}=\underset{\sim}{3} \qquad x_2=-4-\sqrt{49}=\underset{\sim}{-11}$

$D=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ – a gyökjel alatti kifejezés

A másodfokú egyenlet gyökeinek és együtthatóinak összefüggése.

$x_1 \quad x_2$ – gyökök

a, b, c – együtthatók
p, q

$x_1=3$; $x_2=6$ $\qquad x^2-9x+18=0$

$$x_{12}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{9\pm3}{2}$$

$$x_1=\frac{9+3}{2}=\underset{\sim}{6} \qquad x_2=\frac{9-3}{2}=\underset{\sim}{3}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-2b}{2a}=\underline{\underline{-\frac{b}{a}=-p=x_1+x_2}}$$

A gyökök összege egyenlő az első és a másodfokú tag együtthatóinak hányadosának –1 – szeresével.
(az elsőfokú tag együtthatójának –1-szeresével, a normál alakban).

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a\cdot2a}=$$

$$=\frac{b^2-b\sqrt{b^2-4ac}+b\sqrt{b^2-4ac}-\sqrt{(b^2-4ac)(b^2-4ac)}}{4a^2}=\frac{+b^2-\sqrt{(b^2-4ac)^2}}{4a^2}=$$

$$=\frac{+b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\underline{\underline{\frac{c}{a}=q=x_1\cdot x_2}}$$

A két gyök szorzata az állandónak és a másodfokú tag együtthatójának hányadosa.
(A két gyök szorzata = az abszolut taggal, norm. alaknál).

59. Házi feladat

1966. II. 16.

$x_1 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_1 + x_2 = ?\quad (-p)$

$x_1 \cdot x_2 = ?\quad (q)$

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{2p}{2} = \underline{\underline{-p = x_1 + x_2}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$= \frac{p^2}{4} + \underline{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \cdot -\frac{p}{2}} + \underline{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \cdot +\frac{p}{2}} - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] =$$

$$= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \underline{\underline{q = x_1 \cdot x_2}}$$

$\Longrightarrow$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -3 \qquad x_1 + x_2 = 4 + (-3) = 1 = -p \rightarrow p = -1$

$x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot -3 = -12 = q \rightarrow q = -12$

$x^2 + (-x) - 12 = 0$

$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -2 \qquad x_1 + x_2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} = -p \longrightarrow p = \frac{5}{3}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3} \cdot -2 = -\frac{2}{3} = q \longrightarrow q = -\frac{2}{3}$

$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \quad / \cdot 3$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

1.) $x_1 = 2 \qquad x_2 = 5$

2.) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -4$

3.) $x_1 = -4 \qquad x_2 = 7$

4.) $x_1 = \frac{1}{5} \qquad x_2 = -\frac{3}{4}$

ki is számolni!

5.) $x_1 = x_2 = 12$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \qquad x_1 + x_2 = 2 + 5 = 7 = -p \longrightarrow p = -7$

$x_1 \cdot x_2 = 2 . 5 = 10 = q \longrightarrow q = 10$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 10} = 3,5 \pm \sqrt{2,25}$

$x_1 = 3,5 + 1,5 = \underset{\sim}{5} \qquad x_2 = 3,5 - 1,5 = \underset{\sim}{2}$

$x_1 = -3 \quad x_2 = -4 \qquad x_1 + x_2 = -3 - 4 = -7 = -p \longrightarrow p = 7$

$x_1 \cdot x_2 = -3 . -4 = 12 = q \longrightarrow q = 12$

$x^2 + 7x + 12 = 0 \quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 12} = -3,5 \pm \sqrt{0,25}$

$x_1 = -3,5 + 0,5 = \underset{\sim}{-3} \qquad x_2 = -3,5 - 0,5 = \underset{\sim}{-4}$

$x_1 = -4 \quad x_2 = 7 \qquad x_1 + x_2 = -4 + 7 = 3 = -p \longrightarrow p = -3$

$x_1 \cdot x_2 = -4 . 7 = -28 = q \longrightarrow q = -28$

$x^2 - 3x - 28 = 0 \quad x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 28} = 1,5 \pm \sqrt{30,25}$

$x_1 = 1,5 + 5,5 = \underset{\sim}{7} \qquad x_2 = 1,5 - 5,5 = \underset{\sim}{-4}$

$x_1 = \frac{1}{5}; \quad x_2 = -\frac{3}{4} \qquad x_1 + x_2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{11}{20} = -p \longrightarrow p = \frac{11}{20}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{5} \cdot -\frac{3}{4} = -\frac{3}{20} = q \longrightarrow q = -\frac{3}{20}$

$x^2 + \frac{11}{20}x - \frac{3}{20} = 0 \;/ \cdot 20$

$20x^2 + 11x - 3 = 0 \qquad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 240}}{40}$

$x_1 = \frac{-11 + 19}{40} = \frac{8}{40} = \underset{\sim}{\frac{1}{5}} \qquad x_2 = \frac{-11 - 19}{40} = -\frac{30}{40} = \underset{\sim}{-\frac{3}{4}}$

$x_1 = 12 \quad x_2 = 12 \qquad x_1 + x_2 = 12 + 12 = 24 = -q \longrightarrow q = -24$

$x_1 \cdot x_2 = 12 \cdot 12 = 144 = q \longrightarrow q = 144$

$x^2 - 24x + 144 = 0 \longrightarrow (x - 12)^2 = (x - 12)(x - 12) = 0$

$(x - 12) = 0$

$\underline{x_{12} = 12}$

60 - 61. óra 1966. II. 17.

A másodfokú egyenlet gyöktényezői

$ax^2 + bx + c = 0$

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

$\frac{b}{a} = p = -(x_1 + x_2)$

$\frac{c}{a} = q = x_1 . x_2$

$a\left[x^2 - (x_1 + x_2).x + x_1.x_2\right] = 0$

$a\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right] = 0$

$a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = 0$

$a\left[(x - x_1)(x - x_2)\right] = 0$ – A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

Bontsuk fel gyöktényezőinek szorzatára a köv. egyenletet:

$12x^2 + 7x - 12 = 0$

$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{24}$;

$x_1 = \frac{-7 + 25}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ $x_2 = \frac{-7 - 25}{24} = -\frac{32}{24} = -\frac{4}{3}$

$a\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)\right] = 0$

$12\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)\right] = 0$

$\underline{12x^2 + 7x - 12 = 12.\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 0}$

Ha valamely másodfokú egyenlet gyökeit ismerjük, akkor a gyöktényezők szorzatát alkotva felírhatjuk magát a másodfokú egyenletet is.

$x_1 = 8$ $x_2 = \frac{2}{3}$

$x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{16}{3} = 0 \quad /.3$

$3x^2 - 26x + 16 = 0$

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$(x - 8)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$

$x^2 - 8x - \frac{2}{3}x + \frac{16}{3} = 0$

$x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{16}{3} = 0 \quad /.3$

$3x^2 - 26x + 16 = 0$

$\cancel{a}x^2 + px + q = 0 \longrightarrow a = 1$

$x^2 + x.-(x_1 + x_2) + (x_1 . x_2)$

$x^2 - x.x_1 - x.x_2 + x_1 . x_2$

$x(x - x_1) - x_2(x - x_1)$

$\underline{(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q = 0}$

Szöveges feladatok

Melyik az a szám, amelynek 15 szörösét, ha 4-szeresével megszorozzuk 240-et kapunk eredményül?

$$15x \cdot 4x = 240$$
$$60x^2 = 240$$
$$x^2 = 4$$
$$x_{12} = \pm 2$$

Két szám összege 8. Reciprok értékük összege $-\frac{2}{5}$. Melyik ez a 2 szám?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{8-x} = -\frac{2}{5}.$$

$$\frac{(8-x)+x}{x(8-x)} = -\frac{2}{5}$$

$$5(8-x+x) = -2x(8-x)$$
$$40 = -16x + 2x^2$$

$$2x^2 - 16x - 40 = 0$$
$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 4 + \sqrt{16+20} = 10$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -2$$

Valamely szám $\frac{1}{3}$ részének és $\frac{1}{5}$ részének szorzata 540. Melyik ez a szám?

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{5} = 540$$
$$\frac{x^2}{15} = 540$$
$$x^2 = \frac{540}{1} \cdot 15$$
$$x^2 = 8100$$
$$x_{12} = \pm 90$$

Melyik az a szám, melynek négyzete 32-vel kisebb a 12-szeresénél?

$$x^2 + 32 = 12x$$
$$x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 6 \pm \sqrt{36-32}$$

$$x_1 = 8 \qquad x_2 = 4$$

Valamely törtnek nevezője 7-tel nagyobb a számlálójánál. Ha a számlálót 1-gyel a nevezőt pedig 3,mal kisebbítjük, az új tört az előző adva összegül 7/18-at ad. Melyik az eredeti tört?

$$\frac{x}{x+7} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{7}{18} \quad /\cdot 18(x+7)(x+4)$$

$$18x(x+4) + 18(x-1)(x+7) = 126(x+7)(x+4)$$
$$18x^2+72+18x^2+126 = 126(x^2+7x+4x+28)$$
$$36x^2+198 = 126x^2+1386x+1008$$
$$0 = 90x^2+1386x+810$$
$$0 = 30x^2+462x+270$$
$$0 = 5x^2+77x+45$$

$$\frac{x-7}{x} + \frac{x-8}{x-3} = \frac{7}{18}$$

$$(x-7)(x-3)\cdot 18 + (x-8)\cdot 18x = 7x(x-3)$$
$$(x^2-10x+21)\cdot 18 + 18x^2-144x = 7x^2-21x$$
$$18x^2-180x+378 + 18x^2-144x = 7x^2-21x$$
$$29x^2-303x+378 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{303 \pm \sqrt{91809-43848}}{58} = \frac{303 \pm \sqrt{47961}}{58} = \frac{303 \pm 219}{58}$$

$$x_1 = \frac{522}{58} = 9 \qquad x_2 = \frac{84}{58} = \frac{42}{29}$$

Melyik az a szám, mely a nála 4-gyel nagyobb számmal szorozva 140-et ad?

$$x \cdot 4x = 140$$
$$4x^2 = 140$$
$$x^2 = 3$$

$$x \cdot (x+4) = 140$$
$$x^2+4x = 140$$
$$x^2+4x-140 = 0$$

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} = -2 \pm \sqrt{4+140};$$

$$x_1 = 10; \qquad x_2 = -14$$

61. Házi feladat 1966. II. 17.

Melyik az a szám, melynek $\frac{1}{3}$-a éppen annyi, mint fordított értékének 12-szerese.

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$$

$$x^2 = 36$$

$$x_{12} = \pm 6$$ A keresett szám ±6.

Egy vidám majomcsapat 2 csoportra oszlott.
Nyolcadrészük négyzete fákon ugrándozott.
Többi 12 friss levegőn játszott.
Kérdés: a csapatban majom összesen hány volt?

x m.

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

$$\frac{x^2}{64} + 12 = x$$

$$\frac{x^2}{64} = x - 12$$

$$x^2 = 64(x-12)$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 32 \pm \sqrt{32^2 - 768} =$$

$$= 32 \pm \sqrt{1024 - 768} = 32 \pm \sqrt{256} =$$

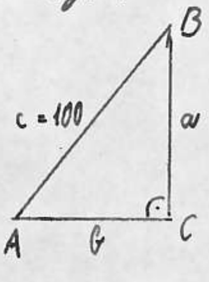
$$= 32 \pm 16 \,;$$

$$\underline{x_1 = 48} \qquad \underline{x_2 = 16}$$

A csapatban 48, 16 majom volt.

1966. II. 18. 64. óra.

Egy derékszögű Δ 2 befogójának aránya 3 : 4. Milyen hosszúak a befogók, ha az átfogó 100 cm?

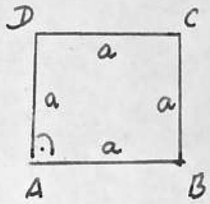


$b = 3x \quad a = 4x$

$\underline{b = 60\,cm} \quad \underline{a = 80\,cm}$

$$(3x)^2 + (4x)^2 = c^2$$
$$9x^2 + 16x^2 = 10000$$
$$25x^2 = 10000$$
$$x^2 = 400$$
$$x = 20$$

Egy négyzet egyik oldalát 2cm-rel növeljük, a mellette levő ugyanannyival csökkentjük. A nyert téglalap területe 21 cm². Mekkora volt a □ oldala.



$T = a^2$

$$(x+2)(x-2) = 21$$
$$x^2 - 4 = 21$$
$$x^2 = 25$$
$$x_{12} = \pm 5$$
$$\underline{x = 5}$$

Egy derékszögű négyszög hosszúsága 15 dm-rel több, mint a szélessége. Mekkorák a □ oldalai, ha területe 34 dm^2.

$a = x$ $\quad$ $x(x+15) = 34$ $\quad$ $(x+2) = 0 \rightarrow x = -2$

$b = x + 15$ $\quad$ $x^2 + 15x - 34 = 0$

$(x-17) = 0 \rightarrow \underset{\sim}{x = 17}$

(1., $(x+2)(x-17) = 0$)

1., $(x-2)(x+17) = 0$ $\quad$ $(x-2) = 0 \rightarrow \underset{\approx}{x = 2}$

$(x+17) = 0 \rightarrow \underset{\sim}{x = -17}$

Tehát $a = 2$ dm, $b = 17$ dm.

Mennyi idő alatt esik le 200 m magasból egy kő?

$S = 200\,m$
$g = 10\,m/s^2$

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{400}{10}}$$

$$t = \sqrt{40} = \underset{\sim}{6{,}32 \text{ sec}}$$

64. Házi feladat $\quad$ 1966. II. 18.

Egy motorcsónak a víz folyásával egy irányban 22 km-re halad, majd megfordul és kiindulási pontjához visszatér. Az indulástól a megérkezésig (a fordulási időt leszámítva) 7 ó telt el.

Milyen km/ó sebességgel haladna álló vízben a motorcsónak, ha a folyóvíz folyási sebessége 3 km/ó. A motor teljesítménye állandó!

73/33 $\quad \downarrow t_1 = \frac{22}{v+3} \quad \uparrow t_2 = \frac{22}{v-3} \quad t_1 + t_2 = 7$

$$\frac{22}{v+3} + \frac{22}{v-3} = 7 \quad /\cdot(v+3)(v-3)$$

$$22(v-3) + 22(v+3) = 7(v^2-9)$$

$$22v \underset{\sim}{-66} + 22v \underset{\sim}{+66} = 7v^2 - 63$$

$$7v^2 - 44v - 63 = 0$$

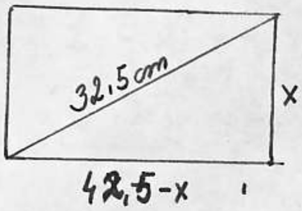
$$v_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{44 \pm \sqrt{1936+1764}}{14} = \frac{44 \pm \sqrt{3700}}{14};$$

$$v = \frac{44+61}{14} = \frac{105}{14} = \underset{\sim}{7{,}5 \text{ km/ó}}$$

1966. II. 19.

1966. II. 1

Egy téglalap kerülete 85 cm, átlója 32,5 cm. Mekkorák az oldalai?



$$(42{,}5-x)^2 + x^2 = 32{,}5^2$$
$$1806{,}25 - 85x + x^2 + x^2 = 1056{,}25$$
$$2x^2 - 85x + 750 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{85 \pm \sqrt{7225-6000}}{4} = \frac{85 \pm \sqrt{1225}}{4};$$

$$x_1 = \frac{85 + 35}{4} = \frac{120}{4} = 30 \qquad x_2 = \frac{85-35}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

1966. II. 19.

65. óra

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$
$$ax^2 + bx = -c \quad /4a$$
$$4aax^2 + 4bax = -4ac \quad /+b^2$$
$$4a^2x^2 + 4bax + b^2 (4ac) = (0)\ b^2-4ac$$
$$(2ax+b)^2 = b^2-4ac$$
$$2ax + b = \sqrt{b^2-4ac}$$
$$2ax = -b + \sqrt{b^2-4ac}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$5.(x-1)^2 + 3.(x^2+20) = 7.(2x+7) - x^2$$
$$5(x^2-2x+1) + 3(x^2+20) = 7.(2x+7) - x^2$$
$$5x^2 - 10x + 5 + 3x^2 + 60 = 14x + 49 - x^2$$
$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$
$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{24 \pm \sqrt{576-576}}{18} = \frac{4}{3}$$

$$16x^2 - 25 = 4x \cdot (x+5)$$
$$16x^2 - 25 = 4x^2 + 20x$$

$$12x^2 - 20x - 25 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 + 1200}}{24} = \frac{20 \pm \sqrt{1600}}{24} =$$
$$= \frac{20 \pm 40}{24} = \frac{60}{24}; \quad \frac{-20}{24}$$

$$x_1 = \frac{60}{24} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{-20}{24} = -\frac{5}{6}.$$

$$4x(5x-4) = 21 \qquad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 1680}}{40} =$$
$$20x^2 - 16x = 21$$
$$20x^2 - 16x - 21 = 0 \qquad = \frac{16 \pm \sqrt{256+1680}}{40} = \frac{16 \pm \sqrt{1936}}{40}$$

$$x_1 = \frac{16+44}{40} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{16-44}{40} = -\frac{28}{40} = -\frac{7}{10}$$

$$16x^2 - 25 = 4x(x+5)$$

65. Házi feladat

1966. II. 19.

$$2x^2 - 11x + 14 = 0 \qquad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{121-112}}{4}$$

$$x_1 = \frac{11+3}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \qquad x_2 = \frac{11-3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$2x^2 - x = 1 \qquad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4};$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1 \qquad x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$4x - 5 = x^2$$
$$x^2 - 4x + 5 = 0 \qquad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2};$$

$$x_1 = \frac{4+2i}{2} = 2+i \qquad x_2 = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

$3x^2 + 23x - 70 = 0 \qquad x_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{23 \pm \sqrt{529+840}}{6}$

$x_1 = \dfrac{23+\sqrt{1369}}{6} = \dfrac{23+37}{6} = \dfrac{60}{6} = 10 \qquad x_2 = \dfrac{23-37}{6} = -\dfrac{14}{6} = \dfrac{-7}{3}$

$16x^2+9 = 24x$

$16x^2-24x+9=0 \qquad (4x-3)^2$

$(4x-3)=0 \rightarrow 4x = 3$

$x = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{1}{2}x^2+2x = 7 \qquad x_{12} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q} = -2 \pm \sqrt{4+14} =$

$x^2+4x-14=0$

$x_1 = -2+\sqrt{18} \qquad x_2 = -2-\sqrt{18}$

$\dfrac{1}{3}x^2 = 2x-3$

$x^2-6x+9=0 = (x-3)^2 \qquad x-3=0$

$x = 3$

$\dfrac{2}{3}x^2+1 = 3x-\dfrac{1}{6}x^2 \qquad x_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{18 \pm \sqrt{324-120}}{10} = \dfrac{18 \pm \sqrt{204}}{10}$

$4x^2+6 = 18x - x^2$

$5x^2-18x+6=0 \qquad x_1 = \dfrac{18+\sqrt{204}}{10} = \dfrac{9+\sqrt{51}}{5}; \qquad x_2 = \dfrac{18-\sqrt{204}}{10} = \dfrac{9-\sqrt{51}}{5}$

$\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{x}{3} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{12} \qquad x_{12} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q} = 2 \pm \sqrt{4+1}$

$4x^2-4x = 3x^2+1$

$x^2-4x-1=0 \qquad x_1 = 2+\sqrt{5} \qquad x_2 = 2-\sqrt{5}$

$(x-1)(x+2)+3x-10=0$

$x^2-x+2x-2+3x-10=0$

$x^2+4x-12=0$

$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-2\pm\sqrt{4+12}$

$x_1=-2+4=2$ $\quad x_2=-2-4=-6$

$(t+7)^2-10(3t+1)=0$

$t^2+14t+49-30t-10=0$

$t^2-16t+39=0$

$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=8\pm\sqrt{64-39}$

$t_1=8+\sqrt{25}=13$ $\quad t_2=8-5=3$

$(z+1)(z+2)=(2z-1)(2z-10)$

$z^2+3z+2=4z^2-22z+10$

$3z^2-25z+8=0$

$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{25\pm\sqrt{625-96}}{6}$

$x_1=\frac{25+\sqrt{529}}{6}=\frac{25+23}{6}=\frac{48}{6}=8$ $\quad x_2=\frac{25-23}{6}=\frac{1}{3}$

$2(4x-1)(x+1)=(4x+1)(x-1)-7$

$8x^2+6x-2=4x^2-3x-1-7$

$4x^2+9x+6=0$

$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-9\pm\sqrt{81-96}}{8}$

$x_1=\frac{-9+\sqrt{-15}}{8}$ $\quad x_2=\frac{-9-\sqrt{15}}{8}$

$x^2-0{,}8x+0{,}1071=0$

$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=0{,}4\pm\sqrt{0{,}16-0{,}4284}$?

$x_1=0{,}4+\sqrt{0{,}5884}$ $\quad x_2=0{,}4-\sqrt{0{,}5884}$

$x^2-\frac{1}{3}x+2\frac{2}{9}=0$

$9x^2-3x+20=0$

$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-720}}{18}$

$x_1=\frac{3+\sqrt{-711}}{18}$ $\quad x_2=\frac{3-\sqrt{-711}}{18}$

$$x^2 - (2x-3)^2 = 1$$
$$x^2 - 4x^2 + 12x - 9 = 1$$
$$3x^2 - 12x + 10 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{144-120}}{6}$$

$$x_1 = \frac{12+\sqrt{24}}{6} \left(\frac{36}{6} = 6\right) \qquad x_2 = \frac{12-\sqrt{24}}{6} \left(\frac{12}{6} = -2\right)$$

$$(2x+3)^2 - x^2 = 2x^2 - 27$$
$$4x^2 + 12x + 9 - x^2 = 2x^2 - 27$$
$$\cancel{1}x^2 + 12x + 36 = 0 = (x+6)^2 \qquad (x+6) = 0 \rightarrow x = -6$$

$$2(x+1) = 3(2-x^2)$$
$$2x + 2 = 6 - 3x^2$$
$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+48}}{6}$$

$$x_1 = (-2+\sqrt{52}) : 6 = \frac{-1+\sqrt{13}}{3} \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{52}}{6}$$

1966. II. 21.

66. óra

A hatványozás általánosítása

$$(abc)^n = a^n b^n c^n \qquad (\sqrt{A^k})^n = \sqrt{(A^k)^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

A hatványkitevők természetes számok.

0 kitevőjű hatványok:

$$a^n : a^k = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$$ $\underline{\underline{n > k}}$ – természetes számok

$\underline{\underline{n = k}}$ $\quad a^n : a^k = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$

Bármely szám nulladik hatványa = 1.

$\underset{\sim}{1} = \frac{16}{16} = \frac{4^2}{4^2} = 4^{2-2} = \underset{\sim}{4^0}$

$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + 10^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

$\left\{a\left[\frac{ab}{c^3} + 1\left(-2\frac{b}{c}\right)\right]\right\}^0 = 1$

Negatív kitevőjű hatványok:

$a^n : k^k = a^{n-k}$

$\underline{\underline{n=0}}$ $\quad \frac{a^n}{a^k} = \frac{a^0}{a^k} = a^{0-k} = a^{-k} = \frac{1}{a^k} \qquad a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

$(n<k)$

„Bármely szám negatív kitevőjű hatványa az alap fordított értékének poz. kitevőjű hatványával egyenlő".

$(x^{r+5})(x^{r-4}) = x^{2r+1}$

$a^r \cdot a^s \cdot a^n \cdot a^q = a^{r+s+n+q}$

66. Házi feladat — 1966. II. 21.

58o. 5, 6, 7, 8.

$x^2 = 256 \rightarrow x = \sqrt{256} \rightarrow x_{12} = \pm 16$

$x^2 - 49 = 0 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x_{12} = \pm 7$

$x^2 - 169 = 0 \rightarrow x^2 = 169 \rightarrow x_{12} = \pm 13$

$2x^2 - 13 = 5 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_{12} = \pm 3$

$7x^2 = 2527 \rightarrow x^2 = 361 \rightarrow x_{12} = \pm 19$

$19x^2 = 31939 \rightarrow x^2 = 1681 \rightarrow x_{12} = \pm 41$

$\frac{x^2}{9} - 576 = 0 \rightarrow x^2 = 5184 \rightarrow x_{12} = \pm 72$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{27}{64} = 0 \rightarrow 48x^2 = 27 \rightarrow x^2 = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} \rightarrow x_{12} = \pm\frac{3}{4}$

$\frac{5y}{2} = \frac{800}{0{,}2y} \longrightarrow 10y^2 = 800\cancel{0}.2 \rightarrow y_{12} = \pm 40$

$(3r + 1{,}5)(3r - 1{,}5) = 54$

$$
\begin{aligned}
9r^2 - 2{,}25 &= 54 \\
9r^2 &= 56{,}25 \\
r^2 &= 6{,}25
\end{aligned}
\qquad r_{12} = \pm\, 2{,}5
$$

$(x+7)(x-9) + (x-7)\cdot(x+9) + 76 = 0$

$x^2 - 2x - 63 + x^2 + 2x - 63 + 76 = 0$

$$
\begin{aligned}
2x^2 &= 50 \\
x^2 &= 25
\end{aligned}
\qquad x_{12} = \pm 5
$$

$$\frac{25+x}{9+x} = \frac{13+x}{47-x}$$

$$
\begin{aligned}
(25+x)(47-x) &= (9+x)(13+x) \\
1175 + 22x - x^2 &= 117 + 22x + x^2 \\
2x^2 &= 1058 \\
x^2 &= 529
\end{aligned}
\qquad x_{12} = \pm 23
$$

1966. II. 22.

67. óra.

$a^{2r+n} = a^{2r} \cdot a^n$

$a^{r+2} + a^{r+1} + a^r = a^r \cdot a^2 + a^r \cdot a + a^r = a^r(a^2 + a + 1)$

$$\frac{a^6 b^2 c}{a^4 b^3 c^3} = \frac{a^2}{b c^2}$$

$a^m ; a^k \qquad \dfrac{a^m}{a^k} = a^{m-k} = a^0 = 1$

$m = k$

$a^m ; a^k \qquad \dfrac{a^m}{a^k} = a^{m-k} = a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$

$m = 0$

$[(a-b)^p]^2 = (a-b)^{2p}$

$(2^{2n+1})^2 = 2^{4n+2}$

$[-2(x+1)^3]^{2p} = (-2)^{2p} \cdot (x+1)^{6p} = 4^p \cdot (x+1)^{6p}$

$$\left(\frac{a^3 b^2}{2x}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^r b^2}{3y}\right)^3 = \frac{a^6 b^4}{4x^2} \cdot \frac{a^{3r} b^6}{27y^3} = \frac{a^6 \cdot a^{3r} \cdot b^4 \cdot b^6}{4 \cdot 27 x^2 y^3} = \frac{a^{3r+6} \cdot b^{10}}{108 x^2 y^3}$$

$$\frac{2^7}{2^3} = 2^4 = 16$$

$$\frac{(a-b)^{n+1}}{(a-b)^{n-1}} = (a-b)^{(n+1)-(n-1)} = (a-b)^2$$

67. Házi feladat 1966. II. 22.

67/10.

$10(x+3) + x \qquad 10x + (x+3)$

$$(11x+30)(11x+3) = 3478$$
$$121x^2 + 330x + 33x + 90 = 3478$$
$$121x^2 + 363x - 3388 = 0 \quad / :11$$
$$11x^2 + 33x - 308 = 0 \quad /:11$$
$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 28} = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -7$$

73/32

Ha valamely kétjegyű számot megszorzunk számjegyeinek összegével, szorzatul 1666-ot kapunk. Az adott szám tízeseinek száma 1-gyel több, mint az egyesek száma. Melyik az a szám?

$10(x+1) + x \qquad 2x+1$

$$[10(x+1) + x][2x+1] = 1666$$
$$(11x+10)(2x+1) = 1666$$
$$22x^2 + 31x + 10 = 1666$$
$$22x^2 + 31x - 1656 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-31 \pm \sqrt{961+145728}}{44}$$

$$x_{12} = \frac{-31 \pm \sqrt{146689}}{44} = \frac{-31 \pm 383}{44}$$

$$x_1 = \frac{352}{44} = 8 \qquad x_2 = \frac{-414}{44} \doteq -9$$

$$n = \underline{\underline{98}}$$

114/2;3

$$5(2a^3 - 3a^2 + 7a + 1) - 4(3a^3 - 2a^2 + 5a + 2) + 2(a^3 + 4a^2 - 7a + 6) =$$
$$10a^3 - 15a^2 + 35a + 5 - 12a^3 + 8a^2 - 20a - 8 + 2a^3 + 8a^2 - 14a + 12 =$$
$$a^2 + a + 9.$$

$$4x^r - 2x^{r-1} + 5x^{r-1} - 2x^r - 3x^{r-1} + 6x^{r-1} - 2x^r = 6x^{r-1}$$

$$\frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 6^5}{8^3 \cdot 9^2} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 6^5}{2^9 \cdot 3^4} = \frac{6^5}{2^3} = \frac{7776}{8} = 972$$

$$a^{3r+3} b^3 - a^3 b^{3r+3} = a^{3r} \cdot a^3 \cdot b^3 - a^3 b^{3r} \cdot b^3 = a^3 b^3 (a^{3r} - b^{3r})$$

$$(x^2 - y^2)^n : (x+y)^n = [(x+y)(x-y)]^n : (x+y)^n = (x-y)^n$$

$$\frac{2^9 \cdot 10^5 \cdot 15^4 \cdot 18^3}{3^7 \cdot 5^5 \cdot 20^4 \cdot 24^3} = \frac{2^9 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3}{3^7 \cdot 5^5 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \frac{5^9 \cdot 2^{17} \cdot 3^{10}}{5^9 \cdot 2^{17} \cdot 3^{10}} = 1$$

A hatvány egyéb tulajdonsága

Pozitív szám páros kitevőjű hatványa pozitív.
Negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív.

$$\left.\begin{array}{l} a>0 \rightarrow a^{2n}>0 \\ a<0 \rightarrow a^{2n}>0 \end{array}\right\} n=1,2,3\ldots$$

Pozitív szám páratlan kitevőjű hatványa pozitív szám.
Negatív szám páratlan kitevőjű hatványa negatív szám.

$$\left.\begin{array}{l} a>0 \rightarrow a^{2n+1}>0 \\ a<0 \rightarrow a^{2n+1}<0 \end{array}\right\} n=1,2,3\ldots$$

Ha $a>1 \rightarrow a^{n+1}>a^n$

Ha $1>a>0 \rightarrow a^{n+1}<a^n$

1966. I. 23. 68. óra.

1, $a^n : a^k = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ $n=k$

$a^n : a^k = a^0 = \frac{a^n}{a^k} = 1 \rightarrow a^0 = 1$

2, $\frac{114}{4a}$; $\frac{1-v^2}{v^8}+\frac{1+v}{v^6}-\frac{1}{v^5} = \frac{(1+v)(1-v)}{v^5 \cdot v^3}+\frac{(1+v)}{v^5 \cdot v}-\frac{1}{v^5} =$

$= \frac{1-v^2+v^2+v^3-v^3}{v^5 \cdot v^3} = \frac{1}{v^8}$;

3, $a^n \quad a^k \qquad a^n = \quad = a^0$

4, ? $\frac{r^n}{(r+s)^n}-\frac{2r^{n-1}}{(r+s)^{n-1}}+\frac{r^{n-2}}{(r+s)^{n-2}} =$

$= \frac{r^n}{(r+s)^n}-\frac{2r^n \cdot 2r^{-1}}{(r+s)^n \cdot (r+s)^{-1}}+\frac{r^n \cdot r^{-2}}{(r+s)^n \cdot (r+s)^{-2}} =$

$= \frac{r^n (r+s)^{-2}-(2r^n \cdot 2r^{-1})(r+s)^{-1}+r^n r^{-2}}{(r+s)^n \cdot (r+s)^{-2}} =$

$= \frac{\qquad}{(r+s)^{n-2}}$

68. Házi feladat

1966. I. 23.

$$\frac{r^n}{(r+s)^n} - \frac{2r^{n-1}}{(r+s)^{n-1}} + \frac{r^{n-2}}{(r+s)^{n-2}} = \frac{r^n - 2r^{n-1}\cdot(r+s) + r^{n-2}\cdot(r+s)^2}{(r+s)^n} =$$

$$= \frac{r^{n-2}\left[r^2 - 2r(r+s) + (r+s)^2\right]}{(r+s)^n} = \frac{r^{n-2}\left[r-(r+s)\right]^2}{(r+s)^n} = \frac{r^{n-2}\cdot s^2}{(r+s)^n};$$

$$\frac{(a^2-b^2)^{r+s}\cdot(a^2+b^2)^{r+2}}{(r-s)\cdot(a^2-b^2)^s\cdot(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2-b^2)^r\cdot(a^2+b)^r}{(r-s)} = \frac{(a^4-b^4)^r}{r-s};$$

$$\frac{a^{2r+3s}\cdot b^{4r-3s}}{a^{5r-s}\cdot b^{3r+s}}\cdot\frac{a^{8r+2s}\cdot b^{r+2s}}{a^{4r+5s}\, b^{2r-4s}} = \frac{a^{2r}\cdot a^{3s}\cdot b^{4r}\cdot b^{-3s}\cdot a^{8r}\cdot a^{2s}\cdot b^{r}\cdot b^{2s}}{a^{5r}\cdot a^{s}\cdot b^{3r}\cdot b^{s}\cdot a^{4r}\cdot a^{5s}\cdot b^{2r}\cdot b^{-4s}} =$$

$$= \frac{a^{10r+5s}\cdot b^{5r-s}}{a^{9r+4s}\cdot b^{5r-3s}} = a^{r+s}\cdot b^{2s}$$

69 ~ 70 óra

1966. II. 21.

1.) $\left[(-x)^{2s-1}\right]^{2s-1} = (-x)^{4s^2-4s+1} = (-x)^{4s^2}\cdot(-x)^{-4s}\cdot(-x);$

2.) $\left[(-a)^{2m+1}\right]^{2m} = (-a)^{4m^2+2m} = (-a)^{4m^2}\cdot(-a)^{2m} = (-a)^{2m}\cdot(a^{2m+1});$

3.) $4^2 + 5^0 = 17;$ 4.) $3^0\cdot 7^0 = 1;$

5.) $(x-3y)^0 = 1;$

6.) $3a^n b^2 c : a^n c = \frac{3a^n b^2 c}{a^n c} = 3b^2;$

7.) $(x+1)(x+1)^0 = 1(x+1)$

8.) $10^{-1}(-1) = 0{,}1$ 10. $10^{-2} = 0{,}01$

9.) $\left(\frac{n}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{n}$ 11. $10^{-5} = 0{,}00001$

12.) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$

13.) $a^{-3}bc^{-2} = \frac{b}{a^3c^2}$

14.) $\frac{a^{-n}}{c^{-n}} = \frac{a^{-n}}{} \cdot \frac{1}{c^{-n}}$; $\frac{a^{-n}}{c^{-n}} = \frac{a^{-n}}{c^{-n}}$; $a^{-n}\cdot c^{-n} = a^{-n}\cdot c^{-n};$

?

15.) $\frac{a^{-n}}{c^{-r}} - a^{-n} \cdot \left(\frac{1}{c^{-r}}\right) = \frac{a^{-n}}{c^{-r}} - \frac{a^{-n}}{c^{-r}} = \frac{a^{-n} - a^{-n}}{c^{-r}} = 0$

$= \frac{c^{r}}{a^{n}} - \frac{c^{r}}{a^{n}} = \frac{c^{r} - c^{r}}{a^{n}} = 0$

16.) $(5^3)^{-2} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6} = \frac{1}{\cancel{625^2}} = \frac{1}{125^2}$

17.) $(5^{-3})^{-2} = 5^{6}$

18.) $(2^{3}) : (2^{-2}) = 2^{3+2} = 2^{5}$

19.) $(2^{-3}) : (2^{-2}) = 2^{-3+2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

20.) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} = 12$

21.) $5^{-2} = \frac{1}{25}$

22.) $0,2^{-2} = \left(\frac{1}{0,2}\right)^{2} = \frac{1}{0,04}$

23.) $\frac{2}{5}^{-1} = 2,5$

24.) $8^{-1} = \frac{1}{8}$

25.) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

26.) $2^{-3} : 3^{-2} = \frac{9}{8}$

27.) $(-6)^{-2} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{2} = \frac{1}{36}$

28.) $(-5)^{-1} = \frac{-1}{5}$

$2xy^{-2} = \frac{2x}{y^2}$

30.) $\frac{3}{5a^{-2}} = \frac{3a^2}{5}$

31.) $\frac{2^{-3} \cdot a^{-1}}{3^{-2} \cdot x^{-4}} = \frac{3^2 \cdot x^4}{2^3 \cdot a} = \frac{9x^4}{8a}$

32.) $\frac{2a^{-3}b^2}{7x^2y^{-4}} = \frac{2b^2y^4}{7x^2 \cdot a^3}$

33.) $\frac{a^{-3}b^{-m}}{x^{-4}x^{-n}} = \frac{x^4 \cdot x^n}{a^3 \cdot b^m} = \frac{x^{4+n}}{a^3 \cdot b^m}$;

34.) $\frac{6}{(x-y)^{-2}} = 6 \cdot (x-y)^2 = 6(x^2 - 2xy + y^2)$

35.) $\frac{2a}{x} = 2ax^{-1}$

36.) $\frac{3}{2(a-b)} = 3 \cdot 2^{-1} \cdot (a-b)^{-1}$

37.) $\frac{3}{2^3ab^4} = 3 \cdot 2^{-3} \cdot a^{-1} \cdot b^{-4}$

38.) $\frac{3a^3}{2ax^2y} = 3a^2 \cdot 2^{-1} \cdot x^{-2} \cdot y^{-1}$

39.) $\frac{1}{2^2(a-b)^3} = 2^{-2} \cdot (a-b)^{-3}$

40.) $\frac{2a}{3b^2(a+b)} = 2a \cdot 3^{-1} \cdot b^{-2} \cdot (a+b)^{-1}$

41.) $(a^{-2}x^{-4}) \cdot a^4 = a^2 \cdot x^{-4} a^0 = \frac{a^2}{x^4}$

42.) $(3x^{-2}y^3)(2xy^{-2}) = 6x^{-1}y^1 = \frac{6y}{x}$

43.) $(3^{-1}x^{-5}y^2)(3^{-2}x^3y^2) = 3^{-3}x^{-2}y^4 = \frac{y^4}{3^3x^2} = \frac{y^4}{3.9x^2}$

44.) $(x^{-4} - 2x^{-1} + 3x) \cdot x^{-1} = x^{-5} - 2x^{-2} + 3x^0 = \left(\frac{3}{x^5 - x^2}\right) = x^{-5} - 2x^{-2} + 3$

45.) $2x^3 : 3x^{-2} = \frac{2x^3}{3x^{-2}} = \frac{2x^3 \cdot x^2}{3} = \frac{2x^5}{3}$

46.) $ax^2 : x^{-1} = ax^3$

47.) $(a^3bc^2):(a^{-2}b^3c^4) = \frac{a^5bc^2}{b^3c^4} = \frac{a^5}{b^2c^2}$

48.) $(ax^{-3} - bx^{-1}) : x^{-4} = (ax^{-3} - bx^{-1}) \cdot x^4 = ax - bx^3$

49.) $(5^2a^{-3}b^4c^{-2}):(5a^{-2}b^5c^{-2}) = \left(= \frac{5^2a^{-3}b^4c^{-2}}{5^{-2}b^5c^{-2}} = 5^4a^{-3}b^{-1} = \right)$

$= \frac{5^2a^{-3}b^4c^{-2}}{5a^{-2}b^5c^{-2}} = \frac{5}{ab}$;

50.) $(x^{-1} + y^{-2})^{-2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy^2} + \frac{1}{y^4}} =$

$= \frac{1}{x^{-2} + 2xy^{-2} + y^{-4}}$

51.) $m/s = ms^{-1}$ 52.) $g/cm^3 = gcm^{-3}$

70. *Házi feladat* 1966. I. 24.

120/15 114/6 !
120/20 b

$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$

$3^0 + 3^{-2} + 3^{-3} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{27+3+1}{27} = \frac{31}{27}$

$2^{-4} + 4^{-2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{4^{-1}} \cdot \frac{3}{2^{-3}} = \left(\frac{3}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{32}} = 96\right) = 4 \cdot 24 = 96$;

$\frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} \cdot 10^{-2} - (0{,}25)^0} = \frac{2^2 + 5}{10^{-5} - 1} = \frac{9}{\frac{1}{100000} - 1} = \frac{\frac{9}{1}}{-\frac{999\,999}{1000\,000}} = \frac{9000000}{-999999} =$

$= \frac{-10^5}{111111}$;

$\frac{kpm}{s} = kpm\,s^{-1}$ $\frac{kgm^2}{s^2} = kgm^2s^{-2}$ $\frac{m^3}{kg\,s^2} = m^3kg^{-1}s^{-2}$

$n > 1$ $\frac{p^n}{q^n} > \frac{p}{q}$ $p > q$

$\left(\frac{p}{q}\right)^n > \frac{p}{q}$; mivel $p > q \rightarrow \frac{p}{q} > 1 \rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n > \frac{p}{q}$

$\frac{p^n}{q^n} < \frac{p}{q}$ $p < q$

$\left(\frac{p}{q}\right)^n < \frac{p}{q}$; mivel $p < q \rightarrow \frac{p}{q} < 1 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n < \frac{p}{q}$

966. II. 25.

71. óra

Műveletek racionális (tört) kitevőjű hatványmennyiségekkel.

Minden egyes kitevőnél érvényesek az ismert törvények.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Minden tört kitevőjű hatvány olyan gyökmennyiség alakjában írható fel, melynek gyökkitevője a törtkitevő nevezője, a gyök alatti szám hatványkitevője pedig a törtkitevő számlálója.

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

$5^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{5^9}$

$a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$

$x^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{x^k}$

A törtkitevőjű hatványokra is ugyanazok a szabályok érvényesek, mint az egész kitevőjű hatványokra. A törtkitevőt lehet bőviteni, egyszerüsiteni.

Pl: $5^{\frac{6}{4}} = 5^{\frac{3}{2}}$ $a^{\frac{10}{5}} = a^5$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

Összevonás:

$$2^{\frac{1}{3}} + 3\cdot 2^{\frac{1}{3}} + 5\cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\cdot(1+3+5) = \sqrt[3]{2}\cdot 9$$

$$= \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} + 5\cdot\sqrt[3]{2} = 9\cdot\sqrt[3]{2}$$

Csak azonos alapú és kitevőjű hatványokat lehet összevonni.

$$2\cdot 3^{\frac{2}{3}} + 4\cdot 3^{\frac{2}{3}} - 3\cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3\cdot\sqrt[3]{9}$$

$$2\cdot\sqrt[3]{3^2} + 4\sqrt[3]{3^2} - 3\cdot\sqrt[3]{3^2} = 3\cdot\sqrt[3]{9}$$

Szorzás:

$$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3+8}{6}} = 2^{\frac{11}{6}} = \sqrt[6]{2^{11}}$$

$$3^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{20+16+3}{30}} = 3^{\frac{39}{30}} = (3^{\frac{13}{10}}) = \sqrt[30]{3^{47}}$$

Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{3}{4}}} = 5^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}} = 5^{\frac{-1}{12}} = 1/5^{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{5}} \;;\; = \sqrt[12]{\frac{1}{5}}$$

Azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot az osztandó és osztó hatványkitevőinek különbségére emeljük.

Hatványozás:

$$\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{15}{12}} = 2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{2^5}$$

$$\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{7}{3}} = 5^{-\frac{14}{9}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{14}{9}} = \sqrt[9]{\frac{1}{5^{14}}}$$

Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

71. Házi feladat

1966. V. 25.

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4 \qquad 216^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{216^2}} = \frac{1}{36}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4 \qquad \frac{4}{9}^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$-8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{-8^2} = 4$$

$4^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt{64} \cdot \sqrt[4]{81} = 8 \cdot 3 = 24$

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{8+9}{12}} = a^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{a^{17}}$

$(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{5}})(a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{3}{10}}) = a^{\frac{11}{12}} \cdot b^{1/2} = \sqrt[12]{a^{11}} \cdot \sqrt{b}$

1966. III. 1.

72. óra

$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25} = 5$

$18^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{18}$

$5 \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 5 \cdot \sqrt[4]{16} = 10$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

$-2 \cdot 27^{\frac{1}{3}} = -2\sqrt[3]{27} = -2 \cdot 3 = -6$

$2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{64} = 8:4 = 2$

$3^{-2} : 81^{1,5} = \frac{1}{9} \cdot 81^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{9} \cdot \sqrt[2]{81^3}$

$|x-3| < 6$

1, $x - 3 \geqq 0 \rightarrow |x-3| = x-3 \geqq 0$

$x - 3 \geqq 0 \qquad x - 3 < 6$

$\underline{x \geqq 3} \qquad \underline{x < 9} \qquad \Rightarrow 3 \leqq x < 9$

2, $x - 3 < 0 \rightarrow |x-3| = -(x-3) > 0$ $\qquad \cancel{x=3}$

$3 - x > 0 \qquad 3 - x < 6 \qquad \Rightarrow -3 < x < 3$

$\underline{x < 0} \qquad \underline{x > -3}$

$\frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{4}}} = p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = p^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{p}$

$r^0 : r^{-\frac{3}{5}} = r^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{r^3}$

$r^{\frac{1}{2}} : r^{-\frac{1}{4}} = r^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{r^3}$

$p^{\frac{2}{3}} : p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{p}$

$(b^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = b^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = b^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{b}}$

$(q^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{5}} = q^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{q^2}}$

$x_1 = 2 \qquad x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = q$

$x_2 = \frac{1}{2} \qquad x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = -p \qquad p = -\frac{5}{2}$

$x_1 + x_2 = -p \qquad \underline{x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0}$

$x_1 \cdot x_2 = q$

72. Házi feladat

1966. III. 1.

$$\left(a^{\frac{25}{3}}\right)^{\frac{3}{25}} = a^{\frac{25}{3}\cdot\frac{3}{25}} = a^1 = a$$

$$\left(-a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} = -a^{-\frac{2}{9}} = \left(\frac{1}{-a}\right)^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{\frac{1}{a^2}}$$

$$\frac{r^{\frac{m}{2}}}{r^{\frac{2}{m}}} = r^{\frac{m}{2}-\frac{2}{m}} = r^{\frac{m^2-4}{2m}} = \sqrt[2m]{r^{m^2-4}}$$

$$\frac{r^{\frac{m}{n}}}{r^{\frac{n}{m}}} = \sqrt[n]{r^m} : \sqrt[m]{r^n} = r^{\frac{m}{n}-\frac{n}{m}} = r^{\frac{m^2-n^2}{nm}} = \sqrt[nm]{r^{m^2-n^2}}$$

73. óra

1966. III. 15.

Műveletek gyökmennyiségekkel

Gyökvonásnak nevezzük azt a műveletet, amellyel adott hatványhoz és hatványkitevőhöz meghatározzuk a hatvány alapot. A gyökvonás tehát a hatványozás fordított művelete.

A gyökvonás jele: $\sqrt{}$ (radix - latinul)
a gyökvonás a görög r ($\sqrt{}$) betűvel van jelölve.

$5.5.5 = 5^3 = 125$ $\quad$ $5^3 = x$

$\sqrt[3]{125} = x$ $\quad$ $x^3 = 125$

3 - gyökkitevő
125 - gyökmennyiség
x - gyök

$\sqrt[n]{a} = x$ $\quad$ A gyökkitevő, $n = 1, 2, 3 \ldots$
$a \geq 0$

$\sqrt[n]{0} = 0$ $\quad$ $\sqrt[2]{} = \sqrt{}$
$\sqrt[n]{1} = 1$
$\sqrt[1]{a} = a$

Egy mennyiség értéke nem változik, ha gyököt vonunk belőle, azután ugyanannyiadik hatványra emeljük.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Pozitív számok páros kitevőjű gyöke két, abszolut értékben egyenlő, de ellentétes előjelű szám:

$\sqrt{16} = \pm 4$ $\quad$ $(\pm 4)^2 = 16$ $\quad$ $\sqrt[2n]{a} = \pm\sqrt[2n]{a}$
$\sqrt[4]{16} = \pm 2$ $\quad$ $(\pm 2)^4 = 16$

Pozitív szám páratlan kitevőjű gyöke pozitív szám:

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = +3$

$\sqrt[2n+1]{a} = +\sqrt[2n+1]{a}$ $a > 0$

Negatív szám páros kitevőjű gyöke a valós számok halmazában nincs értelmezve:

$\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = \pm 5 \cdot i$ képzeles szám

Negatív szám páratlan kitevőjű gyöke negatív szám:

$\sqrt[3]{-27} = -3$ mert $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[2n-1]{-a} = -\sqrt[2n-1]{a}$

$\sqrt{(x-y)^2} = (x-y)$ v. $(y-x)$ $= |x-y|$

$|x-y| = x-y$ ha $x > y$
$|x-y| = y-x$ ha $x < y$

$\sqrt{225} = \pm 15$ $\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$

$\sqrt{-8} =$ nincs értelme $\sqrt[4]{-16} = 2i$

$\sqrt[5]{243} = \pm 3$ $\sqrt{0,01} = \pm 0,1$

$\sqrt[10]{1} = 1$ $\sqrt{(-2)^4} = 4$

$\sqrt[6]{0} = 0$

1966. III. 15. Házi feladat

122/2

$\sqrt[3]{x} = 3 \longrightarrow x = 3^3 = \underline{27}$

$5 - \sqrt{x} = 3$
$\sqrt{x} = 2 \longrightarrow x = 2^2 = \underline{4}$

1966. II. 16.

74. óra

Gyökvonás egytagú alg. kifejezésekből

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6 \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökeinek a szorzatával.

$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Hányados négyzetgyöke egyenlő az osztandó és az osztó négyzetgyökének a hányadosával.

$\sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16 \qquad \sqrt{a^k} = a^{\frac{k}{2}}$

Hatványból úgy vonunk négyzetgyököt, hogy a hatványalapot leírjuk és ha lehet, a hatványkitevőt osztjuk a gyökkitevővel. A hányados az új kitevő.

Ha az egytagú kifejezés több tényezőből áll, akkor úgy vonunk gyököt, hogy minden tényezőből gyököt vonunk. Ezeket összeszorozzuk.

$\sqrt{2^8 \cdot 3^8 \cdot 10^6} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 10^3 \qquad \sqrt{x^8 y^{12} z^4} = x^4 y^6 z^2$

$\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt[4]{4} \qquad \sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Gyökből úgy vonunk gyököt, hogy a gyök alatti mennyiségből a gyökkitevők szorzatának megfelelő gyököt vonunk.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ezen szabályok nemcsak négyzet, hanem bármely gyökkitevő esetén is érvényesek.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a : b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{64} = 2.4 = 8$

$\sqrt[5]{20}$ = irracionális szám

$\sqrt[5]{x^{15}y^{20}} = x^3y^4$

$\sqrt[5]{2^{20}} = 2^{\frac{20}{5}} = 2^4 = 16$

$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$

$\sqrt[4]{a^8} = a^2$

$\sqrt[6]{\frac{x^{12}}{y^{24}}} = \frac{\sqrt[6]{x^{12}}}{\sqrt[6]{y^{24}}} = \frac{x^2}{y^4}$

$\sqrt[5]{\sqrt[4]{12}} = \sqrt[20]{12}$

$\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$\sqrt{2x}.\sqrt{8x^7} = \sqrt{2x.8x^7} = \sqrt{16x^8} = 4x^4$

$\sqrt[3]{3x^4}.\sqrt[3]{9x^2} = \sqrt[3]{27x^6} = 3x^2$

Gyökös kifejezések átalakítása

Kiemelés: Ha a gyökjel alatti mennyiség olyan szorzattá alakítható, melynek valamelyik tényezője teljes négyzet, akkor ebből gyököt vonhatunk és a gyököt a gyökjel elé írhatjuk.

$\sqrt{20} = \sqrt{5.4} = \sqrt{4}.\sqrt{5} = 2.\sqrt{5}$

$\sqrt{48} = \sqrt{4.12} = \sqrt{4}.\sqrt{12} = 2.\sqrt{12} = 2\sqrt{4.3} = 2.\sqrt{4}.\sqrt{3} = 4.\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{24} = \sqrt{3.8} = 2.\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2.32} = 2.\sqrt[5]{2}$

$\sqrt{a^7b^9} = \sqrt{a^6.a.b^8.b} = \sqrt{a^6}.\sqrt{a}.\sqrt{b^8}.\sqrt{b} = a^3.b^4.\sqrt{a}.\sqrt{b} = a^3b^4\sqrt{ab}$

$\sqrt[3]{x^7y^8} = \sqrt[3]{x^6.x.y^6.y^2} = x^2y^2\sqrt[3]{xy^2}$

1966. III. 16.

74. Házi feladat

$\sqrt{\frac{40}{27}}$ $\sqrt[3]{\frac{27x^6y^5}{125a^{10}b^{11}}}$

$\sqrt{\frac{40}{27}} = \cancel{\sqrt{36+}} = \frac{\sqrt{4.10}}{\sqrt{9.3}} = \frac{2.\sqrt{10}}{3.\sqrt{3}}$

$\sqrt[3]{\frac{27x^6y^5}{125a^{10}b^{11}}} = \sqrt[3]{\frac{27.x^6.y^3.y^2}{125.a^6.a^4.b^9.b^2}} = \frac{3x^2y\sqrt[3]{y^2}}{5a^2b^3\sqrt[3]{a^4b^2}}$

1966. III. 11.

Bevitel a gyökjel alá:

Ha valamely számot, v. alg. kifejezést akarunk gyökjel alá vinni, akkor annyiadik hatványra kell emelnünk amennyi a gyökkitevő.

$$3 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$$

$$a^2 \cdot \sqrt{b^3c} = \sqrt{a^4}\,\sqrt{b^3c} = \sqrt{a^4b^3c}$$

$$c^4 \cdot \sqrt[5]{a^3b^2} = \sqrt[5]{c^{20}} \cdot \sqrt[5]{a^3b^2} = \sqrt[5]{c^{20}a^3b^2} = \sqrt[5]{a^3b^2c^{20}}$$

A gyökkitevő és a gyökjel alatti kifejezés hatványkitevőjének egyszerűsítése:

Szabad a gyökkitevőt és a hatványkitevőt ugyanazzal a számmal osztani v. szorozni, a gyökkifejezés értéke nem változik.

$$\sqrt[4]{36^2} = \sqrt[\frac{4}{2}]{36^{\frac{2}{2}}} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt[6]{49^3} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt[6]{27m^3n^3} = \sqrt[6]{3^3m^3n^3} = \sqrt{3mn}$$

$$\sqrt[9]{\frac{8a^6b^{12}}{27x^3y^9}} = \sqrt[9]{\frac{2^3a^6b^{12}}{3^3x^3y^9}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot a^2 \cdot b^4}{3\,x\,y^3}}$$

Műveletek gyökmennyiségekkel

1, Összevonás: Összevonni csak azonos gyökalapú és gyökkitevőjű mennyiségeket lehet.

$$\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}\,(1+4) = 5 \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{a} + 7\sqrt{a} = 8\sqrt{a}$$

$$2 \cdot \sqrt{7} - 10 \cdot \sqrt{7} = -8\sqrt{7}$$

$$\sqrt[3]{a} + 9\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[4]{ab} + 11\sqrt[4]{ab} = 10\sqrt[3]{a} + 7\sqrt[4]{ab}$$

Néha a gyökös kifejezések kiemeléssel alakíthatók át összevonhatókká,

$$3\sqrt{12} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{27} = 3 \cdot 2\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3} =$$
$$6 \cdot \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$$

2. Szorzás — csak azonos gyökkitevőjű mennyiségek szorozhatók.

Azonos gyökkitevőjű mennyiségeket úgy szorzunk, hogy a gyök alatti mennyiségek szorzatából a közös gyökkitevővel vonunk gyököt:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 6} = \sqrt{12} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt{20} = \sqrt{200}$$

$$3\cdot\sqrt{6}\cdot 4\cdot\sqrt{7} = 12\sqrt{42}$$

$$3\cdot\sqrt[3]{6}\cdot 5\sqrt[3]{8} = 15\sqrt[3]{48}$$

$$\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a^7} = \sqrt[4]{a^{10}} = \sqrt{a^5}$$

$$(\sqrt{6} + 5\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{8})(3\cdot\sqrt{6}) = 3\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} + 15\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{8}\cdot\sqrt{6} =$$
$$= 18 + 15\sqrt{12} - \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{48} = 18 + 30\sqrt{3} - 6\sqrt{3} =$$
$$= 18 + 30\cdot\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = (45\cdot\sqrt{3} - 9) = 18 + 24\cdot\sqrt{3}.$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{7}) = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{7} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{7} =$$
$$= 3 + \sqrt{6} + \sqrt{21} + \sqrt{14}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = 2 - 5 = -3.$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})(2\cdot\sqrt{d}) = 2\sqrt{ad} + 4\sqrt{bd} + 6\sqrt{cd}$$

$$(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) = a^2 - 3$$

Különböző gyökkitevőjű mennyiségeket csak akkor szorozhatunk össze, ha közös gyökkitevőre hozzuk őket:

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{9}\cdot\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[10]{6} = \sqrt[20]{7^5}\cdot\sqrt[20]{8^4}\cdot\sqrt[20]{6^2} = \sqrt[20]{7^5\cdot 8^4\cdot 6^2}$$

A közös gyökkitevő mindig a tényezők gyökkitevőinek legkisebb közös többszöröse:

$$\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^2\cdot x^3} = \sqrt[12]{x^5}$$

$$\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{b^7}\cdot\sqrt[8]{c^5} = \sqrt[24]{a^{18}b^{28}c^{15}}$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}} = \sqrt[4]{\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{2}} = \sqrt[4]{\tfrac{12}{18}} = \sqrt[4]{\tfrac{2}{3}}$$

$$\sqrt[6]{\frac{4}{7}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{\frac{16}{49} \cdot \frac{8}{27}} = \sqrt[12]{\frac{2^7}{7^2 \cdot 3^3}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a^3}{b}} \cdot \sqrt[8]{\frac{a^2}{b^3}} = \sqrt[8]{\frac{a^6}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^3}} = \sqrt[8]{\frac{a^8}{b^5}} = \frac{a}{\sqrt[8]{b^5}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{y^6}{x^8}} = \sqrt[15]{\frac{x^{20}}{y^{10}} \cdot \frac{y^{18}}{x^{24}}} = \sqrt[15]{\frac{y^8}{x^4}}$$

3. Osztás: Csak egyenlő gyökkitevőjű mennyiségeket oszthatunk egymással, úgy hogy a gyök alatti mennyiségek hányadosából a közös gyökkitevővel vonunk gyököt:

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}} \qquad \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{b^5}} = \sqrt{\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{b}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\sqrt[5]{c^3}}{\sqrt[5]{c^7}} = \sqrt[5]{\frac{c^3}{c^7}} = \sqrt[5]{\frac{1}{c^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{c^4}}$$

Különböző gyökkitevőjű mennyiségeket csak akkor oszthatunk, ha előbb egyenlő gyökkitevőjűekké alakítottuk át.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{25}{2}} \qquad \frac{\sqrt[3]{a^3b^2c^5}}{\sqrt{a^3b^5c^4}} = \sqrt[6]{\frac{a^6b^8c^{10}}{a^9b^{15}c^{12}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a^3b^7c^2}}$$

4. Hatványozás: Gyökös kifejezést úgy hatványozunk, hogy a gyök alatti mennyiséget hatványozzuk, vagyis a gyökvonás és a hatványozás művelete felcserélhető.

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{5^2} = 5 \qquad \left(\sqrt[3]{12}\right)^3 = 12$$

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8} \qquad \left(\sqrt[3]{a+b}\right)^2 = \sqrt[3]{(a+b)^2}$$

$$\left(\sqrt[4]{6}\right)^3 = \sqrt[4]{6^3} \qquad \left(\sqrt[5]{b}\right)^4 = \sqrt[5]{b^4}$$

Előjeles gyökmennyiségekkel is ugyan úgy számolunk, mint az előjeles számokkal, páros hatványuk pozitív, páratlan hatványuk negatív előjel esetén negatív, pozitív előjel esetén pozitív.

$$\left(-\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9} \qquad \left(-\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\left(-\sqrt[4]{2}\right)^3 = -\sqrt[4]{2^3} \qquad \left(-\sqrt[3]{b}\right)^5 = -\sqrt[3]{b^5}$$

1966. III. 17. 75. Házi feladat

123/12
124/13 14 15 16

$6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$

$5\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt[3]{3} = 8\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3}$

$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt{a} - \sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{a} = 6\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$

$\frac{1}{3}\sqrt[n]{x-y} + \frac{5}{2}\sqrt[n]{x-y} - \frac{7}{12}\sqrt[n]{x-y} = \frac{4+30-7}{12}\sqrt[n]{x-y} = \frac{27}{12}\sqrt[n]{x-y}$

$= \frac{9}{4}\sqrt[n]{x-y}$

$\sqrt{4900} = 70$ $\sqrt[3]{125.8} = \sqrt[3]{1000} = 5.2 = 10$

$\sqrt{16x^2} = 4x$ $\sqrt[3]{27a^3b^6c^{12}} = 3ab^2c^4$

$\sqrt{50}.\sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$ $\sqrt{5}.\sqrt{125} = \sqrt{625} = 25$

$\sqrt{10}.\sqrt{16,9} = \sqrt{169} = 13$ $\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{216} = 6$

$\sqrt[5]{(2x+3)^2}.\sqrt[5]{(2x+3)^3} = \sqrt[5]{(2x+3)^5} = 2x+3$

$(2.\sqrt[3]{135} + 5\sqrt[3]{40} - 10\sqrt[3]{5})(\frac{1}{2}\sqrt[3]{25}) = (2\sqrt[3]{5.27} + 5\sqrt[3]{8.5} - 10\sqrt[3]{5})(\frac{1}{2}\sqrt[3]{25}) =$

$= (6\sqrt[3]{5} + 10\sqrt[3]{5} - 10\sqrt[3]{5})\frac{1}{2}\sqrt[3]{25} = 6\sqrt[3]{5}.\frac{1}{2}\sqrt[3]{25} = 3\sqrt[3]{125} = 3\sqrt[3]{125} = 15$

1966. III. 22. 76. óra

Szorzatot úgy hatványozunk, hogy minden tényezőjét a kívánt hatványra emeljük, majd ezeket a hatványokat összeszorozzuk:

$(2.\sqrt[3]{2})^2 = 2^2.\sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$

$(3.\sqrt[4]{5})^3 = 27\sqrt[4]{5^3}$

$(-3.\sqrt[5]{2})^4 = 81\sqrt[5]{2^4}$

$(-2.\sqrt[6]{3})^2 = 4.\sqrt[3]{3}$

$(a.\sqrt{ab})^3 = a^3.\sqrt{a^3b^3} = a^3.\sqrt{a^2.a.b^2.b} = a^4.b\sqrt{ab}$

$$\left(m^2\sqrt[3]{m^4 n}\right)^4 = m^8\sqrt[3]{m^{16}n^4} = m^8\sqrt[3]{m^{15}\cdot m\cdot n^3\cdot n} = m^{13}\, n\sqrt[3]{mn}$$

Tört kifejezést úgy hatványozunk, hogy a számlálót és a nevezőt is külön, külön hatványozzuk:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{5}}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}\cdot\sqrt[4]{\frac{2^3}{5^3}} = \frac{8}{27}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{125}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\cdot\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^4}}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{y^3\cdot y}{x^6\cdot x^2}} = \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y}{x^2}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} = \frac{1}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$$

Összeg hatványát az egész kifejezésekre tanult szabályok alapján számítjuk ki.

$$(\sqrt{2}+2)^2 = \sqrt{2}^2 + 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} + 2^2 = 2 + 4\cdot\sqrt{2} + 4 = 6 + 4\cdot\sqrt{2} =$$
$$= 2(3 + 2\sqrt{2}).$$

$$(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 = 7 - 2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5} + 5 = 7 + 5 - 2\sqrt{35} = 12 - 2\sqrt{35}.$$

127 o. 20 21 22 23 76. Házi feladat 1966. III. 22.

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{0{,}009} \approx 0{,}095 \qquad \sqrt{\frac{27}{1000}} = \sqrt{\frac{9\cdot 3}{10\cdot 100}} = \frac{3}{10}\sqrt{\frac{3}{10}} \qquad \sqrt[3]{\frac{8a^3b^3}{27x^6y^9}} = \frac{2ab}{3x^2y^3}$$

$$\sqrt[3]{54a^5b^4} : \sqrt[3]{2a^2b} = \sqrt[3]{\frac{54a^5b^4}{2a^2b}} = \sqrt[3]{\frac{9\cdot 6a^3a^2b^3b}{2a^2b}} = 3ab\sqrt[3]{\frac{6a^2b}{2a^2b}} = 3ab\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{b}} : \sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt[3]{\frac{8a^3}{b^3}} = \frac{2a}{b}$$

$$(\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3} - ab) : \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^3b}{ab}} + \sqrt{\frac{ab^3}{ab}} - \sqrt{\frac{a^2b^2}{ab}} =$$
$$= \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - \sqrt{ab} = |a| + |b| - \sqrt{ab}$$

$$4\sqrt{\frac{81}{16}} + 5\sqrt{\frac{64}{25}} - 2\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = 9 + 8 - 3 = 14$$

$$2\sqrt{\frac{1}{25}} + 3\sqrt{\frac{4}{9}} - 4\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5} + 2 - 2 = \frac{2}{5}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{18}} - \frac{1}{6}\sqrt{245} - \sqrt{\frac{49}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{20}{1} - \frac{25}{18} - \frac{245}{36} - \frac{49}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{225 - 720 - 50 - 245 - 882}{36}} = \sqrt{\frac{-1672}{36}} = \frac{1}{6}i\sqrt{1672}$$

$$4b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} + \frac{2}{a}\sqrt[3]{a^5b} - 3a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt[3]{a^2b^4} = 4\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} + 2\sqrt[3]{a^2b} - 3\sqrt[3]{ba^2} - b\sqrt[3]{a^2b} =$$
$$= 4\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} + 6b\sqrt[3]{a^2b}$$

1966. III. 24

77. óra

$$(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 &= (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = \\
&= \sqrt{2^3} + 3\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3} + 3\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{3^3} = \\
&= \sqrt{8} + 3\sqrt{4}\cdot\sqrt{3} + 3\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{27} = \\
&= \sqrt{2\cdot4} + 3\cdot2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot3\cdot\sqrt{2} + \sqrt{9\cdot3} = \\
&= 2\cdot\sqrt{2} + 6\cdot\sqrt{3} + 9\cdot\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = \\
&= 11\cdot\sqrt{2} + 9\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2})^2 &= (\sqrt[4]{8})^2 - 2\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2} + (\sqrt[4]{2})^2 = \\
&= \sqrt[4]{8^2} - 2\cdot\sqrt[4]{8\cdot2} + \sqrt[4]{2^2} = \\
&= \sqrt{8} - 2\cdot\sqrt[4]{16} + \sqrt{2} = \\
&= \sqrt{2\cdot4} - 2\cdot2 + \sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})^3 &= (\sqrt[3]{a})^3 + 3(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{b} + 3(\sqrt{b})^2\cdot\sqrt[3]{a} + (\sqrt{b})^3 = \\
&= a + 3\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b} + 3\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt[3]{a} + \sqrt{b^3} = \\
&= a + 3\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b} + 3b\cdot\sqrt[3]{a} + \sqrt{b^3} = \\
&= a + 3\sqrt[6]{a^4\cdot b^3} + 3\sqrt[6]{b^6 a^2} + \sqrt{b^3} = \\
&= a + \sqrt{b^3} + 3(\sqrt[6]{a^4 b^3} + \sqrt[6]{b^6 a^2}) + \sqrt{b^3}. =
\end{aligned}$$

5. Gyökvonás:

Gyökből úgy vonunk gyököt, hogy a gyök alatti mennyiségből a gyökkitevők szorzatával vonunk gyököt.

$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$ $\quad$ $\sqrt[7]{\sqrt{2}} = \sqrt[14]{2}$ $\quad$ $\sqrt[5]{\sqrt[3]{ab}} = \sqrt[15]{ab}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{3}$ $\quad$ $\sqrt[4]{\sqrt{3}} = \sqrt[8]{a}$ $\quad$ $\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^9}} = \sqrt[24]{x^9}$

Szorzat gyöke egyenlő a tényezők gyökeinek szorzatával.

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^3\cdot4} = \sqrt[6]{32}$$

$$\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{3^4\cdot2} = \sqrt[12]{162}$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt[5]{b}} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[15]{b} = \sqrt[15]{a^5 b}$$

$$\sqrt[5]{a\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[6]{x}} = \sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[15]{b}\cdot\sqrt[30]{x} = \sqrt[30]{a^6 b^2 x}$$

Többszöri gyökvonás olyan gyökvonással helyettesíthető, melynek gyökkitevője a gyökkitevők szorzata

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[12]{2}$ $\qquad \sqrt[14]{\sqrt{a}} = \sqrt[154]{a}$. $\qquad \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[6]{3}}} = \sqrt[72]{3}$

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} = \sqrt[30]{a}$

A szabály „n"-szeres gyökvonás esetén is érvényes .

A nevező gyöktelenítése:

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ A nevezőben nem lehet irracionális szám.

Hogy ne kelljen végtelen tizedes számmal osztanunk (mely eléggé körülményes művelet) ezért a törtet úgy alakítjuk át, hogy nevezője ne tartalmazzon gyökös kifejezést.

$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ $\qquad \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{5}$

$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$ $\qquad \frac{bx}{\sqrt{bc}} = \frac{bx \cdot \sqrt{bc}}{bc} = \frac{x \cdot \sqrt{bc}}{c}$ $\qquad b \neq 0$, $c \neq 0$

Ha a nevező gyökkitevője 2-nél nagyobb, akkor olyan gyökös mennyiséggel bővítjük a törtet, hogy a nevező gyök alatti mennyisége teljes hatvány legyen.

$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{2}$;

$\frac{5}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{3}$

$\frac{x}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x} = \sqrt[4]{x^3}$ $\qquad x \neq 0$

$\frac{a}{b \cdot \sqrt[6]{a}} = \frac{a \cdot \sqrt[6]{a^5}}{b \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}} = \frac{a \cdot \sqrt[6]{a^5}}{b \cdot a} = \frac{\sqrt[6]{a^5}}{b}$

Kéttagú nevező esetén felhasználhatjuk a nevezetes szorzatra vonatkozó azonosságot is:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

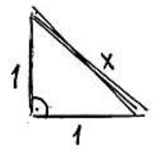
$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

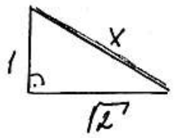
$$\frac{9}{3\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{9\cdot(3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2})}{9\cdot 3-2} = \frac{9\cdot(3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2})}{25} = \frac{27\cdot\sqrt{3}-9\cdot\sqrt{2}}{25}$$

$$\frac{a}{1-\sqrt{a}} = \frac{a(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \frac{a+a\sqrt{a}}{1-a} \qquad a \neq 1$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \sqrt{a}-\sqrt{b} \qquad a \neq b$$

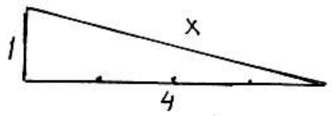


$1^2+1^2 = x^2$
$1+1 = x^2$
$2 = x^2$
$x = \sqrt{2}$



$1^2+\sqrt{2}^2 = x^2$
$1+2 = x^2$
$3 = x^2$
$x = \sqrt{3}$

$\sqrt{17}$



$1^2+4^2 = x^2$
$1+16 = x^2$
$x = \sqrt{17}$

Ha meg akarjuk szerkeszteni $\sqrt{n}$-et és ismerjük az 1-gyel kisebb mérőszámú szakasz $\sqrt{n-1}$-ét, akkor olyan derékszögű Δ-et szerkesztünk, mely befogói: $\sqrt{n-1}$ és 1, ekkor az átfogó $\sqrt{n}$.

1966. III. 24.

Házi feladat

$\sqrt{15}$ 130 o. 25–28

$\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8 \qquad \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^4} = \sqrt[5]{\frac{1}{(2^5)^4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^{20}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{a} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[r]{a^m}} = \sqrt[mr]{a^m} = \sqrt[r]{a}$

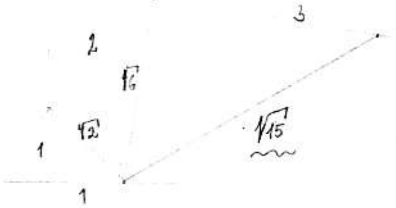
$\sqrt[8]{\sqrt[5]{x^{16}}} = \sqrt[40]{x^{16}} = \sqrt[5]{x^2} \qquad \sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[4]{a^2}\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[12]{a^6\cdot a^4} = \sqrt[6]{a^5}$

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x} = \sqrt[8]{x^4\cdot x^2\cdot x} = \sqrt[8]{x^7}$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a}{b}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a}{b}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt[2]{\frac{a}{b}}$

$\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)^2 = 4\cdot 3 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = -\frac{4}{3}\sqrt{3} + 11\frac{8}{9}$

$\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)^2 = \sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$
$= 2\sqrt{3}+2\sqrt{3-5} = 2\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{-2} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{-2})$



78. óra

1966. III. 29.

$$\left[\left(x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{4}}\right):\left(x^{-\frac{4}{5}}\right)\right]^{\frac{20}{19}} = \left[\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}\right):\left(x^{-\frac{4}{5}}\right)\right]^{\frac{20}{19}} = \left[\sqrt[12]{x^8\cdot x^9}:\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}\right]^{\frac{20}{19}} =$$

$$=\left[\sqrt[12]{x^{17}}:\sqrt[5]{\left(\frac{1}{x}\right)^4}\right]^{\frac{20}{19}} = \left[\sqrt[12]{x^{17}}:\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}\right]^{\frac{20}{19}} = \left[\sqrt[60]{\frac{x^{85}}{\frac{1}{x^{48}}}}\right]^{\frac{20}{19}} =$$

$$=\left[\sqrt[60]{x^{133}}\right]^{\frac{20}{19}} = \sqrt[19]{\sqrt[60]{x^{133\cdot 20}}} = \sqrt[1140]{x^{2660}} = \sqrt[3]{x^7}$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\left(\sqrt[4]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^7}\right) =$$

$$=\sqrt[60]{a^{40}\cdot a^{45}\cdot a^{48}}:\sqrt[24]{a^{30}\cdot a^{28}} = \sqrt[60]{a^{133}}:\sqrt[24]{a^{58}} =$$

$$=\frac{\sqrt[60]{a^{133}}}{\sqrt[24]{a^{58}}} = \sqrt[240]{\frac{a^{532}}{a^{580}}} = \sqrt[240]{\frac{a^{266}}{a^{290}}} = \sqrt[240]{\frac{a^{133}}{a^{145}}} = \sqrt[240]{a^{133-145}} =$$

$$=\sqrt[240]{a^{-12}} = \sqrt[20]{a^{-1}} = \sqrt[20]{\frac{1}{a}} = \sqrt{} = \frac{1}{\sqrt[20]{a}}$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\left(\sqrt[4]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^7}\right) = \sqrt[60]{a^{40}\cdot a^{45}\cdot a^{48}}:\sqrt[12]{a^{15}\cdot a^{14}} =$$

$$=\sqrt[60]{a^{133}}:\sqrt[12]{a^{29}} = \sqrt[60]{a^{133}:a^{145}} = \sqrt[60]{a^{-12}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[5]{a}}}};$$

1966. III. 29

135   33, .. 4, .. 5, .. 6

78. Házi feladat

$$\left(\sqrt[5]{c^4 \cdot \sqrt[3]{c^2}} \cdot \sqrt{c\sqrt[4]{c^3}}\right) : \sqrt[24]{c^{41}} = \left(\sqrt[5]{c^4} \cdot \sqrt[15]{c^2} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt[8]{c^3}\right) : \left(\sqrt[24]{c^{41}}\right) =$$

$$\left(\sqrt[15]{c^{12} \cdot c^2} \cdot \sqrt[8]{c^3 \cdot c^4}\right) : \sqrt[24]{c^{41}} = \sqrt[240]{c^{14 \cdot 16} \cdot c^{7 \cdot 30}} : \sqrt[24]{c^{41}} = \sqrt[240]{c^{224+210}} : \sqrt[240]{c^{410}} =$$

$$\sqrt[240]{\frac{c^{434}}{c^{410}}} = \sqrt[240]{c^{24}} = \sqrt[10]{c}.$$

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}; \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}; \quad \frac{\sqrt{uv} - u\sqrt{v}}{\sqrt{uv}} = \frac{uv - u\sqrt{uv^2}}{uv} = \frac{uv - uv\sqrt{u}}{uv} = 1 - \sqrt{u}.$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{a}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{a^4}}{a}; \quad \frac{1}{\sqrt[5]{4a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(2a)^2}} = \frac{\sqrt[5]{(2a)^3}}{2a},$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}+3}{2};$$

$$\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b}} = \frac{b(a+\sqrt{a^2-b})}{a^2-(a^2-b)} = -\frac{ba+b\sqrt{a^2-b}}{b} = -(a+\sqrt{a^2-b}) = -a-\sqrt{a^2-b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}; \quad \frac{p-4q}{\sqrt{p}-2\sqrt{q}} = \frac{(p-4q)(\sqrt{p}+2\sqrt{q})}{p-4q} = \sqrt{p}+2\sqrt{q}.$$

1966. III. 31.

79. óra.

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad (x - x_1)(x - x_2) = 0$$
$$x_2 = -\frac{2}{3} \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$$
$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \quad /6$$
$$6x^2 + x - 2 = 0$$

$$\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} = \frac{5 \cdot (4+\sqrt{11})}{16-11} + \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} - \frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} =$$

$$= \frac{5 \cdot (4+\sqrt{11})}{5} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} + \frac{6(\sqrt{7}+2)}{3} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} = (4+\sqrt{11}) + \frac{3-\sqrt{7}}{2} + 2(\sqrt{7}+2) - \frac{\sqrt{7}-5}{2}$$

$$= \frac{2(4+\sqrt{11}) + 3 - \sqrt{7} + 4(\sqrt{7}+2) - \sqrt{7} + 5}{2} =$$

$$= \frac{8 + 2\sqrt{11} + 3 - \sqrt{7} + 4\sqrt{7} + 8 - \sqrt{7} + 5}{2} = \frac{24 + 2\sqrt{11} - 2\sqrt{7} + 4\sqrt{7}}{2} = 12 + \sqrt{11} - \sqrt{7} + 2\sqrt{7}$$

$$\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{16-11} + \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} - \frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} =$$

$$= 4 + \sqrt{11} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} - 2(\sqrt{7}+2) - \frac{\sqrt{7}-5}{2} = 8 + 2\sqrt{11} + 3 - \sqrt{7} - 4\sqrt{7} - 8 - \sqrt{7} + 5$$

$$= \frac{8 + 2\sqrt{11} - 6\sqrt{7}}{2} = \underline{\underline{4 + \sqrt{11} - 3\sqrt{7}}}$$

$|x-6|<2 \qquad |x-6| = x-6 \qquad |x-6| = 6-x$

$$\begin{array}{ll} x-6<2 & 6-x<2 \\ \underline{x \le 8} & -x<-4 \\ \underline{x \ge 6} & \underline{x>4} \\ & \underline{x<6} \end{array}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5}-2} - \frac{2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}+1}{6} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} - \frac{2(\sqrt{3}+2)}{3-4} + \frac{\sqrt{3}+1}{6} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{3(\sqrt{5}+2)}{1} - \frac{2(\sqrt{3}+2)}{-1} + \frac{\sqrt{3}+1}{6} =$$

$$= \frac{8(\sqrt{5}+\sqrt{2}) + 18(\sqrt{5}+2) + 12(\sqrt{3}+2) + \sqrt{3}+1}{6} =$$

$$= \frac{8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 18\sqrt{5} + 36 + 12\sqrt{3} + 24 + \sqrt{3}+1}{6} =$$

$$= \frac{61 + 26\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 13\sqrt{3}}{6}$$

$$\begin{array}{ll} ax^2 + c = 0 & ax^2 + bx = 0 \\ ax^2 = -c & x(ax+b) = 0 \\ \underline{x = \sqrt{\frac{c}{a}}} & \underline{x = -\frac{b}{a}} \end{array}$$

$$\left(\frac{2-a\sqrt{a}}{2a-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{2+a\sqrt{a}}{2a+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right) : \left(\frac{4+a^2}{4a-1}\right) =$$

$$= \left[\frac{(2-a\sqrt{a})(2a+\sqrt{a})}{4a^2-a} + \sqrt{a}\right]\left[\frac{(2+a\sqrt{a})(2a-\sqrt{a})}{4a^2-a} - \sqrt{a}\right] : \left(\frac{4+a^2}{4a-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{4a^2 - 2a^2\sqrt{a} + 2\sqrt{a} - a^2}{4a^2-a} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{4a + 2a^2\sqrt{a} - 2\sqrt{a} - a^2}{4a^2-a}\right) : \left(\frac{4+a^2}{4a-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{3a^2 - 4a^2\sqrt{a} + 4a^2\sqrt{a} - a\sqrt{a}}{4a^2-a} \cdot \frac{4a - a^2 - 4a^2\sqrt{a} - 4a^2\sqrt{a} + a\sqrt{a}}{4a^2-a}\right) : \frac{4+a^2}{4a-1} =$$

$$= \frac{3a^2 - a\sqrt{a}}{4a^2-a} \cdot \frac{4a - a^2 - 8a^2\sqrt{a} + a\sqrt{a}}{4a^2-a} : \frac{4+a^2}{4a-1} =$$

$$= \frac{12a^3 - 4a^2\sqrt{a} - 3a^4 + a^3\sqrt{a} - 24a^4\sqrt{a} + 8a^3\sqrt{a^2} + 3a^3\sqrt{a} - a^3}{16a^4 - 8a^3 + a^2} : \frac{4+a^2}{4a-1} =$$

$$\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \frac{1}{a-\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-a^2+b^2} + \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} + \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = \frac{2a+\cancel{(-1\sqrt{a^2-b^2}+1)}\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2a}{b^2}}}\ ; \qquad \sqrt{5^2}-3^2 = 5-9 = -4 \qquad \sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

$$\frac{4x}{3} \leqq \frac{2}{3} + x \quad /\cdot 3 \qquad\qquad x_1 = -1 \qquad (x-x_1)(x-x_2) = 0$$

$$x_2 = 2 \qquad (x+1)(x-2) = 0$$

$$4x \leqq 2 + 3x \qquad\qquad \underline{\underline{x^2 - x - 2 = 0}}$$

$$\underline{\underline{x \leqq 2}}$$

79. *Házi feladat.*

135 44 52 136 53b

$$\left(\frac{2-a\sqrt{a}}{2a-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{2+a\sqrt{a}}{2a+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right) : \frac{4+a^2}{4a-1} =$$

$$= \frac{2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}(2a-\sqrt{a})}{2a-\sqrt{a}} \cdot \frac{2+a\sqrt{a}-\sqrt{a}(2a+\sqrt{a})}{2a+\sqrt{a}} \cdot \frac{4a-1}{4+a^2} =$$

$$= \frac{2-a\sqrt{a}+2a\sqrt{a}-a}{2a-\sqrt{a}} \cdot \frac{2+a\sqrt{a}-2a\sqrt{a}-a}{2a+\sqrt{a}} \cdot \frac{4a-1}{4+a^2} =$$

$$= \frac{2+a\sqrt{a}-a}{2a-\sqrt{a}} \cdot \frac{2-a\sqrt{a}-a}{2a+\sqrt{a}} \cdot \frac{4a-1}{a^2+4} =$$

$$= \frac{4+2a\sqrt{a}-2a-2a\sqrt{a}-a^3+a^2\sqrt{a}-2a-a^2\sqrt{a}+a^2}{4a^2-a} \cdot \frac{4a-1}{a^2+4} =$$

$$= \frac{(4-4a+a^2-a^3)(4a-1)}{(4a^2-a)\cdot(4+a^2)} = \frac{4-4a+a^2-a^3}{4a+a^3};$$

$$(2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-7\sqrt{2})(\sqrt{a}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2})=$$

$$-28\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+20\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+8\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{6}+5\sqrt{a}\cdot\sqrt{3}-7\sqrt{a}\cdot\sqrt{2}-4\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}-10\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+14\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=$$

$$=\underline{-56}+20\sqrt{6}+8\sqrt{12}+2\sqrt{6a}+5\sqrt{3a}-7\sqrt{2a}-4\sqrt{18}\underline{-30}+14\sqrt{6}=$$

$$=-86+20\sqrt{6}+16\sqrt{3}+2\sqrt{6a}+5\sqrt{3a}-7\sqrt{2a}-12\sqrt{2}+14\sqrt{6}=$$

$$=-86+34\sqrt{6}+5\sqrt{3a}+2\sqrt{6a}-7\sqrt{2a}-12\sqrt{2}=$$

$$=-86+34\sqrt{6}+5\sqrt{a}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{6}-7\sqrt{a}\cdot\sqrt{2}-12\sqrt{2}=$$

$$=-86+\sqrt{6}\cdot(34+2\sqrt{a})+5\sqrt{3a}-\sqrt{2}(7\sqrt{a}+12)$$

$$\sqrt{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}=\sqrt{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})}=\sqrt{a+b-a}=\sqrt{b}$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$$

$$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{a-\sqrt{a^2-4a}}-\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{a+\sqrt{a^2-4a}}\right):\frac{\sqrt{a^2-4a}}{2}=$$

$$=\frac{(a+\sqrt{a^2-4a})(a+\sqrt{a^2-4a})-(a-\sqrt{a^2-4a})(a-\sqrt{a^2-4a})}{(a-\sqrt{a^2-4a})(a+\sqrt{a^2-4a})}:\frac{\sqrt{a^2-4a}}{2}=$$

$$=\frac{(a^2+2a\sqrt{a^2-4a}+a^2-4a)-(a^2-2a\sqrt{a^2-4a}+a^2-4a)}{a^2-a^2+4a}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-4a}}=$$

$$=\frac{a^2+2a\sqrt{a^2-4a}+a^2-4a-a^2+2a\sqrt{a^2-4a}-a^2+4a}{+4a}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-4a}}=$$

$$=\frac{4a\sqrt{a^2-4a}}{+4a}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-4a}}=\frac{2}{+1}=+2$$

$$\frac{12}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}=\frac{12\cdot\sqrt[3]{11^2}*}{\sqrt[3]{11}*\cdot\sqrt[3]{11^2}*}=\frac{12\cdot(\sqrt[3]{11^4}-\sqrt[3]{5^4})^2}{(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5})^3}=\frac{12(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5})^2}{11-5}=$$

$$=\frac{12(\sqrt[3]{121}-2\sqrt[3]{11\cdot5}+\sqrt[3]{25})}{6}=2(\sqrt[3]{121}-2\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25}).$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2-\sqrt{3}})+(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})}{(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{3}-\sqrt{2-\sqrt{3}})}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}=$$

$$\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2-\sqrt{3}}+3-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+2\sqrt{2}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{1}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3-(2+\sqrt{3})(\sqrt{2-\sqrt{3}})+2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(2-\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}})}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{1}}=$$

$$=[3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}(2-\sqrt{2})] \qquad \frac{3+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})(\sqrt{2-\sqrt{3}})+(2-\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}})+(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{1}}=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})(\sqrt{2-\sqrt{3}})+(2-\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2})-\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{1}}$$

1966. IV. 5.

80. óra

Irracionális egyenletek.

Azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlen a gyökjel alatt fordul elő, irracionális egyenleteknek nevezzük.
Úgy oldjuk meg őket, hogy mindkét oldalukat azonos hatványra emeljük. Így az egyenletet racionálissá alakítjuk át, majd az átalakított egyenlet gyökei közül behelyettesítéssel kiválasztjuk azokat, melyek az eredeti egyenletnek is gyökei.

$$\sqrt{2x-5}=1 \qquad 2x-5=1 \qquad \text{pl. } \sqrt{2\cdot 3-5}=1$$

$$(\sqrt{2x-5})^2=1^2 \qquad 2x=1+5 \qquad \sqrt{6-5}=1$$

$$2x=6 \qquad \sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{(2x-5)^2}=1 \qquad \underline{x=3} \qquad 1=1$$

$$\sqrt{2x-6}=\sqrt{x+4}-1$$

$$2x-6=x+4-2\sqrt{x+4}+1$$

$$2x-6-x-4-1=-2\sqrt{x+4}$$

$$\frac{x-11}{-2}=\sqrt{x+4}$$

$$\left(\frac{x-11}{-2}\right)^2=x+4$$

$$x^2-22x+121=4x+16$$

$$x^2-26x+105=0$$

$$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_{12}=\frac{26}{2}\pm\sqrt{13^2-105}$$

$$x_{12}=13\pm\sqrt{169-105}$$

$$x_{12}=13\pm\sqrt{64}$$

$$x_{12}=13\pm 8$$

$$x_1=21 \qquad \underline{x_2=5}$$

$\sqrt{2.21-6} \neq \sqrt{21+4} - 1$

$\sqrt{36} \neq \sqrt{25} - 1$

$6 \neq 5 - 1$

$\sqrt{10-6} = \sqrt{\cancel{10}+4} - 1$

$\sqrt{4} = \sqrt{9} - 1$

$2 = 3 - 1$

$\underline{2 = 2}$

$\sqrt{3x+7} = x+1$

$3x+7 = (x+1)^2$

$3x+7 = x^2+2x+1$

$0 = x^2 - x - 6$

$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 q}$

$x_{12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}$

$x_{12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

$x_{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_{1} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$ $\quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$

80. Házi feladat

$\sqrt{x-3} = 5$

$x-3 = 25$

$\underline{x = 28}$

$3\sqrt{4x+1} = 21$

$9(4x+1) = 21^2$

$36x+9 = 441$

$36x = 432$

$\underline{x = 12}$

$4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+6} = 1\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{2x+6} = -3$

$\frac{1}{4}(2x+6) = 9$

$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 9$

$x+3 = 18$

$\underline{x = 15}$

$\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3}$

$x-2 = 2x-3$

$\underline{1 = x}$

$\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{10}$

$\sqrt{5-x} = \sqrt{10} - \sqrt{5+x}$

$5-x = 10 - 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{5+x} + 5 + x$

$-10-2x = -2\sqrt{50+10x}$

$100+40x+4x^2 = 4(50+10x)$

$100+40x+4x^2 = 200+40x$

$4x^2 = 100$

$x^2 = 25$

$\underline{x_1 = 5}$ $\quad \underline{x_2 = -5}$

$$\frac{a^{-4} b^{-3} c^{-2}}{x^{-5} y^{-6} z^{-6}} : \frac{a^0 b^2 c}{x^0 y^{-3} z^4} = \frac{a^{-4} b^{-3} c^{-2} y^{-3} z^4}{x^{-5} y^{-6} z^{-6}\; b^2 c} = \frac{x^5 y^6 z^6\; z^4}{b^2 c\, a^4 b^3 c^2 y^3} = \frac{x^5 y^3 z^{10}}{a^4 b^5 c^3}$$

$$-\frac{5 c^3 a^{-n} d^m}{7} : 2 c^3 a^n d^{-2} = \frac{5 \cdot c^3 a^{-n} d^m}{-7 c^3 a^n d^{-2} \cdot 2} = -\frac{5}{14} a^{-m-n} d^{m+2}$$

$$\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{\sqrt{5}-5}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} =$$

1966. IV.

81. óra.

$$\sqrt{2x-7} = 5$$
$$2x-7 = 25$$
$$2x = 32$$
$$x = 16$$

p. $\sqrt{32-7} = 5$
$$\sqrt{25} = 5$$
$$5 = 5$$

$$\sqrt{3x+7} = x+1$$
$$3x+7 = x^2+2x+1$$
$$0 = x^2 - x - 6$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$$

$$\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 1$$
$$\sqrt{5-x} = 1 - \sqrt{5+x}$$
$$5-x = 1 - 2\sqrt{5+x} + 5 + x$$
$$2\sqrt{5+x} = 2x + 1$$
$$4(5+x) = 4x^2 + 4x + 1$$
$$20 + 4x = 4x^2 + 4x + 1$$
$$19 = 4x^2$$
$$x^2 = \frac{19}{4}$$
$$x_{12} = \pm\sqrt{\frac{19}{4}}$$

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} - 2\sqrt{x} = 0$$
$$\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} = 2\sqrt{x}$$
$$1 + 2x - 2\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt{1-2x} - 1 + 2x = 4x$$
$$-2\sqrt{(1+2x)(1-2x)} = 4x - 2 - 4x$$
$$2\sqrt{1-4x^2} = -2$$
$$4 - 16x^2 = 0$$
$$16x^2 = 4$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+4}} = \sqrt{3x-5\sqrt{x+4}}$$
$$x + \sqrt{x+4} = 3x - 5\sqrt{x+4}$$
$$6\sqrt{x+4} = 2x$$
$$36x + 144 = 4x^2$$
$$x^2 - 9x - 36 = 0$$

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} + 36}$$
$$x_{12} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{20,25 + 36} = 4,5 \pm \sqrt{56,25}$$
$$x_{12} = 4,5 \pm 7,5 \qquad x_1 = 12 \qquad x_2 = -3$$

81. Házi feladat

1966. IV.

$$\sqrt{2x-5} + \sqrt{5-x} = 1$$
$$2x - 5 + 2\sqrt{2x-5}\cdot\sqrt{5-x} + 5 - x = 1$$
$$2\sqrt{(2x-5)(5-x)} = 1 - 5 + x + 5 - 2x$$
$$2\sqrt{10x - 25 - 2x^2 + 5x} = 1 - x$$
$$2\sqrt{15x - 25 - 2x^2} = 1 - x$$
$$4(15x - 25 - 2x^2) = 1 - 2x + x^2$$
$$60x - 100 - 8x^2 = 1 - 2x + x^2$$
$$0 = 9x^2 - 62x + 101$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{62 \pm \sqrt{3844 - 3636}}{18}$$
$$x_{12} = \frac{62 \pm \sqrt{208}}{18} = \frac{62 \pm 14,42}{18}$$
$$x_1 = \frac{76,42}{18} \doteq 4,2$$
$$x_2 = \frac{47,58}{18} \doteq 2,6$$

$$\sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+2} = 1$$
$$\sqrt{2x-5} = 1 + \sqrt{2x+2}$$
$$2x - 5 = 1 + 2\sqrt{2x+2} + 2x + 2$$
$$-8 = 2\sqrt{2x+2}$$
$$64 = 4(2x+2)$$
$$64 = 8x + 8$$
$$8 = x + 1$$
$$7 = x$$

3

$$\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x+2} = 1$$

$$2x - 5 + 2\sqrt{(2x-5)(2x+2)} + 2x + 2 = 1$$

$$2\sqrt{4x^2 - 10x + 4x - 10} = -4x + 4$$

$$\sqrt{4x^2 - 6x - 10} = 2 - 2x$$

$$4x^2 - 6x - 10 = 4 - 8x + 4x^2$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

$$-\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x+2} = 1$$

$$\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{2x-5}$$

$$2x + 2 = 1 + 2\sqrt{2x-5} + 2x - 5$$

$$6 = 2\sqrt{2x-5}$$

$$36 = 4(2x-5)$$

$$36 = 8x - 20$$

$$56 = 8x$$

$$x = 7$$

$$-\sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+2} = 1$$

$$2x - 5 + 2\sqrt{(2x-5)\cdot(2x+2)} + 2x + 2 = 1$$

$$2\sqrt{4x^2 - 10x + 4x - 10} = -4x + 4$$

$$\sqrt{4x^2 - 6x - 10} = 2 - 2x$$

$$4x^2 - 6x - 10 = 4 - 8x + 4x^2$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

1966. IV. 12. 82. óra

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x-2} = 7 \quad /^2$$

$$x - 5 + 2\sqrt{(x-5)(x-2)} + x - 2 = 49$$

$$2\sqrt{x^2 - 5x - 2x + 10} = 56 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 28 - x \quad /^2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 784 - 56x + x^2$$

$$49x = 774$$

$$x \doteq 16 \quad (15{,}79)$$