

A matematikai n. teljes indukció -

egy fontos bizonyítási módszer. Ennek segítségével beláthatjuk, hogy minden természetes N számra érvényes valamelyes tétel.
Vagyis pl. a számtani sorozat ismert képletét.

ahol $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
melyben a kezdeti jelentése ismert ennek bizonyítását az $a_n + d = a_{n+1}$ rekurzív képlet segítségével a következőképpen végezzük.

$$a_1 = a_1 + 0$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot d$$

$$a_2 = a_1 + 1 \cdot d$$

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot d$$

stb

Az az ilyen módon végzett "nehézség elv"
 n -re a számtani sorozat helyességét arra következtetünk, hogy a tétel teljes, minden n -re nem teljes indukciót követünk. Ez a nem teljes indukció sokszor meglepő, helytelen megállapításra vezet, amiért nagy kudarcai jelentősege van.

Ezzel azonban a teljes n -re való indukció a bizonyítások teljes matematikai módszere. A teljes indukciótól való bizonyítás valamilyen indukciótól megállapított tétel bizonyításra minden természetes n -számra.

A bizonyítás 2 lépésben történik:

1. Bizonyítjuk, hogy a tétel érvényes $n=1$ esetben
2. Vagyis megmutatjuk, hogy a bizonyításból, ha a tétel érvényes valamely n számra, akkor érvényes $n+1$ -re is.

Hogy ezáltal teljes értékű bizonyítás végezzük a kör. Köppen mondhatjuk:

Tegyük fel, hogy elvégeztük a bizonyítás mindkét lépését. Ha ennek ellenére a tétel valamely n számra mégsem lenne igaz, akkor 1, 2, 3... számokban kezdve el kellene jutnunk egy ellentétes n számhoz, melyre a tétel már nem érvényes. De az első lépés következtében $k \neq 1$. Ezért az ilyen k -kák egyáltalán nem léteznek.

Térít az ilyen k -nak egy- n ét megjelölés
 kell lennie, és akkor létező kellene legyen
 n száma, melyre a képlet még érvényes, úgy,
 hogy $k = n + 1$. De a képlet érvénytelenné
 válna, erre a k száma, ami nem lehetséges,
 ha a II. lépést is helyesen hajtottuk végre.

81. óra

1967.
 IV. 29.

$$a_m = a_1 + (m-1) \cdot d$$

① $m=1$

$$a_1 = a_1 + (1-1) \cdot d$$

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot d$$

$$\underline{a_1 = a_1} \quad - \text{reflexív törvényszerűség}$$

②

$$a_m = a_1 + (m-1) \cdot d$$

$$a_{m+1} = a_1 + (m+1-1) \cdot d$$

$$a_{m+1} = a_1 + m \cdot d \quad - \text{érték helyes}$$

$$a_{m+1} = \underline{a_m} + d$$

$$a_{m+1} = \underline{a_1 + (m-1) \cdot d} + d$$

$$a_{m+1} = a_1 + d \cdot m - d + d$$

$$a_{m+1} = a_1 + m \cdot d$$

$$S_m = a_1 \frac{q^m - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$$

$$\textcircled{1} \quad S_m = a_1 \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

$$\underline{S_1 = a_1}$$

$$\textcircled{2} \quad S_m = a_1 \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

$$S_{m+1} = a_1 \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_{m+1} = S_m + a_{m+1} = a_1 \frac{q^m - 1}{q - 1} + a_1 q^m$$

$\downarrow$
 $S_m \quad a_{m+1}$

$$S_{m+1} = \frac{a_1(q^m - 1) + a_1 q^m(q - 1)}{q - 1}$$

$$S_{m+1} = \frac{a_1 q^m - a_1 + a_1 q^{m+1} - a_1 q^m}{q - 1}$$

$$S_{m+1} = \frac{a_1 q^{m+1} - a_1}{q - 1}$$

$$S_{m+1} = a_1 \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$$

~~~~~

1967. V. 1.

81. 2.



$$0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n.(n+1) = \frac{1}{3} \cdot n(n+1)(n+2)$$

$$\textcircled{1} \quad n.(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$1.0 = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \cancel{2} \cdot 1.2$$

$$\underline{\underline{0 = 0}}$$

$$\textcircled{2} \quad S_{n_1} = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{3} n(n^2 + 3n + 2)$$

$$S_{n_1} = \frac{1}{3} n^3 + n^2 + \frac{2}{3} n$$

$$S_{n_2} = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{3} (n^3 + 6n^2 + 11n + 6)$$

$$S_{n_2} - S_{n_1} = (n+1)(n+2)$$

$$n^2 + 3n + 2 = \left( \frac{1}{3} n^3 + 2n^2 + \frac{11}{3} n + 2 \right) - \left( \frac{1}{3} n^3 + n^2 + \frac{2}{3} n \right)$$

$$\underline{\underline{n^2 + 3n + 2 = n^2 + 3n + 2}}$$

$$1.2 + 2.3 + \dots + n.(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$\textcircled{1} \quad n=1 \rightarrow n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$1.2 = \frac{1}{3} \cdot 1.2.3$$

$$\underline{\underline{2 = 2}}$$

$$\textcircled{2} \quad S_{n_1} = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \quad S_{n_2} = S_{n_1} + a_{n+1}$$

$$S_{n_2} = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

$$\frac{1}{3} (n^2 + 3n + 2)(n+3) = \frac{1}{3} n(n^2 + 3n + 2) + (n^2 + 3n + 2)$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{3} 3n^2 + \frac{1}{3} 2n + n^2 + 3n + 2 = \frac{1}{3} n^3 + n^2 + \frac{2}{3} n + n^2 + 3n + 2}}$$

$$\underline{\underline{2 = 2}}$$

Egy mezei fücsónál az első méter helyéig 100 Kcs.  
Minden 100 méter 10 Kcs-nal kerül több. Milyen  
melyre jutottak, ha a helyéig 1180 Kcs.

$$a_1 = 100 \text{ Kcs}$$

$$d = 10 \text{ Kcs}$$

$$S_m = 1180 \text{ Kcs}$$

$$m = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m \rightarrow a_m = \frac{2S_m - a_1 \cdot m}{m}$$

$$a_m \quad m(a_1 + md - d) = 2S_m - a_1 m$$

$$ma_1 + m^2d - md + a_1 m - 2S_m = 0$$

$$m^2d + m(2a_1 - d) - 2S_m = 0$$

$$10m^2 + 190m - 2360 = 0$$

$$m^2 + 19m - 236 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 944}}{2} = \frac{-19 \pm \sqrt{1305}}{2}$$

$$m_{1,2} = \frac{-19 \pm 36}{2} \quad m = \frac{17}{2} = 8,5$$

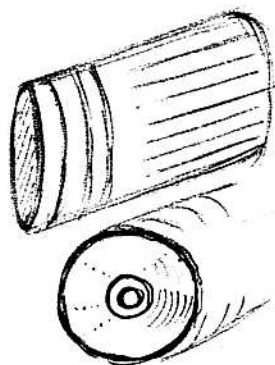
kb. 8,5 m-nél tartanak.

A 2,5 sugarú és 25 cm hossz. csőre 1/4 mm vastag  
falakkal csévélnék addig, amíg a fonalileg  
vastagsága 5 cm lesz. Milyen hosszú a fonál.



$$25 \text{ cm} = 250 \text{ mm} \quad 250 \text{ mm} / \frac{1}{4} \text{ mm} = 1000$$

$$1000 - 1 = 999 \text{ menet fél egy átlós.}$$



$$a_1 = r_1 = 2\pi \cdot 25 \text{ [mm]}$$

$$k_2 = 2\pi \cdot (25 + \frac{1}{4})$$

$$k_3 = 2\pi \cdot (25 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$$

...

$$k_n = 2\pi \cdot (75)$$

$$a_m = a_1 + (m-1) \cdot d$$

$$a_n = a_1 + md - d$$

$$m = \frac{a_m - a_1 + d}{d}$$

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m$$

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot \frac{a_m - a_1 + d}{d}$$

$$a_1 = 2\pi \cdot (25 + 0)$$

$$a_m = 2\pi \cdot (25 + 50)$$

$$d = 2\pi \cdot \frac{1}{4}$$

$$m = ?$$

$$S_m = ??$$

$$l = S_m \cdot (999 + 1)$$

$$l = \frac{2\pi(25+75)}{2} \cdot \frac{2\pi(75-25) + 0,25}{0,25} \text{ [mm]}$$

$$l = 100\pi \cdot \frac{100\pi + 0,25}{0,25}$$

$$l = 400\pi \cdot (100\pi + 0,25)$$

$$l = 1256,68 \cdot (314,159 + 0,25)$$

$$l = 1256,68 \cdot 314409$$

$$l = 385106,5 \cdot (999 + 1)$$

$$l = 385 \text{ km}$$

Gesam bei annähernd a mit dem verfahren  
31. die logarithmen mit  $a_1 = 2$   $q = \frac{5}{6}$ .

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{31} = a_1 \cdot q^{30}$$

$$a_{31} = 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30}$$

$$\log a_{31} = \log 2 + 30 \cdot \log 5 - 30 \cdot \log 6$$

$$\log a_{31} = 0,3010 + 30 \cdot 0,6990 - 30 \cdot 0,7782$$

$$\log a_{31} = 0,3010 + 20,9700 - 23,3460$$

$$\log a_{31} = -2,0750 = -2 + 0,075$$

$$a_{31} = 1,19/100$$

$$\begin{array}{r} 0,3010 \\ 20,9700 \\ \hline 21,2710 \\ 23,3460 \\ \hline 21,2710 \\ \hline 02,0750 \end{array}$$

$$118,85$$

Aufgabe 32 in 243 hier 4 stufen ugg, logg mit  
a gegeben 2 stufen ugg mit dem verfahren.

$$Q = \sqrt[n]{q}$$

$$Q = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \sqrt[5]{7,5}$$

$$\log Q = \frac{1}{5} \cdot \log 7,5$$

$$\log Q = \frac{1}{5} \cdot 0,8751$$

$$\log Q = 0,17505$$

$$Q = 1,496...$$

$$Q = 1,5$$

| 32.                          | $a_1$     |
|------------------------------|-----------|
| $32 \cdot 1,5 = 48,0$<br>160 | $a_2$ /// |
| $48 \cdot 1,5 = 72$<br>240   | $a_3$ /// |
| $72 \cdot 1,5 = 108$<br>360  | $a_4$ /// |
| $108 \cdot 1,5 = 162$<br>540 | $a_5$ /// |
| $162 \cdot 1,5 = 243$<br>810 | $a_6$ /// |

1967. V. 3.

82. oldal

Az első dolgomat B példái:

$$1.) \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{2} = 4$$

$$2^{\frac{x+3}{2}} \cdot 2^{\frac{x-3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^2$$

$$2^{\frac{x+3}{2} + \frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}} = 2^2$$

$$\frac{2x^2 + 6x + 2x - 6 + x}{4x} = 2$$

$$8x + 24 + 4x - 12 + 2x = 16x$$

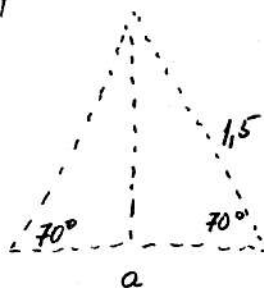
$$2x = 12$$

$$\underline{x = 6}$$

$$2.) \frac{34}{5-3i} = \frac{34(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{170 + 102i}{25 + 9} = \frac{170 + 102i}{34} = \frac{34(5+3i)}{34} = \underline{5+3i}$$

$$|5+3i| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx \underline{5,8310}$$

3.)



$$\cos 70^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{2,5}$$

$$\cos 70^\circ \approx 0,342$$

$$\frac{a}{2} = 2,5 \cdot 0,342$$

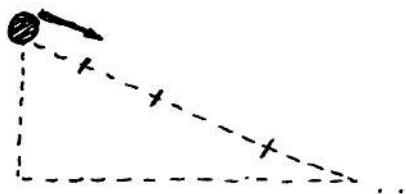
$$\underline{a = 1,71 \text{ m}}$$

1. Válaszd meg, melyik legördülő görgő az első mp.-ben 10 dm-  
ulal, lesz meg, és az egész lejtőn 5 mp alatt fut le.  
Hány m-t kell meg az utolsó méterpáron?

2.  $a_1 = 2$   $q = 2$   $a_8 = ?$   $a_{13} = ?$

3. Szám. ki  $S_n$ -t.  $a_1 = 3$   $q = 2$   $n = 11$

4.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3 = \frac{1}{4} \cdot m^2 \cdot (m+1)^2$



$$s = \frac{at^2}{2} \rightarrow a = \frac{2s}{t^2}$$

$$a = \frac{2 \cdot 1}{1^2} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$s_3 = \frac{at^2}{2} = \frac{2 \cdot 5^2}{2} = 25 \text{ m}$$

$$x = 25 - 16 = 9 \text{ m}$$

$$\cancel{s_m = a_5 = 25 \text{ m}}$$

$$s_4 = \frac{at^2}{2} = \frac{2 \cdot 4^2}{2} = 16 \text{ m}$$

2.  $a_1 = 2$   $q = 2$   $a_8 = a_1 q^{8-1} = a_1 q^7 = 2 \cdot 2^7 = 2^8 = a_8$   
 $a_{13} = a_1 q^{12} = 2^{13} = a_{13}$

3.  $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 3(2^{11} - 1)$

4.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3 = \frac{1}{4} m^2 (m+1)^2$

a.  $1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 4$   
 $\underline{\underline{1 = 1}}$

b.  $\frac{1}{4} m^2 (m+1)^2 + (m+1)^3 = \frac{1}{4} (m+1)^2 (m+2)^2$

$$\frac{1}{4} m^2 (m^2 + 2m + 1) + (m+1)^3 = \frac{1}{4} (m^2 + 2m + 1) (m^2 + 4m + 4)$$

$$\frac{1}{4} m^4 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{4} m^2 + m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = \frac{1}{4} (m^4 + 2m^3 + m^2 + 4m^3 + 8m^2 + 4m + 4m^2 + 8m + 4)$$

$$3m + 1 = \frac{1}{4} (12m + 4)$$

$$3m + 1 = 3m + 1$$

$$\underline{\underline{1 = 1}}$$

## A végtelen mértani sor.

az olyan mértani sor, melyben a tagok száma végtelen nagy.

Általános alakja:  $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, aq^{n+1}, \dots$  in. inf.

A végtelen mértani sorokra nemre legfontosabb a tagok összegének ismerete. Ez közvetlen ismeretből állhat a tagok végtelen nagy száma miatt nem határozható meg.

Meghatározhatjuk azonban a véges mértani sor összegképletét segítségével, ha abban  $n = \infty$ -t helyettesítünk. Vagyis a tagok száma végtelen nagyra nő.

A végtelen mértani sor minél több tagot adunk össze, az összeg annál jobban megközelíti a végtelen mértani sor tagjainak összegét.

Igy a végtelen mértani sor összege az a határérték, amellyre a véges mértani sor tagjainak összege közeledik, ha a tagok száma végtelen nagyra lesz.

$$3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \dots$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

[limes]

○ 1,  $|q| > 1 \rightarrow S = \infty$   $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$

Az ilyen végtelen mértani sor szétartó, divergens.

○ 2,  $q = 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$   $S_n = na$   $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty = S$

$q = -1$   $a, -a, a, -a, \dots$  oscilláló sorozat váltak. előjel.

Az összeg határozatlan oszcillál, páros  $n$  pozitív számokban fordulnak elő a tagok.

○ 3,  $|q| < 1$

$S = 0$  v.  $a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1(1 - q^n)}{-1(1 - q)} \cdot a =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a = \frac{1 - 0}{1 - q} \cdot a = S$$

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

konvergens, összeadható végtelen mért. sor.

A végelen mértani sorok csak akkor vannak, véges és meghatározott összege, ha állandó hányadosnak abszolút értéke kisebb az egységnél. Ezt az összeget megkérjük, ha a sorok első tagját osztjuk az egységgel, és a hányadosnak különbségével:

$$\underline{\underline{S = \frac{a}{1-q}}}$$

Egy végtelen mértani sorban  $a_1 = 8$   $q = \frac{1}{5}$ .  
Mennyi a tagok összege?

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{5}} = \frac{8}{\frac{4}{5}} = \frac{40}{4} = \underline{\underline{10 = S}}$$

$$a = 1 \quad q = \frac{1}{2} \quad - \text{konvergens sor.}$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2 = S}}$$

$$a = 12 \quad q = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = \frac{4 \cdot 12}{3} = 4 \cdot 4 = \underline{\underline{16 = S}}$$

$$S = 5 \quad q = \frac{1}{5} \quad a = ?$$

$$a = S(1-q) = 5 \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{4 = a}}$$

$$S = 15 \quad a = 5 \quad q = ?$$

$$a = S - Sq$$

$$q = \frac{15-5}{15} = \frac{10}{15} = \underline{\underline{\frac{2}{3} = q}}$$

$$a - S = -Sq$$

$$S - a = Sq$$

$$q = \frac{S-a}{S}$$

Ad meg a kör. vég. mélt. sor. összege:

$$1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16} \dots$$

$$a = 1$$

$$q = \frac{1}{4} = a_2 : a_1 \quad S = \frac{a}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = S$$

Mekkora a kör. vég. mélt. sor. tagjainak összege?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = ?$$

$$a = 1$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{2 = S}}$$

$$a \quad b \quad b^2 : a \quad b^3 : a^2 \dots \quad b < a$$

$$a = a$$

$$q = \frac{b}{a}$$

$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a-b}{a}} = \underline{\underline{\frac{a^2}{a-b} = S}}$$

Oldjuk meg a kör. egyenletet:

$$\frac{5}{3} = \underline{x} + 3x^2 + \underline{x^3} + 3x^4 + \dots \quad a = x \quad q = x^2$$

$$\frac{5}{3} = S_1 + S_2$$

$$a = 3x^2 \quad q = \frac{3x^4}{3x^2} = x^2$$

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{3x^2}{1 - x^2}$$

$$S_1 = \frac{a}{1 - q} = \frac{x}{1 - x^2}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{x + 3x^2}{1 - x^2}$$

$$S_2 = \frac{3x^2}{1 - x^2}$$

$$5 - 5x^2 = 3x + 9x^2$$

$$0 = 14x^2 + 3x - 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 80}}{28} = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{28} = \frac{-3 \pm 17}{28}$$

$$x_1 = \frac{14}{28} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$x_2 = \frac{-20}{28} = \underline{\underline{-\frac{5}{7}}}$$

$$1, \quad a=1 \quad q=-\frac{1}{2} \quad S = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = S$$

$$2, \quad S = \frac{4}{9} \quad q = -\frac{1}{2} \quad a = S(1-q) = \frac{4}{9} \cdot (1+\frac{1}{2}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3} = a$$

$$3, \quad S=1 \quad a=\frac{4}{5} \quad q = \frac{S-a}{S} = \frac{1-\frac{4}{5}}{1} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = q$$

$$4, \quad 5+2 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} + \dots = ?$$

$$q = \frac{2}{5}$$

$$a_1 = 5$$

$$S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{3} = \frac{8\frac{1}{3}}{3} = S$$

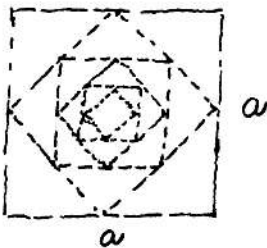
85. o.

1967.V.10.

Ha valamely  $a$  oldalú négyzet oldalait megfelelően és a félkörökönként összevesszük akkor nyert négyzet oldalait ismét megfelelően és ezt az eljárást gondolatban végtelenségig folytatjuk akkor végtelen sok négyzetet nyerünk. Mekkora az összes négyzet területének és kerületének az összege?

$$K=4a$$

$$T=a^2$$



$$S_T = ?$$

$$S_K = ?$$

$$K... : 4a, \quad 4a\sqrt{2}:2, \quad 2a:4, \quad a\sqrt{2}:4, \dots$$

$$T... : a^2, \quad \frac{a^2}{2}, \quad \frac{a^2}{4}, \quad \frac{a^2}{8}, \dots$$

$$K... : 4a, \quad \left( \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{a}{2}, \quad \frac{a\sqrt{2}}{4} \right) \dots \quad 2a\sqrt{2} \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T... : a^2, \quad \frac{a^2}{2}, \quad \frac{a^2}{4}, \quad \frac{a^2}{8}, \dots \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S_K = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2-\sqrt{2}} = \frac{8a(2+\sqrt{2})}{4-2}$$

$$S_K = \frac{16a + 8a\sqrt{2}}{2} = 8a + 4a\sqrt{2} = a(8 + 4\sqrt{2}) = \underline{\underline{4a(2+\sqrt{2})}}$$

$$S_T = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2a^2}}$$

Mekkora a hányadosa annak a végtelen mélt. sornak,  
mely első tagja 1., hányadosa 5.

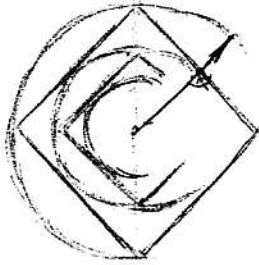
$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-q} \rightarrow S - Sq = a \\ -Sq &= a - S \\ q &= \frac{S-a}{S} \end{aligned}$$

$$q = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \dots$$



Leukerünk egy  $r$  sugarú körbe írt négyzet. Ebből kiderül, hogy a körbe írt négyzet ... Mivel az egy körbe írt négyzetnek van egy körbe írt négyzet, továbbá a négyzetnek van körbe írt négyzet ...



$$2r\pi, 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \pi, \dots \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_k = \frac{2r\pi}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2r\pi}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{2r\pi \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$S_k = \frac{2r\pi\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2r\pi 2 + 2r\pi\sqrt{2}$$

$$\underline{S_k = 2r\pi(2+\sqrt{2})}$$

$$4 \cdot r \cdot \sqrt{2}, 4r, \dots \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_N = \frac{4r\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4r\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{4r\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$S_N = \frac{4r \cdot 2 (\sqrt{2}+1)}{2-1} = \underline{8r(\sqrt{2}+1)}$$

1967. V. 13.

87. óra

$0,58\overline{7}$  átalakítani kerekesszámra négyzetes törtre.

$$0,58\overline{7} = \frac{587}{1000} + \frac{587}{1000000} + \frac{587}{100000000} + \dots \rightarrow q = \frac{1}{1000}$$

$$S = \frac{\frac{587}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{587}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{1000 \cdot 587}{1000 \cdot 999} = \frac{587}{999}$$

$$0,32\overline{323232} = \frac{321}{1000} + \frac{32}{10^5} + \frac{32}{10^7} + \frac{32}{10^9} \dots \rightarrow q = \frac{1}{10^2}$$

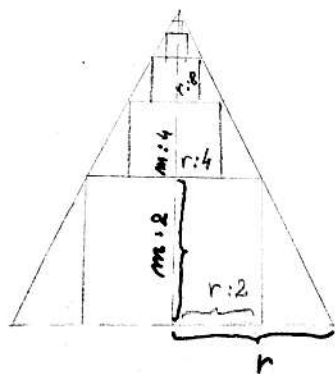
$$S = \frac{\frac{32}{100.000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{32}{100.000}}{\frac{99}{100}} = \frac{32 \cdot 100}{99 \cdot 100.000} = \frac{32}{99.000}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{321}{1000} + \frac{32}{99.000} = \frac{321 \cdot 99 + 32}{99.000} = \frac{31.811}{99.000}$$

$$\begin{array}{r} 321 \cdot 99 \\ 2889 \\ \hline 2889 \\ \hline 31779 \end{array} \quad \begin{array}{r} 31779 \\ 32 \\ \hline 31811 \end{array}$$

$$0,32\overline{32} = \frac{31811}{99000}$$

Egy  $r$  sug.  $m$  mag. egyenes körkúp alajára egyenes körhenger helyezünk el, mely magassága a kúp magasságának felével egyenlő, fedőlapja pedig a kúp palatájával érinti. Ezzel egyenlő után újabb hengereket helyezünk, amelyeket mindegyikének magassága az előbbi heng. magasságának fele. Mi lesz az így módon elhelyeshető hengerek köbhaszalmának összege?



$$K_h = r^2 \pi \cdot m$$

$$K_1 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{m}{2} = \frac{r^2}{4} \cdot \pi \cdot \frac{m}{2} = r^2 \pi m \cdot \frac{1}{8}$$

$$K_2 = \left(\frac{r}{4}\right)^2 \pi \cdot \frac{m}{4} = \frac{r^2}{16} \cdot \pi \cdot \frac{m}{4} = r^2 \pi m \cdot \frac{1}{64}$$

...

$$\sum K_h = r^2 \pi m \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} \dots\right) \quad q = \frac{1}{8}$$

$$S = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{56} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

$$K = r^2 \pi m \cdot \frac{8}{56}$$

$$\underline{\underline{\sum K = \frac{1}{7} r^2 \pi m.}}$$

Mummy. a bös. regeln s. övrigt:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{a^3}{b} + a + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^3} + \dots$$

$$b < a^2$$

$$1 + \cos L + \cos^2 L + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = ? \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{S = \frac{2}{3}}}$$

$$\frac{a^3}{b} + a + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^3} + \dots = ? \rightarrow q = \frac{a}{\frac{a^3}{b}} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$$

$$S = \frac{\frac{a^3}{b}}{1 - \frac{b}{a^2}} = \frac{\frac{a^3}{b}}{\frac{a^2 - b}{a^2}} = \frac{a^5}{b(a^2 - b)}$$

$$\underline{\underline{S = \frac{a^5}{b(a^2 - b)}}}$$

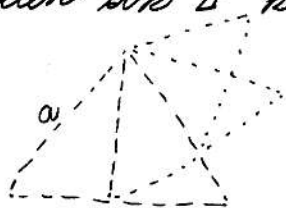
$$1 + \cos L + \cos^2 L + \dots = ? \quad q = \cos L$$

$$S = \frac{1}{1 - \cos L} = \frac{1 + \cos L}{\sin^2 L} = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 L}}{\sin^2 L}$$

$$S^2 = \frac{1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 L} + 1 - \sin^2 L}{\sin^4 L} = \frac{1 + 2\cos L + \cos^2 L}{\sin^4 L}$$

$$\underline{\underline{S = \frac{1}{1 - \cos L}}}$$

Válassz egy  $a$  oldalú egyenlő oldalú  $\Delta$  magasságával újabb egyenlő old.  $\Delta$  "szukkulando" .... Milyen az így szerkesztendő végtelen sok  $\Delta$  kerületének és területének összege.



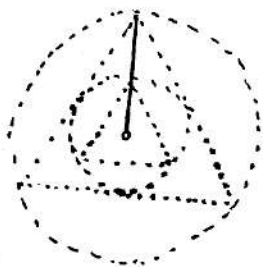
$$K. \quad 3a; 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad \rightarrow q = \frac{3a\sqrt{3}}{2 \cdot 3a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left. \vphantom{\frac{3a\sqrt{3}}{2 \cdot 3a}} \right\}$$

$$T. \quad \frac{a^2}{2}; \frac{a^2 \cdot 3}{4 \cdot 2}; \quad \rightarrow q = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{6a^2}{8a^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \left. \vphantom{\frac{6a^2}{8a^2}} \right\}$$

$$S_K = \frac{3a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3a}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{6a}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6a(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = \underline{\underline{6a(2 + \sqrt{3})}} = S_K$$

$$S_T = \frac{\frac{a^2}{2}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{2a^2}} = S_T$$

- Adott  $r$  sug. körbe szerk. egyenlő old.  $\Delta$ -ek.  
 Először kör, majd ism. szab.  $\Delta$ -ek.... Mennyi ~~a~~  
 a.) az összes körök kerületének és területének összege.  
 b.) a  $\Delta$  kerületének és területének összege.  
 c.) mennyi akkor, ha  $r = 10\text{cm}$ .



$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = \frac{2m}{\sqrt{3}}$$

$$k_{1\Delta} = 2\pi \cdot r$$

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} r = \frac{3r}{\sqrt{3}}$$

$$k_{1\Delta} = \frac{3 \cdot 3 \cdot r}{\sqrt{3}}$$

$$r_1 = r$$

$$r_2 = \frac{r_1}{2}$$

$$k_{2\Delta} = 2\pi \cdot \frac{r}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{3r}{2\sqrt{3}}$$

$$k_{2\Delta} = \frac{3 \cdot 3 \cdot r}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\left. \vphantom{\frac{3r}{\sqrt{3}}}\right\} q = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_{1\Delta} = r^2 \pi \\ T_{2\Delta} = \frac{r^2}{4} \pi \end{array} \right\} q = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_{1\Delta} = \frac{(3r)^2}{3 \cdot 2} = \frac{9r^2}{6} = \frac{3}{2} r^2 \\ T_{2\Delta} = \frac{(3r)^2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{9r^2}{24} = \frac{3}{8} r^2 \end{array} \right\} q = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} k_{10} &= 2r\pi \\ k_{20} &= 2\frac{r}{2}\pi \end{aligned} \longrightarrow q_0 = \frac{r\pi}{2r\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} k_{1\Delta} &= \frac{9r}{\sqrt{2}} \\ k_{2\Delta} &= \frac{9r}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \longrightarrow q_{\Delta} = \frac{\frac{9r}{2\sqrt{2}}}{\frac{9r}{\sqrt{2}}} = \frac{9r\sqrt{2}}{9r\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$a.) \quad S_0 = \frac{2r\pi}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2r\pi}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2r\pi$$

$$\underline{\underline{S_{0k} = 4r\pi}}$$

$$S_{\Delta} = \frac{9r \cdot \sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9r}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{18r}{\sqrt{2}} = \frac{18 \cdot \sqrt{2} \cdot r}{2} = 9 \cdot \sqrt{2} \cdot r$$

$$\underline{\underline{S_{\Delta k} = 9r \cdot \sqrt{2}}}$$

$$b.) \quad S_{0T} = \frac{r^2\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4r^2\pi}{3} = \underline{\underline{S_{0T}}}$$

$$S_{\Delta T} = \frac{\frac{3r^2}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3r^2}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot r^2}{6} = \underline{\underline{2r^2 = S_{\Delta T}}}$$

$$\begin{aligned} c.) \quad S_{0k} &\doteq 126 \text{ cm}^2 \\ S_{0T} &\doteq 420 \text{ cm}^2 \\ S_{\Delta k} &\doteq 127,3 \text{ cm}^2 \\ S_{\Delta T} &\doteq 200 \end{aligned} \quad ||$$

# Kapcsolás- kombinatorika

A matematikának azt a részét, mely arról tárgyal, hogy miként lehet a legegyszerűbb és a legkevesebb elemekből a legnagyobb számú különböző kombinációt kialakítani, kapcsolási kombinatorikának (kombinatorikának) nevezzük.

Megfontaljuk az adott tárgyat a kapcsolási kombinatorikában elemeknek nevezzük és jelöljük a következőképpen:

1 2 3 4      a b c d       $a_1, a_2, a_3, a_4$

Egy elem közül azt mondjuk a magasabb sorrendű (v. legelőbbi a legegyszerűbb sorrend) előtt fordul elő, alacsonyabbnak, mely később következik, magasabbnak nevezzük.

Egy elemről alkotott csoportot füzetnek (komplexiónak is szokás) nevezzük.

Egy füzet közül azt mondjuk magasabbnak, amelyben a füzet belső elemeitől némiképp előbb fordul elő magasabb elem.

Ha az  $a_4, a_3, a_2, a_1$  füzet magasabb az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  füzetnél.

Az egyes füzetek közötti felhasznált elemek száma és sorrendje szerint a kapcsolási kombinatorikát 3 módra lehet osztani:

1. permutáció
2. variáció
3. kombináció

Mindhárom kapcsolási mód lehet ismétlődő v. ismétlődés nélküli a szerint, hogy az elemek az egyes füzetekben egyszer v. többször fordulnak elő ("ugyanaz").

Mindhárom kapcsolási módra 2-féle feladat áll elő:

1. A lehetséges füzetek képzése
2. A füzetek száma meghatározása

# A permutáció

Azt az eljárást, mikor adott elemekből egy alkalatt meg az összes lehetséges sorrendet, hogy azok mindegyikében valamennyi elem előforduljon, de mindegyikben más sorrendben, permutációnak (helyezés) is nevezhet az egyes sorrendek az adott elemek permutációinak sorrendje.  
Az egyes permutációk tehát csak az adott elemek helyzetében különböznek egymástól.

Ismétlés nélküli permutáció: ekkor az adott elemek mind különböznek.

| a  | b | c | d  | - elemek |   |   |   |   |
|----|---|---|----|----------|---|---|---|---|
| a  | b | c | d  |          | b | a | c | d |
| a  | b | d | c  |          | b | a | d | c |
| (a | d | b | c) |          | b | c | a | d |
| a  | c | b | d  |          | b | c | d | a |
| a  | c | d | b  |          | b | d | a | c |
| a  | d | b | c  |          | b | d | c | a |
| a  | d | c | b  |          |   |   |   |   |
| c  | a | b | d  |          | d | a | b | c |
| c  | a | d | b  |          | d | a | c | b |
| c  | b | a | d  |          | d | b | a | c |
| c  | b | d | a  |          | d | b | c | a |
| c  | d | a | b  |          | d | c | a | b |
| c  | d | b | a  |          | d | c | b | a |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|-------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |  | $x_2$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ |  | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ |  | $x_4$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_3$ |  | $x_2$ | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ |  | $x_3$ | $x_1$ | $x_4$ | $x_2$ |  | $x_4$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ |
| $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ |  | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_4$ |  | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_4$ |  | $x_4$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_3$ |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_2$ |  | $x_2$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_1$ |  | $x_3$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_1$ |  | $x_4$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ |
| $x_1$ | $x_4$ | $x_2$ | $x_3$ |  | $x_2$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_3$ |  | $x_3$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_2$ |  | $x_4$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ |
| $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ | $x_2$ |  | $x_2$ | $x_4$ | $x_3$ | $x_1$ |  | $x_3$ | $x_4$ | $x_2$ | $x_1$ |  | $x_4$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ |

Nem kell helybe a korábban megadott, a többi term. venni.

$$\begin{array}{ccc} m & \dots & P_m \\ (\text{elem}) & & (\text{függő}) \end{array} \quad m=4 \quad P_m=24$$

$$m-1 \quad \dots \quad \underline{P_{m-1}} \quad \text{felt., hogy ismert}$$

$$\begin{aligned} P_m &= m \cdot P_{m-1} \\ P_{m-1} &= (m-1) \cdot P_{m-2} \\ P_{m-2} &= (m-2) \cdot P_{m-3} \\ P_{m-3} &= (m-3) \cdot P_{m-4} \\ \hline P_3 &= 3 \cdot P_2 \\ P_2 &= 2 \cdot P_1 \\ P_1 &= 1. \end{aligned}$$

$$P_m \cdot P_{m-1} \cdot P_{m-2} \cdot P_{m-3} \dots P_2 \cdot P_1 = [m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1] \cdot [P_{m-1} \cdot P_{m-2} \cdot P_{m-3} \dots P_2 \cdot P_1]$$

$$P_m = \frac{[m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1] \cdot [P_{m-1} \cdot P_{m-2} \dots P_2 \cdot P_1]}{P_{m-1} \cdot P_{m-2} \cdot P_{m-3} \dots P_2 \cdot P_1}$$

$$\underline{P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1.} = m! \quad (m \text{ faktoriális}).$$

$$\underline{\underline{P_m = m!}}$$

$$\underline{\underline{0! = 1}}$$

Az  $n$  eleműből képezhető permutációk száma  
az első  $n$  egész számok szorzatával egyenlő  
(faktoriális - tényezőszor)

Egy kilenc személyes csapat hányféleképpen foglathat helyet egy sorban, ha minden lehetséges elrendezést figyelembe veszünk.

$$P_9 = 9! = 362880$$

Hány két ötjegyű sz. alakítható a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből.

$$P_5 = 5! = 120$$

$$120 - 4! = 120 - 24 = \underline{\underline{96}}$$

7 férfi naponta kétszer 3x egyúttal érkeznek. Egyszer megbeszélnek, hogy egymás után minden lehetséges módon helyetkötnek el az asztal körül.  
Hány nap szükséges ezen leírás véghezvitelére?

$$\begin{array}{r} 120 \cdot 42 \\ 480 \\ 240 \\ \hline 5040 : 3 = \underline{\underline{1680}} \\ 20 \\ 24 \end{array}$$

Mi a DARIUS szó 265. permutációja.

$$P_5 = 120$$

$$P_4 = 24$$

$$\begin{array}{r} 265 \\ - 120 \\ \hline 145 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 265 \\ - 240 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$25 > 4!$$

$$25 = 4! + 1$$

$$120 \dots \text{DSUIRA}$$

$$121 \dots \text{A'DRIUS}$$

$$\vdots$$

$$240 \dots \text{A}$$

$$241 \dots \text{RDAIUS}$$

$$265 \dots \underline{\underline{\text{RADIUS}}}$$

$$\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1} - \frac{n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1}{(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1} = n+1 - n = \underline{\underline{1}}$$

Alany 7 jegyű szám állítható elő a 0235789 számjegyekből.

65/12, 13

90. ff.

1967.1.16.

1,  $7! - 6! = 5040 - 720 = \underline{\underline{4320}}$

0, 2, 3, 5, 7, 8, 9 -ből 4320 db. 7-jegyű szám képezhető.

2, 65/12

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \textcircled{6} \cdot \textcircled{5} \cdot \textcircled{4} \cdot \textcircled{3} \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot \textcircled{1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \textcircled{1} \cdot \textcircled{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \textcircled{1} \cdot \textcircled{5} \cdot \textcircled{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{630}{6} = \underline{\underline{105}}$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1} = \underline{\underline{n}}$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1} = \underline{\underline{n^2 + 3n + 2}}$$

3, 65/13

$$\begin{aligned} (n+1)! - n \cdot n! &= n! & (n+1)! - n \cdot n! &= n! \\ (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots - n \cdot n \cdot (n-1) \dots &= n! & (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \\ n! \cdot [(n+1) - n] &= n! & (n+1) \cdot n \dots &= (n+1) \cdot n \\ \underline{\underline{n! \cdot 1}} &= n! & \rightarrow (n+1)! - n \cdot n! &= n! \end{aligned}$$

$$n! + n^2(n-1)! = (n+1)!$$

$$n^2(n-1)! = (n+1)! - n!$$

$$n^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1 = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 - n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$$

$$n^2 \cdot (n-1)! = n! [(n+1) - 1] = n! \cdot n \quad | \cdot \frac{1}{n}$$

$$n(n-1)! = n!$$

$$\underline{\underline{n! = n!}}$$

1967.V.17.

91. ora

1.

ok abcdef furel kámpdik permutációja a dba fce.

$$5! = 120$$

121 ... b a c d e f  
241 ... c a b d e f  
361 ... d a b c e f

$$4! = 24$$

$$(3! = 6)$$

385 ... d b a c e f  
391 ... d b a c e f  
397 ... d b a f c e

- 385 ... d b a c e f  
c f e  
b c f  
a f c  
f c e

389

dba fce - 389

2.

|           |          |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 2 3 4 5 | 14 2 3 5 | 21 3 4 5 | 24 1 3 5 | 31 2 4 5 |
| 1 2 3 5 4 | 14 2 5 3 | 21 3 5 4 | 24 1 5 3 | 31 2 5 4 |
| 1 2 4 3 5 | 14 3 2 5 | 21 3 3 5 | 24 3 1 5 | 31 4 2 5 |
| 1 2 4 5 3 | 14 3 5 2 | 21 4 5 3 | 24 3 5 1 | 31 4 5 2 |
| 1 2 5 3 4 | 14 5 2 3 | 21 5 3 4 | 24 5 1 3 | 31 5 2 4 |
| 1 2 5 4 3 | 14 5 3 2 | 21 5 4 3 | 24 5 3 1 | 31 5 4 2 |
| 13 2 4 5  | 15 2 3 4 | 23 1 4 5 | 25 1 3 4 | 32 1 4 5 |
| 13 2 5 4  | 15 2 4 3 | 23 1 5 4 | 25 1 4 3 | 32 1 5 4 |
| 13 4 2 5  | 15 3 2 4 | 23 4 1 5 | 25 3 1 4 | 32 4 1 5 |
| 13 4 5 2  | 15 3 4 2 | 23 4 5 1 | 25 3 4 1 | 32 4 5 1 |
| 13 5 2 4  | 15 4 2 3 | 23 5 1 4 | 25 4 1 3 | 32 5 1 4 |
| 13 5 4 2  | 15 4 3 2 | 23 5 4 1 | 25 4 3 1 | 32 5 4 1 |
| 34 1 2 5  | 35 1 2 4 | 41 2 3 5 | 42 1 3 5 | 43 1 2 5 |
| 34 1 5 2  | 35 1 4 2 | 41 2 5 3 | 42 1 5 3 | 43 1 5 2 |
| 34 2 1 5  | 35 2 1 4 | 41 3 2 5 | 42 3 1 5 | 43 2 1 5 |
| 34 2 5 1  | 35 2 4 1 | 41 3 5 2 | 42 3 5 1 | 43 2 5 1 |
| 34 5 1 2  | 35 4 1 2 | 41 5 2 3 | 42 5 1 3 | 43 5 1 2 |
| 34 5 2 1  | 35 4 2 1 | 41 5 3 2 | 42 5 3 1 | 43 5 2 1 |
| 45 1 2 3  | 51 2 3 4 | 52 1 3 4 | 53 1 2 4 | 54 1 2 3 |
| 45 1 3 2  | 51 2 4 3 | 52 1 4 3 | 53 1 4 2 | 54 1 3 2 |
| 45 2 1 3  | 51 3 2 4 | 52 3 1 4 | 53 2 1 4 | 54 2 1 3 |
| 45 2 3 1  | 51 3 4 2 | 52 3 4 1 | 53 2 4 1 | 54 2 3 1 |
| 45 3 1 2  | 51 4 2 3 | 52 4 1 3 | 53 4 1 2 | 54 3 1 2 |
| 45 3 2 1  | 51 4 3 2 | 52 4 3 1 | 53 4 2 1 | 54 3 2 1 |

Haruffélekörpen helyekbeállítás el 6 ember egymás mellett.

$$6! = 720 \quad [ : 2 \quad ? ]$$



Ígyek fel az AMOR szó betűinek összes permutációit  
és kiemelt alá az értelmeseket.

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| AMOR | MAOR | OAMR | RAMO |
| AMRO | MARO | OARM | RAOM |
| AOMR | MOAR | OMAR | RMAO |
| AORM | MORA | OMRA | RMOA |
| AORM | MRAO | ORAM | ROAM |
| AROM | MROA | ORMA | ROMA |

$$\text{Szám. ki: } \frac{(n+2)!}{n!} - 2 \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$\frac{(n+2)(n+1) \cdot n \dots 2 \cdot 1}{n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1} - \frac{2(n+1) \cdot n \dots 2 \cdot 1}{(n+1) \cdot n \dots 2 \cdot 1} + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \dots 2 \cdot 1 - 2 \cdot (n+1) \cdot n \dots 2 \cdot 1 + (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1}{(n+1) \cdot n \dots 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{[(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1] \cdot [(n+1) \cdot (n+2) - 2 + n \cdot (n-1)]}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2 - 2 + n^2 - n}{n} = 2n$$

Ismerlés permutáció. - Ezekből az adott  
elemek közül egyenként  
is vannak.

Alkossuk meg az 11223 összes permutációt.

|       |       |              |
|-------|-------|--------------|
| 11223 | 21123 | 32112        |
| 11232 | 21132 | 32121        |
| 11322 | 21213 | <u>32211</u> |
| 12123 | 21231 |              |
| 12132 | 21312 |              |
| 12213 | 21321 | 22113        |
| 12231 | 23112 | 22131        |
| 12312 | 23121 | 22311        |
| 12321 | 23211 |              |
| 13122 | 31122 |              |
| 13212 | 31212 |              |
| 13221 | 31221 |              |

1967. V. 22.

92-93 óra

dolgozat

94. óra.

permutáció:

|          |         |        |        |
|----------|---------|--------|--------|
| aa bb cc | abccab  | baaccb | bbcaac |
| aa bcbc  | abccba  | babacc | bbcac  |
| aa bccb  | acabbc  | babcac |        |
| aa cbbc  | acabcb  | bacabc |        |
| aa cbcb  | acacbb  | bacacb |        |
| ababcc   | acbabcb |        |        |
| abbaac   | acbacb  | bacbac |        |
| abbcac   | acbbac  | bacba  |        |
| abbcca   | acbbca  | bacab  | ccaabb |
| abcabc   | acbcab  | baccba | ccabab |
| abcacb   | acbcba  | bbaac  | ccabba |
| abc bac  | baabcc  | bbacac | ccbaab |
| abc bca  | baacbc  | bbacca | ccbab  |

$$P_m^k k! = m!$$

$m$  elem körül ennyi ismellődik.

$$P_m^k = \frac{m!}{k!}$$

$$P_{m k_1 k_2 \dots}^k = \frac{m!}{k_1! k_2! \dots}$$

Hány permutációja van a Mississippi-nek?

$$P_{11}^{442} = \frac{11!}{4! 4! 2!} = 34\,650$$

## A variáció

Az az eljárás, mikor adott  $n$ -elemből úgy alkotunk halmazokat, hogy körülük minden lehetséges módon kiválasztunk  $k$  elemet, és azokat minden lehetséges módon egymás mellé helyezzük, variálásmak / változtatás /, és magukat az egyes halmazokat variációknak nevezzük.

Az egyes halmazok csak az adott elemek számában, minőségben és helyzetben különböznek egymástól.

A variációkban szereplő elemek száma szerint a variációk lehetnek:

első-, másod-, harmad-, ... osztályúak.

A variáció a permutáció általánosítása.

Az  $n$  elem  $m$ -ed osztályú variációja az  $m$  elem permutációja.

Somell's miltbűli variáció

Ezekben az egyes fűrészekben csak különbség lehet  
fordulhatna elő.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  összes variációi:

| Egy. | $a_1$                                                                                              | $a_2$                                                                                              | $a_3$                                                                                              | $a_4$                                                                                              |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K.   | $a_1 a_2$<br>$a_1 a_3$<br>$a_1 a_4$                                                                | $a_2 a_1$<br>$a_2 a_3$<br>$a_2 a_4$                                                                | $a_3 a_1$<br>$a_3 a_2$<br>$a_3 a_4$                                                                | $a_4 a_1$<br>$a_4 a_2$<br>$a_4 a_3$                                                                |
| H.   | $a_1 a_2 a_3$<br>$a_1 a_2 a_4$<br>$a_1 a_3 a_2$<br>$a_1 a_3 a_4$<br>$a_1 a_4 a_2$<br>$a_1 a_4 a_3$ | $a_2 a_1 a_3$<br>$a_2 a_1 a_4$<br>$a_2 a_3 a_1$<br>$a_2 a_3 a_4$<br>$a_2 a_4 a_1$<br>$a_2 a_4 a_3$ | $a_3 a_1 a_2$<br>$a_3 a_1 a_4$<br>$a_3 a_2 a_1$<br>$a_3 a_1 a_4$<br>$a_3 a_4 a_1$<br>$a_3 a_4 a_2$ | $a_4 a_1 a_2$<br>$a_4 a_1 a_3$<br>$a_4 a_2 a_1$<br>$a_4 a_2 a_3$<br>$a_4 a_3 a_1$<br>$a_4 a_3 a_2$ |

111 223

aaa 666

|               |        |        |
|---------------|--------|--------|
| 111223        | 122131 | 223111 |
| 111232        | 122311 | 231112 |
| 111322        | 211123 | 231121 |
| 112123        | 211132 | 231211 |
| 112132        | 211213 | 232111 |
| 112213        | 211231 | 311122 |
| 112231        | 211312 | 311212 |
| 121223 112312 | 211321 | 311221 |
| 121132 112321 | 212113 | 312112 |
| 121213 113221 | 212131 | 312121 |
| 121231 113212 | 212311 | 312211 |
| 113221        | 213112 | 321112 |
| 111123        | 213121 | 321121 |
| 121213        | 213211 | 322111 |
| 121231        | 221113 |        |
| 121312        | 221131 |        |
| 121321        | 221311 |        |
| 122113        |        |        |

ba aabbb  
 ba aabab  
 ba aabba  
 ba aabab  
 ba ababa  
 ba abbaa  
 ba baaba  
 ba babaa  
 ba bbbaa  
 ba aabab  
 ba aabba  
 ba abaaa  
 ba abaaa

1967. VI. 3.

1 3 5 7 9  
1 3 5 9 7  
1 3 7 5 9  
1 3 7 9 5

$$\left. \begin{array}{l} 120 \text{ db.} \\ 120 : 5 = 24 \end{array} \right\}$$
$$\begin{array}{r} 24.1 = 24 \\ 24.3 = 72 \\ 24.5 = 120 \\ 24.7 = 168 \\ 24.9 = 216 \\ \hline 600 \end{array}$$
[illegible]

1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 9 számjegyekből alkotott számok közül hány kezdődik 931 - ggal?

1 1 2 2 2 3 4 5 5 9 - 10 db.  
7 db.

[420]

931 ..... 7! = 5040

$$931 \underbrace{1222455}_{P_m} \quad \frac{7!}{2!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 42 \cdot 10 = \underline{\underline{420}}$$

Hány 5-ös számjeggyel foglaltat helyet egy adott szám 3-ig, hogy a különbségük felváltva 3-ig, egymás után.

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 0 \oplus \dots \dots \dots 4! = 24 \\ \oplus \ 0 \dots \dots \dots 4! = 24 \\ \hline 48 \cdot 9 = 432 \\ \hline 0 \oplus \dots 2! = 2 \\ \oplus \ 0 \dots 2! = 2 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 123456 \\ 3465 \\ 3546 \\ \vdots \end{array} \right\} 24$$

$$24 \cdot \frac{1}{3} = 8$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 12 \dots 8 \\ 14 \dots 8 \\ 16 \dots 8 \\ 32 \dots 8 \\ 34 \dots 8 \\ 36 \dots 8 \\ 52 \dots 8 \\ 54 \dots 8 \\ 56 \dots 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \text{ford. pl } 21 \\ 23 \dots \\ \vdots \\ 41 \\ \vdots \\ 61. \end{array} \Rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 2 = \underline{\underline{144}}$$

3,3 Haány 7-számpal hat. meg 7 db pont, mely közül  
 3,3 nem van egy egyenest.

Haány permutációja van az ABC 24 egyrerü  
 belüjének, ha egy permutáció felírásához 24 cm területre  
 van szükség, a Föld felületének hányszorosa volna  
 szükség, akkor hogy az összes permutációkat felírhatjuk.  
 $r = 6 \cdot 10^8 \text{ cm} = 6000 \text{ km}$

$$24! = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2432902008176640000$$

$24! \cdot 24 \text{ cm}^2$  lev. szüko.

$$F = \frac{4}{3} r^2 \pi = 4 \cdot 6000^2 \cdot \pi \text{ km}^2 = 4 \cdot 36000000 \cdot 3,14 \text{ km}^2 = 452 \cdot 10^6 \text{ km}^2$$

$$F = 452 \cdot 10^6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^2 = 452 \cdot 10^{22} \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{24 \cdot 2,4 \cdot 10^{18} \cdot 6 \cdot 10^6}{452 \cdot 10^{22}} = \frac{24 \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{452 \cdot 10^{22}} = \frac{346 \cdot 10^2}{452} = \frac{34600}{452}$$

$$\underline{\underline{a \approx 76}}$$

Hány különböző sorrendben helyezhetünk egymás mellé 8 fehér 6 vörös 4 zöldgolyót?

$$\frac{18!}{8! \cdot 6! \cdot 4!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 18 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 = \underline{\underline{9 \ 189 \ 180}}$$

$$\begin{array}{r} 18 \cdot 17 \\ \underline{126} \\ 306 \cdot 15 \\ \underline{1530} \\ 4590 \cdot 14 \\ \underline{18360} \\ 64260 \cdot 13 \\ \underline{192780} \\ 835380 \cdot 11 \\ \underline{835380} \\ 9189180 \end{array}$$

Hány 5 jéggű szám alakítható az 11 222 számjegyekből.  
Hány kezdődik ezek közül 1-gyel és hány 2-vel.  
Mennyi az összegük?

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 10$$

$$1 \dots \quad \frac{4!}{3!} = \underline{\underline{4}}$$

$$2 \dots \quad 10 - 4 = \underline{\underline{6}}$$

$$\begin{array}{r} 11222 \\ 12122 \\ 12212 \\ 12221 \\ 21122 \\ 21212 \\ 21221 \\ 22112 \\ 22121 \\ 22211 \\ \hline 177776 \end{array}$$



Amíg külső jegyei 5 jegyű szám alakítható az 1...9 sz.-ból.

$$D_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \underline{\underline{15120}}$$

$$\begin{array}{r} 210.8 \\ 1680.9 \\ \hline 15120 \end{array}$$

40 tagú társaság elnököt, titkárát, pénztárost választ  
Hányféle képpen tekinthetjük ez?

$$\begin{array}{l} m = 40 \\ k = 3 \end{array}$$

$$D_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{40!}{(40-3)!} = \frac{40!}{37!} = 40 \cdot 39 \cdot 38 = \underline{\underline{59280}}$$

$$\begin{array}{r} 39.38 \quad 1482.4 \\ 117 \quad 5928 \\ \hline 312 \\ 1482 \end{array}$$

9 számjegyből képezhető 3 jegyű számok közül melyik  
a 391-dik, feltéve, hogy a jegyek nem ismétlődnek.

|       |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 2 3 | 132 | 142 | 152 | 162 | 172 | 182 | 192 |
| 1 2 4 | :   |     |     |     |     |     | :   |
| 5     | :   |     |     |     |     |     | :   |
| 6     | :   |     |     |     |     |     | :   |
| 7     | :   |     |     |     |     |     | :   |
| 8     | :   |     |     |     |     |     | :   |
| 1 2 9 | 139 |     |     |     |     | 198 |     |

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{7 \cdot 8 = 56}$$

$$391:56 = 6$$

$$56 \cdot 6 = 336$$

$$\begin{array}{r} 391 \\ - 336 \\ \hline = 55 \end{array}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{7 \dots}$$

|       |       |     |                                                 |
|-------|-------|-----|-------------------------------------------------|
| 7 1 2 | 7 2 1 | ... | 7 8 1                                           |
| :     | :     |     | :                                               |
| 7 1 9 | 7 2 9 |     | 7 9 8                                           |
|       |       |     | $\underbrace{\quad\quad\quad}_{8 \cdot 7 = 56}$ |

$$56 - 55 = 1 \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 791 \\ \vdots \\ 796 \\ \hline 798 \end{array}$$

$$\underline{\underline{A 391. sz. \dots 796}}$$

Egy köz. iskolában a 8. oszt. 28, a 7. osztály pedig 32 tanulója van. A 8. o. tan. közül választják az önképzőket eln., alelnökét, titkárát és pénztárost, a 7. oszt. tan. közül pedig sportfelelőst, könyvtárost, és az ellenőrt. Hányféleképpen ejthető meg az választás.

$$8.o. \quad m = 28 \quad k = 4 \quad V_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{28!}{24!} = 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25$$

$$7.o. \quad m = 32 \quad k = 3 \quad V_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{32!}{29!} = 32 \cdot 31 \cdot 30$$

$$N_1 = 491.400$$

$$N_2 = 29.760$$

$$V = N_1 \cdot N_2 = 491.400 \cdot 29.760$$

$$V = \underline{\underline{15.624.064.000}}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 28 \cdot 27 \\ 56 \\ \hline 196 \\ 756 \cdot 26 \\ \hline 1512 \\ 4536 \\ \hline 19656 \cdot 25 \\ 39312 \\ 98280 \\ \hline 491400 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \cdot 31 \\ 96 \\ \hline 992 \cdot 30 \\ \hline 29760 \\ 29760 \cdot 491400 \\ \hline 119040 \\ 267840 \\ \hline 29760 \\ 1.904.000 \\ \hline 15.624.064.000 \end{array} \end{array}$$

A színház 7 színházból kágy 3 minű párból állhatunk össze.

$$V_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \underline{\underline{210}}$$

Ha 3 színű négyzet állítható össze a kör. színűkkel:  
fehér, rózs, kék, zöld, ha felt. hogy minden négyzetben  
csak 1x ford. elő a színük.

$$\begin{matrix} m = 4 \\ k = 3 \end{matrix} \quad V_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = \underline{\underline{24}}$$

Az iskolában 10 kült. tanítással tanulnak, melyek közül  
mindannyian legalább napi 1 órát tanulnak. Hányféle  
képpen állítható össze az 1 napi óránd, ha az illő  
napon 5 tanítással tanulnak.

$$\begin{matrix} m = 10 \\ k = 5 \end{matrix} \quad \text{nem ism.} \quad V_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$\underline{\underline{V_m^k = 30240}}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 42072 \\ 2940 \\ \hline 840 \\ 30240 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(m+2)!}{m!} - \frac{2 \cdot (m+1)!}{(m-1)!} + \frac{m!}{(m-2)!} = \frac{(m+2)! - 2(m+1)! \cdot m + m! \cdot (m-1) \cdot m}{m!} = \\
 & = \frac{[(m+2)(m+1) \cdot m \cdot (m-1) \dots 3 \cdot 2] - 2[(m+1) \cdot m \cdot (m-1) \dots 3 \cdot 2] + [m \cdot (m-1) \cdot m \cdot (m-1) \dots 3 \cdot 2]}{m!} = \\
 & = \frac{m! \cdot [(m+2)(m+1) - 2(m+1) + m(m-1)]}{m!} = \\
 & = (m+2)(m+1) - 2(m+1)m + m(m-1) = \underline{m^2 + 3m + 2 - 2m^2 - 2m + m^2 - m} = \\
 & = \underline{2m^2}
 \end{aligned}$$

A vakáció jelei 1-6 kitapintakaló pontból tevődnek össze, amely pontokat legfeljebb 2 arányban helyettesíthetjük. Egy arányban tehát nem juthat 3, nál több pont, hanem különböző jel lehetséges.

$$m = 6$$

l.o.

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \dots & 3 \\
 2 & \dots & 3 \\
 3 & \dots & 1 \\
 \hline
 & & 7
 \end{array}$$

$$7 \cdot 7 = 49 + 1(0 \text{ pont})$$

$$\underline{\underline{A = 50}}$$

Hány elemre van sorozatunk ahhoz, hogy a belőlük képzett 2. osztályú var. száma 20x legyen kisebb, mint a 4. oszt. var. száma.

$$V_m^2 \cdot 20 = V_m^4$$

$$20 \cdot \frac{m!}{(m-2)!} = \frac{m!}{(m-4)!}$$

$$20 \cdot m \cdot (m-1) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$$

$$20 = m^2 - 5m + 6$$

$$\downarrow$$

$$m = 7$$

1967. VI. 6.

98. óra

Sorozás - feladat.

1967. VI. 12.

99. óra

Sorozás - feladat.

1967. VI. 14.

100. óra

Sorozás - feladat.

$x_1 x_2 x_3$  variáció

$x_1 x_2$      $x_2 x_1$      $x_3 x_1$

$x_1 x_3$      $x_2 x_3$      $x_3 x_2$

$x_1 x_2 x_3$      $x_2 x_1 x_3$      $x_3 x_1 x_2$

$x_1 x_3 x_2$      $x_2 x_3 x_1$      $x_3 x_2 x_1$

|      |                     |     |
|------|---------------------|-----|
| 1. ó | Ism., Lank. sz.     |     |
| 2,   | - " -               | 6   |
| 3,   | - " -               | 7   |
| 4,   | - " -               |     |
| 5,   | - " - Trigonometria | 15. |

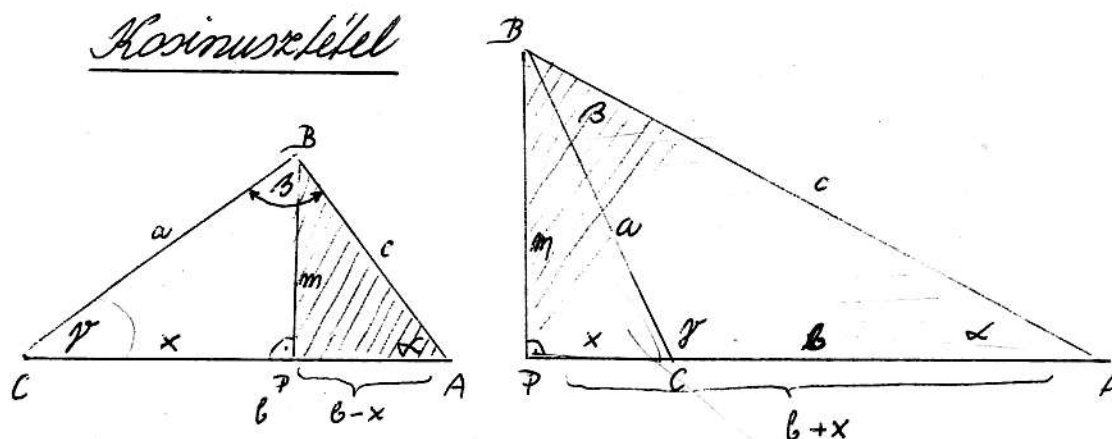
1967. IX. 5.

6. óra

1967. IX. 16.

## Általános $\Delta$ trigonometriai megoldások

### Koszinusztétel



1. Ismert 2 oldal és a közbeeső szög
2. Három oldal.

$$m = a^2 - x^2$$

$$m = a^2 - x^2$$

PBA  $\Delta$

$$m^2 = c^2 - (b-x)^2$$

$$c^2 - (b-x)^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 - (b^2 - 2bx + x^2) = a^2 - x^2$$

$$c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

$$* \text{CPBA} \dots \cos \gamma = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$$

$$m^2 = c^2 - (b+x)^2$$

$$c^2 - (b+x)^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 - (b^2 + 2bx + x^2) = a^2 - x^2$$

$$c^2 - b^2 - 2bx - x^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bx$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$* \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cos \gamma$$

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha
 \end{aligned}$$


---

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

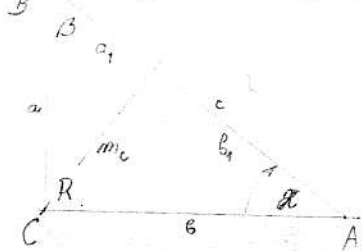
$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$


---

7.6. példák.

Az első három egyenes által határolt rész a háromszög. Felírjuk:  
 szögei szerint: hegyesszögű oldalai szerint: átlószerű  
 tompaszögű egyenlő szárú  
 derékszögű egyenlő oldalú háromszögekre.

A derékszögű háromszög egyik szöge derékszög.



$\alpha, \beta$  - befogók  $\alpha + \beta = 90^\circ = R$   
 $c$  - átfogó  $c > a$   $c > b$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$m_c^2 = a_1 \cdot b_1$$

$$a^2 = c \cdot a_1$$

$$b^2 = c \cdot b_1$$

Pitagorasz és Euklidesz leleli a derékszögű háromszögek oldalai közötti összefüggéseket leegyszerűsítik.

A trigonometria a derékszögű háromszögek szögei és oldalai közötti összefüggéseket foglalkoztat.

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \frac{\text{szöggel szembe eső befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha = \frac{\text{szöggel szembe eső befogó}}{\text{szög mellett eső befogó}}$$

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha = \frac{\text{szög mellett eső befogó}}{\text{szöggel szembe eső befogó}}$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha = \frac{\text{szög mellett eső befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\frac{c}{a} = \sec \alpha = \frac{(\text{szög mellett eső befogó}) \cdot \text{átfogó}}{\text{szöggel szembe eső befogó}}$$

$$\frac{c}{b} = \csc \alpha = \frac{\text{átfogó}}{\text{szög mellett eső befogó}}$$

A szög összefügg az oldalak arányával.

$\sin$   $\cos$   
 $\tan$   $\cot$   
 $\sec$   $\csc$

A derékszögű háromszög bármely 2 oldalának aránya meghatározása a háromszög mindegyik hegyesszögén. Ezek az oldalak arányok függetlenek a háromszög oldalainak hosszától, csak az oldalak által beárt szögektől függenek.

Ezeket az arányokat szögfüggvényeknek nevezzük.

Az oldalak arányok meghatározását a szögektől, a szög pedig az oldalak arányoktól.

A szögfüggvények periodikusak, azaz ismétlődőek. Jellemző az arányok ismétlődésének arányosságára leggyakrabban.

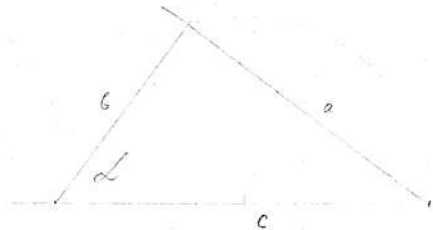
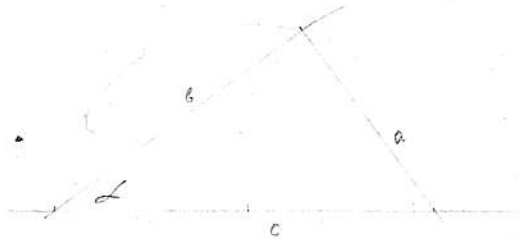
Kétszögű meg az  $a$ -val szembe eső oldal nagyságát is lehet, ha:

$$a = 3 \quad b = 4$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = 0,6 \quad \lg \alpha = \frac{3}{4} = 0,75 \quad \sec \alpha = \frac{c}{a} = 1,25$$

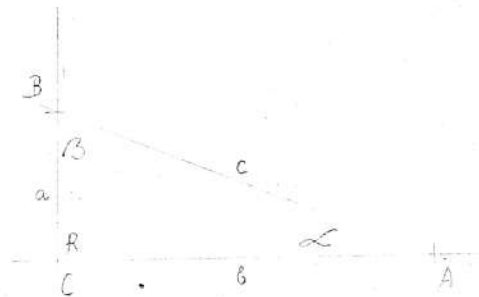
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = 0,8 \quad \cotg \alpha = \frac{b}{a} = 1,3 \quad \csc \alpha = \frac{c}{b} = 1,6$$

Lehet meg a háromszög 1 ha:  $\sin \alpha = 0,6 = \frac{6}{10}$   $\cos \alpha = \frac{6}{10}$



$$\lg \alpha = 0,25 = \frac{1}{4}$$

$$\cot B = 0,4 = \frac{2}{5}$$



Belső szög függvényei:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

$$\sin \alpha = \cos B$$

$$\lg \alpha = \frac{a}{c}$$

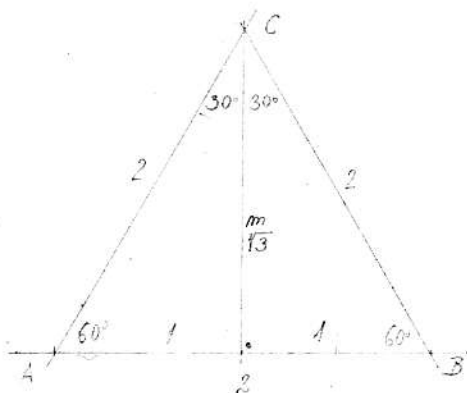
$$\cot B = \frac{a}{c}$$

$$\lg \alpha = \cot B$$

Bármely szög függvénye egyenlő a pótszögének pótszögfüggvényével.

A 30, 45 és 60 fokban szögelt szögfüggvények

$$\begin{aligned}\sin 18^\circ &= \cos 72^\circ \\ \cos 63^\circ &= \sin 27^\circ \\ \lg 58^\circ &= \operatorname{ctg} 32^\circ \\ \operatorname{ctg} 50^\circ &= \lg 40^\circ\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}m^2 &= 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \\ m &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lg 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

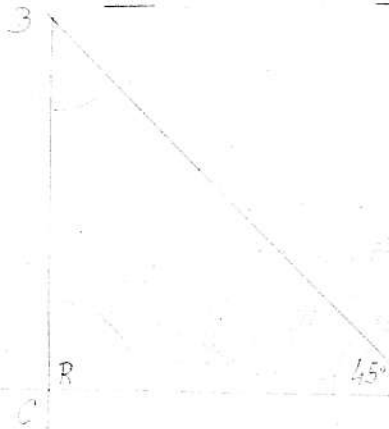
$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\lg 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\begin{aligned}c^2 &= 1^2 + 1^2 \\ c &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lg 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$m^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \quad m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lg 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\lg 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

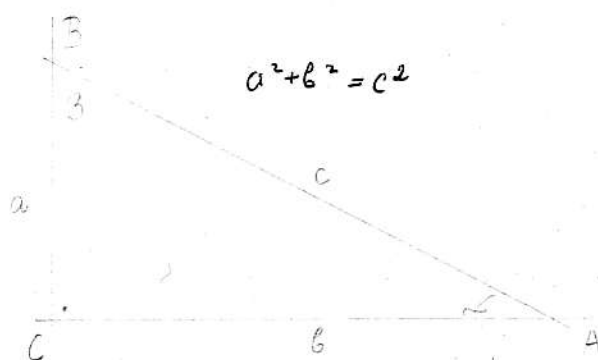
$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lg 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

1966.1.26.

3. óra  
 Pitagorasz tétele és trigonometriai képletek



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\underline{\underline{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (2)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \tan \alpha$$

$$\underline{\underline{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (2)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{bc}{ac} = \frac{b}{a} = \cot \alpha$$

$$\underline{\underline{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\underline{\underline{\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1}} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

Ismerjük  $\sin \alpha$ -t, fejezzük ki vele  $\cos \alpha$ -t

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

$$\tan \alpha = t$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{t}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

Ismer.  $\cos \alpha$   $\operatorname{tg} \alpha = ?$   $\sin \alpha = ?$   $\operatorname{ctg} \alpha = ?$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$$

$\sin \alpha$  előbbi adatok

$\operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$$

4. óra

1966. XI. 2.

$\sin \alpha = 3/4$   $\cos \alpha = ?$   $\operatorname{tg} \alpha = ?$   $\operatorname{ctg} \alpha = ?$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \sqrt{0.4375} = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{2.64}{4} = 0.661$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{12}{4 \cdot \sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{7} = 1.133$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{4 \cdot \sqrt{7}}{12} = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.881$$

$\operatorname{tg} \alpha =$

$\sin \alpha = ?$   $\cos \alpha = ?$   $\operatorname{ctg} \alpha = ?$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad | : \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$$

$\operatorname{ctg} \alpha =$

$\sin \alpha = ?$   $\cos \alpha = ?$   $\operatorname{tg} \alpha = ?$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad | : \sin^2 \alpha$$

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}}$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}}$$

1966. XI. 2.

#### 4. Kézi feladat

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$1, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{3}{4} = \tan \alpha = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$2, \quad \tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{\frac{16}{9} + 1}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} = \frac{3}{3,161} = 0,949$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$$

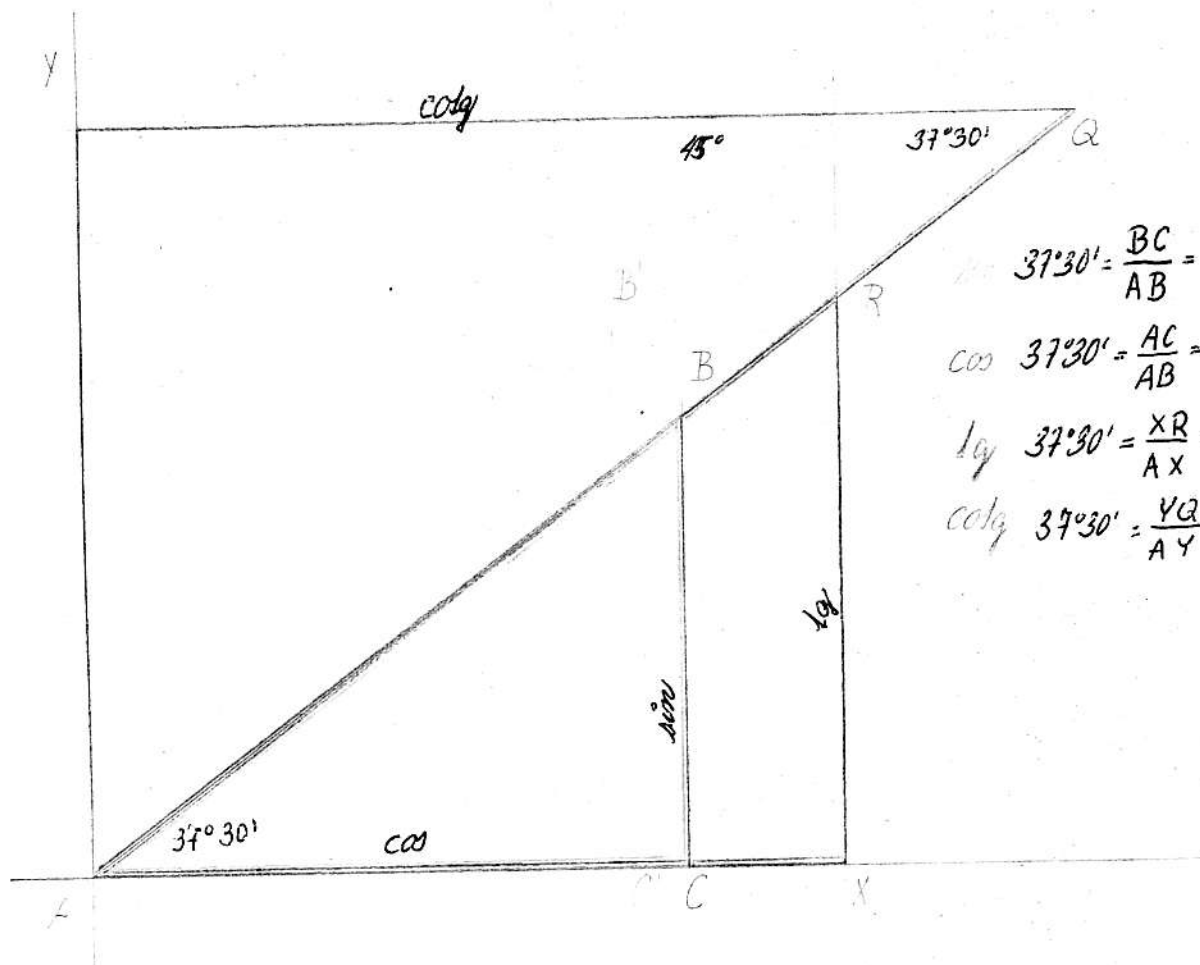
$$\sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot 0,949$$

$$\sin \alpha = 0,9158$$

9. 11. 1966

#### 5. ora

#### A függvények függvényértékei



$$\sin 37^\circ 30' = \frac{BC}{AB} = 0,61$$

$$\cos 37^\circ 30' = \frac{AC}{AB} = 0,79$$

$$\tan 37^\circ 30' = \frac{BC}{AC} = 0,77$$

$$\cot 37^\circ 30' = \frac{AC}{BC} = 1,3$$

B a megadott függvényekékek elrendezése a táblázatban.

$$\alpha + \beta = 90 \quad \alpha; \beta \text{ pozitív}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos(90 - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos(90 - \alpha)}{\sin(90 - \alpha)}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin(90 - \alpha)}{\cos(90 - \alpha)}$$

Ha  $\alpha_1 > \alpha_2 \rightarrow \sin \alpha_1 > \sin \alpha_2$   $\alpha$  nagyobb szög függvénye nagyobb  
 $\operatorname{tg} \alpha_1 > \operatorname{tg} \alpha_2$

A növekedés nem egyenlően arányos

Ha  $\alpha_1 > \alpha_2 \rightarrow \cos \alpha_1 < \cos \alpha_2$   
 $\operatorname{ctg} \alpha_1 < \operatorname{ctg} \alpha_2$

Hf. 193. 1. a b

194. 4. a b c d + bíz (a körből)

1966. XI. 9.

$\triangle PQR \triangleleft R$ , egyik hegyesszöge  $\omega = 52^\circ 30'$ .

a. Sz. fel. minde. hegy. szög. gen. függ. 1-2 old. arányként.

b. Hat. meg. ezek közül "két" is.

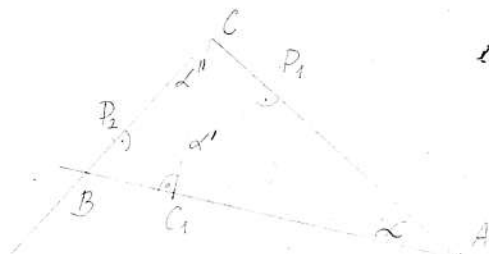
|   |                           |                                             |                                        |
|---|---------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------|
|   | $P = 90 - 52^\circ 30' =$ | $\sin 52^\circ 30' = \frac{4}{5}$           | $\sin 37^\circ 30' = \frac{3}{5}$      |
| 3 | $4 = 37^\circ 30'$        | $\cos \omega = \frac{3}{5}$                 | $\cos P = \frac{4}{5}$                 |
| 5 |                           | $\operatorname{tg} \omega = \frac{4}{3}$    | $\operatorname{tg} P = \frac{3}{4}$    |
|   |                           | $\operatorname{ctg} \omega = \frac{3}{4}$   | $\operatorname{ctg} P = \frac{4}{3}$   |
|   |                           | $\sec \omega = \frac{5}{3}$                 | $\sec P = \frac{5}{4}$                 |
|   |                           | $\operatorname{cosec} \omega = \frac{5}{4}$ | $\operatorname{cosec} P = \frac{4}{3}$ |

Ha  $\triangle ABC \triangleleft R$  ( $\triangle ABC \triangleleft R$ ),  $A \neq L$ . Legyen  $C_1$  az AB oldalra C pontból bocsátott merőleges talppontja, jelöljük továbbá AC ill. AB befogóival  $C_1$  ponttól bocsátott merőlegesek talppontjait  $P_1$  ill.  $P_2$ -vel. Biz. be hogy ha  $\overline{CP_1}$ ,  $\overline{CP_2}$ ,  $\overline{BC_1}$ ,  $\overline{AC_1}$  rendre a  $\overline{CP_1}$ ,  $\overline{CP_2}$ ,  $\overline{BC_1}$ ,  $\overline{AC_1}$  szakaszok hosszát jelöljük,  $CC_1$  köréírásgéppé mellett, akkor  $\sin L = \frac{\overline{CP_1}}{\overline{AC_1}}$

$$\cos L = \frac{\overline{CP_2}}{\overline{BC_1}}$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}}$$

$$\operatorname{ctg} L = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}$$



egység  $CC_1$ .

$$\sin L = \frac{CP_1}{CC_1}$$

$$\cos L = \frac{CP_2}{CC_1}$$

$$\lg L = \frac{BC_1}{CC_1}$$

$$\cotg L = \frac{AC_1}{CC_1}$$

$$\sin L = CP_1 \quad L = L', \text{ mivel } \perp \text{ azon a függőleges.} \quad \sin L' = \frac{CP_1}{CC_1} \Rightarrow \sin L = CP_1$$

$$\cos L = CP_2 \quad L = L' = L'', \text{ mivel } \perp. \quad \cos L' = \frac{CP_2}{CC_1} \Rightarrow \cos L = CP_2$$

$$\lg L = BC_1 \quad L = L'' \quad \lg L'' = \frac{BC_1}{CC_1} \Rightarrow \lg L = BC_1$$

$$\cotg L = AC_1 \quad \cotg L = \frac{AC_1}{CC_1} \Rightarrow \cotg L = AC_1$$

Írjuk meg az  $L$  függőleges, ha.

$$\sin L = \frac{3}{5}$$

$$\cos L = 0,4$$

$$\lg L = 1,35$$

$$\cotg L = 3.$$

6 ~ 7. óra

1966. XI. 12.

$00^\circ - 90^\circ$  - ig megállapították (számtáblával) a függvényértékeket.

1. A táblával meghatározza valamely kégyenrész szögfüggvényértékét.  
 $\sin 32^\circ 10' = 0,53238$

2.  $\sin \alpha = 0,24756$  - vízszakerecs  
 $\alpha = 14^\circ 20'$

D - táblabeli különbség

$\sin 20^\circ 40' = 0,35293$      $\lg 15^\circ 30' = 0,27732$      $\cos 85^\circ 10' = 0,08426$   
 $\sin 69^\circ 40' = 0,94068$      $\lg 87^\circ 10' = 20,20555$   
 $\sin 69^\circ 20' = 0,93565$      $\cos 13^\circ 50' = 0,97100$

L. Kov.

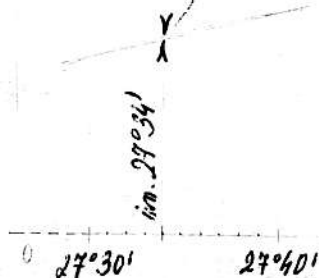
21

8. óra

Függvénytáblázatok használata

1966. XI. 16.

$\sin 25^\circ 30' = 0,43051$      $\sin 27^\circ 34'$   
 $\sin 30^\circ = 0,5$      $27^\circ 30' < 27^\circ 34' < 27^\circ 40'$   
 $\sin 27^\circ 30' < \sin 27^\circ 34' < \sin 27^\circ 40'$   
 $0,46175 < \sin 27^\circ 34' < 0,46433$



$$\sin 27^\circ 40' - \sin 27^\circ 30' = 0,00258$$

10' ... 258  
 1' ... 25,8  
 4' ... 4.258 = 103,2 = 103

$$\sin 27^\circ 34' = \frac{0,46175}{103}$$

$$\underline{\underline{0,46278}} = \sin 27^\circ 34'$$

197. o.    198. - jeldo : 3.

5 sin.    5 tg  
 5 cos.    5 cotg

8. tábla feladat

1966. XI. 16.

$$\cotg 8^\circ 43' = ?$$

$8^\circ 40' \dots 6,56055$      $d_1 = 1257$   
 $3' \dots -3771$      $d_3 = 1257,3 = 3771$   
 $\cotg 8^\circ 43' = 6,52284$

$$\sin 12^{\circ}34' = 0,21644$$

$$\begin{array}{r} 1137 \\ \hline 0,217577 \end{array}$$

$$\sin 23^{\circ}45' = 0,40142$$

$$\begin{array}{r} 183,5 \\ \hline 0,40255 \end{array}$$

$$\sin 34^{\circ}56' = 0,57119$$

$$\begin{array}{r} 1414 \\ \hline 0,572604 \end{array}$$

$$\sin 45^{\circ}6' = 0,70711$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ \hline 0,70834 \end{array}$$

$$\sin 56^{\circ}4' = 0,82904$$

$$\begin{array}{r} 1135 \\ \hline 0,830175 \end{array}$$

$$\lg 3^{\circ}8' = 0,05241$$

$$\begin{array}{r} 232 \\ \hline 0,05473 \end{array}$$

$$\lg 3^{\circ}14' = 0,05383$$

$$\begin{array}{r} 1165 \\ \hline 0,056495 \end{array}$$

$$\lg 9^{\circ}9' = 0,15838$$

$$\begin{array}{r} 269 \\ \hline 0,16107 \end{array}$$

$$\lg 5^{\circ}9' = 0,08749$$

$$\begin{array}{r} 264 \\ \hline 0,09013 \end{array}$$

$$\lg 33^{\circ}3' = 0,54464$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ \hline 0,54537 \end{array}$$

$$\cos 33^{\circ}4' = 0,83867$$

$$\begin{array}{r} - 63 \\ \hline 0,83804 \end{array}$$

$$\cos 33^{\circ}9' = 0,83867$$

$$\begin{array}{r} - 139 \\ \hline 0,83728 \end{array}$$

$$\cos 27^{\circ}8' = 0,89101$$

$$\begin{array}{r} - 106 \\ \hline 0,88995 \end{array}$$

$$\cos 29^{\circ}5' = 0,87462$$

$$\begin{array}{r} - 70 \\ \hline 0,87392 \end{array}$$

$$\cos 31^{\circ}12' = 0,85567$$

$$\begin{array}{r} - 30 \\ \hline 0,85537 \end{array}$$

$$\sec 30^{\circ}27' = 0,86310$$

$$\begin{array}{r} - 103 \\ \hline 0,86207 \end{array}$$

$$\cotg 3^{\circ}3' = 19,08114$$

$$\cotg 0^{\circ}10' = 543,77371$$

$$\cotg 2^{\circ}4' = 28,63625$$

$$\cotg 3^{\circ}6' = 18,07498$$

$$\cotg 22^{\circ}12' = 2,45451$$

$$\begin{array}{r} - 406 \\ \hline 2,45045 \end{array}$$

$$\cotg 35^{\circ}2' = 1,42815$$

$$\begin{array}{r} - 176 \\ \hline 1,42639 \end{array}$$

$$\cotg 37^{\circ}5' = 1,32704$$

$$\begin{array}{r} - 400 \\ \hline 1,32304 \end{array}$$

1966. XI. 19.

9. 10. óra

Derekszögű háromszög trigonometriai megoldása.

$$\sin 69^{\circ}27' = 0,93565$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ + \\ \hline 0,93636 \end{array}$$

$$\cos 61^{\circ}43' = 0,47460$$

$$\begin{array}{r} 77 \\ - \\ \hline 0,47383 \end{array}$$

$$\lg 37^{\circ}13' = 0,60414 = 0,75812$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \hline 0,60483 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \hline 0,75950 \end{array}$$

$$\cotg 27^{\circ}55' = 1,89400$$

$$\begin{array}{r} 613 \\ - \\ \hline 1,88787 \end{array}$$

$$\sin \alpha = 0,04071$$

$$\alpha = 2^{\circ}20'$$

$$\sin \alpha = 0,99776$$

$$\alpha = 86^{\circ}10'$$

$$\cos \alpha = 0,99644$$

$$\alpha = 4^{\circ}50'$$

$$\cos \alpha = 0,98858$$

$$\alpha = 8^{\circ}40'$$

$$\lg \alpha = 0,18534$$

$$\alpha = 10^{\circ}30'$$

$$\lg \alpha = 2,82391$$

$$\alpha = 70^{\circ}30'$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 12,40620$$

$$\alpha = 4^{\circ}30'$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1,05378$$

$$\alpha = 43^{\circ}30' \quad \operatorname{ctg} \alpha = 1,05378$$

$$\lg \alpha = 1,28950 \quad \alpha = ?$$

$$\lg 52^{\circ}10' = 1,28764$$

$$\lg 52^{\circ}20' = 1,29541$$

$$D = 777 \quad d = 77,7$$

$$\begin{array}{r} 1,28950 \\ - 1,28764 \\ \hline 0,00186 \end{array}$$

$$186:77,7 \approx 2$$

$$\alpha = \underline{52^{\circ}12'}$$

$$a = 7,5 \text{ cm}$$

$$b = 12,4 \text{ cm}$$

$$c = ?$$

$$\alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7,5^2 + 12,4^2} = \sqrt{56,25 + 153,76} = \sqrt{210,01}$$

$$c \approx 14,49$$

$$\lg \beta = \frac{12,4}{7,5} \approx 1,65333$$

$$\begin{array}{l} 58^{\circ}50' \sim 1,65337 \\ 58^{\circ}40' \sim 1,64258 \end{array}$$

$$\beta \approx 58^{\circ}50'$$

$$\alpha = (90^{\circ} - 58^{\circ}50') \approx 31^{\circ}10'$$

A házmőzögel akkor tekinthető megoldottnak, ha ismerjük mindhárom szögét és a három oldat hosszát.

az előbbi eseteket keletkezésükhöz meg:

1. Adott 2 befogó, keresztük az átfogót és a nőgyék.
2. Ismét 1 befogó, és a vele szemben fekvő nőgy, keresztük a másik befogót, átfogót, másik nőgy.
3. Adott 1 befogó, a mellé fekvő nőgy, keresztük a másik befogót, átfogót és a másik nőgy.
4. Adott egy befogó és az átfogó, keresztük a másik befogót és a nőgyék.
5. Ismét az átfogó és egy hűtőszék, keresztük a pótlónőgy és a befogókat.

1966. XI. 19.

*H*

2030. 18ab  
2000. 11, 12, 13, 14, 15

$$\begin{array}{ll} a = 19,3 & b = ? \\ c = 27,5 & \alpha = ? \\ \gamma = 90^\circ & \beta = ? \end{array}$$

$$b = \sqrt{27,5^2 - 19,3^2} = \sqrt{\dots} = \underline{\underline{16,97}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{19,3}{27,5} = 0,70182$$

$$\sin 44^{\circ}30' = 0,70091$$

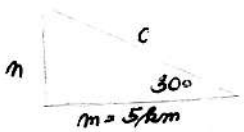
$$\begin{array}{r} D = 207 \\ d = 21 \\ \hline 0,70182 \\ -0,70091 \\ \hline 000091 \end{array}$$

$$91:21 \equiv 4$$

$$\angle = 44^{\circ} 34'$$

$$\beta = (90 - \angle) = \underline{45^{\circ} 26'}$$

a.) Hal. mag. az  $R \neq \Delta$  kiömlő oldalánál, ha adott.  
 $\gamma = 30^\circ$ ; a mag melleli befogója  $m = 5 \text{ km}$ .



$$\cos 30^\circ = \frac{m}{c} = \frac{5}{c}$$

$$\angle g 30^\circ = \frac{\pi}{m}$$

$$c = \frac{5}{\cos 30^\circ} = \frac{5}{0.866}$$

$$m = m \cdot \lg 30^\circ$$

$$m = 5.015774$$

$n = 2884 \text{ km}$

$$\beta_1 = 90 - \gamma = \underline{60^\circ}$$

$c = 5,775 \text{ km}$

- б.  $\alpha = 45^\circ$ , <sup>выс.</sup> ~~а~~ высота 140 м.

$$\sigma_1 = (\sigma + 90) = 450 \quad a = 140 \text{ mm}$$

$$\sigma = 45^\circ \quad b = 140 \text{ mm}$$

$$C = a \cdot \sqrt{2}$$

$$C = 140.41$$

$C = 200 \text{ m}$

$$2000/11. \sin 7^{\circ}37' = 0,13053$$

$$\begin{array}{r} 28,8.7 \\ \hline 2016 \\ 0,132546 \end{array}$$

$$\sin 44,9^{\circ} = \sin 44^{\circ}54' = 0,70505$$

$$\begin{array}{r} 20,6.4 \\ \hline 824 \\ 0,705874 \end{array}$$

$$\sin 63^{\circ}15' = 0,89232$$

$$\begin{array}{r} 19,1.5 \\ \hline 655 \\ 0,892975 \end{array}$$

$$\sin 84^{\circ}49' = 0,99567$$

$$\begin{array}{r} 2,7.9 \\ \hline 243 \\ 0,995913 \end{array}$$

$$12. \lg 11^{\circ}47' = 0,20648$$

$$\begin{array}{r} 30,7.7 \\ \hline 2149 \\ 0,208623 \end{array}$$

$$\lg 45^{\circ}8' = 1,00000$$

$$\begin{array}{r} 58.3 \\ \hline 464 \\ 1,00464 \end{array}$$

$$\lg 64^{\circ}7' = 0,42447$$

$$\begin{array}{r} 34,2.7 \\ \hline 2394 \\ 0,426864 \end{array}$$

$$13. \cos 18^{\circ}41' = 0,94740$$

$$\begin{array}{r} 9,4 \\ \hline 0,947306 \end{array}$$

$$\cotg 18^{\circ}41' = 2,96004$$

$$\begin{array}{r} 28,5.1 \\ \hline 2815 \\ 2,957225 \end{array}$$

$$\cos 43^{\circ}1' = \cos 43^{\circ}6' = 0,73135$$

$$\begin{array}{r} 19,8.6 \\ \hline 1188 \\ 0,730162 \end{array}$$

$$\cotg 43^{\circ}6' = 1,07237$$

$$\begin{array}{r} 62,4.6 \\ \hline 3764 \\ 1,068606 \end{array}$$

$$\cos 86,55' = \cos 1^{\circ}26,55' = 0,99998$$

$$\begin{array}{r} 0,2.6 \\ \hline 112 \\ 0,999968 \end{array}$$

$$\cotg 1^{\circ}26,55' = 171,88540$$

$$14. \sin B = 0,90823$$

$$\begin{array}{r} 0,90823 \\ - 0,90753 \\ \hline 000070 \end{array}$$

$$D=122 \quad 40:12, \div 6$$

$$\sin A = 0,99870$$

$$\begin{array}{r} 0,99870 \\ - 0,99863 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$7:15 \div 5$$

$$B = 65^{\circ}16'$$

$$A = 57^{\circ}5'$$

$$\sin \sigma = 0,4747$$

$$\begin{array}{r} 0,474 \\ \hline 0,47204 \\ 0,00204 \end{array}$$

$$204:25,6 \div 8$$

$$\sigma = 28^{\circ}18'$$

$$15. \lg p = 0,44$$

$$172:35 \div 5$$

$$p = 23^{\circ}45'$$

$$\lg d = 1,01$$

$$417:59 \div 7$$

$$d = 45^{\circ}7'$$

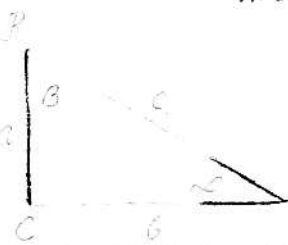
$$\lg p = 6$$

$$\begin{array}{r} 6,00000 \\ - 5,97576 \\ \hline 0,02424 \end{array}$$

$$2424:1086 \div 2$$

$$p = 80^{\circ}32'$$

$$\begin{aligned} a &= 6,72 \\ \alpha &= 52^\circ \\ b &= ? \\ \beta &= ? \\ c &= ? \end{aligned}$$



$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ = \beta$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \quad ?$$

$$b = \cot \alpha \cdot a$$

$$b = \cot 52^\circ \cdot 6,72$$

$$b = 0,61566 \cdot 6,72$$

$$0,78129$$

$$b = 5,25 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 0,78129 \cdot 6,72 \\ 468774 \\ 546903 \\ 156258 \\ \hline 5,2502688 \end{array}$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{6,72^2 + 5,25^2} = \sqrt{45,1584 + 27,5625} \\ c &= \sqrt{72,7} = 8,5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= 53,8 \\ \alpha &= 12^\circ 50' \\ \beta; a; b; \end{aligned}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 77^\circ 10'$$



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$a = \sin \alpha \cdot c$$

$$a = 53,8 \cdot 0,22212$$

$$a = 11,95$$

$$\begin{array}{r} 1076 \\ 53,8 \cdot 0,22212 \\ 1076 \\ 1076 \\ 1076 \\ \hline 11,950056 \end{array}$$

$$b = \sqrt{53,8^2 - 11,95^2} = \sqrt{2894,44 - 141,6} = \sqrt{2752,8} = 52,4 = b$$

Am A pontban ható  $F_1$  és  $F_2$  erők egyenlőre merőlegesek.  
Három ki az eredő:  $R$ . Ez az  $RF_1$  által bezárt szög let:  $F_1 = 63,7 \text{ kN}$   
 $F_2 = 42,7 \text{ kN}$ .

$$\begin{aligned} R &= ? \\ \alpha &= ? \end{aligned}$$



$$R = \sqrt{63,7^2 + 42,7^2} = \dots = 76,68 \text{ kN}$$

$$R = 76,7 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha = \frac{42,7}{63,7} = 0,67 \dots$$

$$\tan \alpha = 0,67$$

$$\alpha = 33^\circ 50'$$

Mely távra van a 28 m mag. építmény, ha  $32^\circ 30'$  szög alatt látható?



$$\cot 32^\circ 30' = x : 28$$

$$x = 28 \cdot \cot 32^\circ 30'$$

$$x = 28 \cdot 1,56969$$

$$x = 44 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 1,57 \cdot 28 \\ 314 \\ 1256 \\ \hline 43,96 \end{array}$$

$$\Delta T \text{ ha } a = 7,5 \quad b = 12,4$$

a.)

$$T = 7,5 \cdot 6,2 = 46,5$$

$$\begin{array}{r} 7,5 \cdot 6,2 \\ 450 \\ 150 \\ \hline 46,5 \end{array}$$

b.)

$$a = 19,3 \quad c = 25,7 \quad b = \sqrt{25,7^2 - 19,3^2} = \sqrt{-372,5 + 6600} = \sqrt{287,5} = 16,95$$

$$T = 486,$$

$$c_1 \quad a = 6,72 \text{ m}$$

$$\alpha = 52^\circ$$

$$\lg 52^\circ = \frac{a}{b} \quad b = \frac{a}{\lg 52^\circ}$$

at

$$T = a \cdot b = \frac{a^2}{\lg 52^\circ} = \frac{6,72^2}{\lg 52^\circ} = \frac{45,2}{1,2799} = \underline{35,4 \dots \text{ m}^2}$$

$$d_1 \quad a = 5,47 \text{ m}$$

$$\beta = 27^\circ 48'$$

$$\lg \beta = \frac{a}{b}$$

$$b = \lg 27^\circ 48' \cdot 5,47 = 2,64$$

$$T = a \cdot b = \underline{14,43 \text{ m}^2}$$

$$e_1 \quad a = 5,47 \text{ m}$$

$$200.0.16,17$$

16,

$$\cotg \alpha = 0,902$$

$$\alpha = \underline{47^\circ 53'}$$

$$\cotg 47^\circ 50' = 0,90569$$

$$\cotg 48^\circ = 0,90040$$

$$D = 529 \quad d = 53$$

$$0,90569$$

$$-0,902$$

$$869$$

$$0,902$$

$$-0,9004$$

$$160$$

$$160:53 = 3$$

$$\cotg \alpha = 0,333$$

$$\alpha = \underline{71^\circ 54'}$$

$$\cotg 71^\circ 40' = 0,33136$$

$$\cotg 71^\circ 50' = 0,32814$$

$$\cotg 71^\circ 30' = 0,33460$$

$$d = 32$$

$$d = 32$$

$$0,33460$$

$$-0,333$$

$$130:32 = 4$$

$$\cotg \alpha = 0,050$$

$$\alpha = \underline{87^\circ 8'}$$

$$\cotg 87^\circ = 0,05241$$

$$\cotg 87^\circ 10' = 0,04949$$

$$d = 29$$

$$241:29 = 8$$

$$51:29 = 2$$

17,

$$\lg d = 3 \quad \alpha = \underline{71^\circ 3'}$$

$$\sin \gamma = 0,452 \quad \gamma = \underline{24^\circ 20'}$$

$$\cotg \delta = 0,9875 \quad \delta = \underline{45^\circ 22'}$$

$$0,98843$$

$$-0,98750$$

$$= 93$$

$$d = 57$$

$$93:57 = 2$$

$$\cos \varphi = 0,300 \quad \varphi = \underline{17^\circ 28'}$$

$$\cos 17^\circ 30' = 0,30071$$

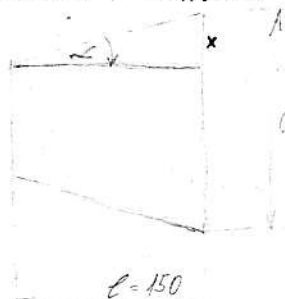
$$d = 28$$

$$71:28 = 2$$

12. óra

## Gyakorlat

A munkadarabot kúposra kell alakítani. A magy átmérő 28 mm. A munkadarab hossza 150 mm. A kúp félröge  $2^\circ 40'$ . Mekkora a kisebbik átmérő.



$$\begin{aligned} d_1 &= 28 \text{ mm} \\ l &= 150 \text{ mm} \\ \alpha &= 2^\circ 40' \\ d_2 &= ? \end{aligned}$$

$$\lg \frac{x}{l} = \frac{\alpha}{\rho}$$

$$\lg 2^\circ 40' = 150 = x$$

$$x = 0,04658 \cdot 150$$

$$x = 6,9 \text{ mm}$$

$$d_2 = 28 - 13,8$$

$$d_2 = 14,2 \text{ mm}$$

$$\begin{array}{r} 0,04658 \cdot 150 \\ 232900 \\ \hline 00698700 \end{array}$$

Kelcsináljuk meg a rombusz területét, ha oldalainak hossza 12,6 cm és a két oldal által bezárt szög  $29^\circ 40'$ .



$$\alpha = \frac{29^\circ 40'}{2} = 14^\circ 50'$$

$$\sin 14^\circ 50' = \frac{x}{12,6}$$

$$x = 12,6 \cdot 0,25601$$

$$x = 3,2$$

$$y = \sqrt{12,6^2 - 3,2^2} = \sqrt{146,4 - 10,2}$$

$$y = \sqrt{136} \quad y = 11,6$$

$$\begin{array}{r} 0,256 \cdot 12,6 \\ 512 \\ 1536 \\ \hline 0,32256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,2 \cdot 12,6 \\ 64 \\ 192 \\ \hline 4032 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (T &= 2 \cdot 12,6 \cdot 3,2) \\ (T &= 81 \text{ cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3,2 \cdot 11,6 \\ 32 \\ 192 \\ \hline 3712 \end{array}$$

$$T = 2 \cdot y \cdot x = 2 \cdot 11,6 \cdot 3,2$$

$$T = 37,2 = 72 \text{ cm}^2$$

12. óra

Milyen magas az a tornyantarom, melyet a közepén 150 m hosszú sodronykötelekkel rögzítettek, ha a kötelek  $42^\circ 40'$  szög alatt állnak.



$$\sin 42^\circ 40' = \frac{x}{150}$$

$$x = \sin 42^\circ 40' \cdot 150$$

$$x = 0,6773 \cdot 150$$

$$x = 102$$

$$m = 203 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 0,6777 \cdot 150 \\ 23885 \\ \hline 1016550 \end{array}$$

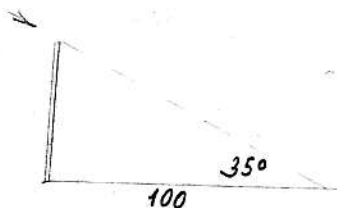
Egy 8 m hosszú pallóval lejtőt akarunk készíteni az 1,4 m magas átlósíron. Mekkora lesz a lejtő hajlásszöge?



$$\sin \alpha = \frac{1,4}{8} = 0,175$$

$$\alpha = 10^\circ 10'$$

Milyen magas az a torony, mely csúcsára a vízszintes síkon 100 m, ha a Nap sugarai  $35^\circ$ -os szög alatt esnek a földre.



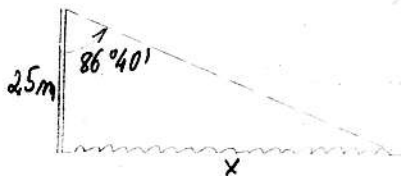
$$\tan 35^\circ = \frac{x}{100}$$

$$x = 100 \cdot \tan 35^\circ$$

$$x = 100 \cdot 0,7002$$

$$x = 70 \text{ m}$$

Egy folyó partján egy torony áll, amelynek 25 m magasán lévő ablakából a folyó szélessége  $86^\circ 40'$  szög alatt látható. Milyen széles a folyó?



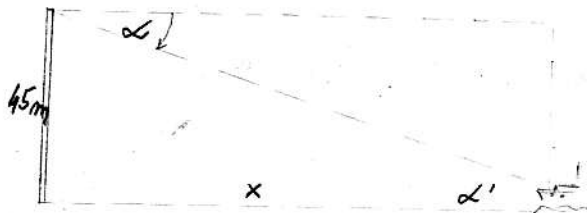
$$\tan 86^\circ 40' = \frac{x}{25}$$

$$x = \tan 86^\circ 40' \cdot 25$$

$$x = 17,17 \cdot 25$$

$$x = \frac{1717}{4} = 429 \text{ m}$$

Egy kikötő világító toronyból, a longer szintje fölött 45 m magasságból egy hajó  $8^\circ 20'$ -nyi depressziós szög alatt látható (a m.-lét lefelé). Milyen távol van a hajó?



$$\cot 8^\circ 20' = \frac{x}{45}$$

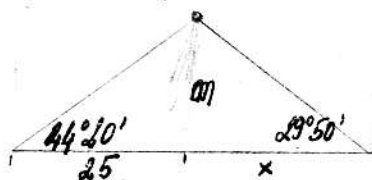
$$x = 45 \cdot \cot 8^\circ 20'$$

$$x = 45 \cdot 6,827$$

$$x = 307,215 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 6,827 \cdot 45 \\ 27308 \\ \hline 34135 \end{array}$$

196  
Egy fa két hely körül, ismeretlen egyenestűl áll.  
Az egyikről 25 m távra van. Ekkor a körül 44°20'-nyi, a más-  
siktól 29°50'-nyi szög alatt látszik. Mennyire van egyen-  
estűl a két fa?



$$\lg 44^{\circ}20' = \frac{m}{25}$$

$$\cot 29^{\circ}50' = \frac{x}{m}$$

$$m = 25 \cdot \lg 44^{\circ}20'$$

$$x = 24,4 \cdot 1,74$$

$$m = 25 \cdot 0,977$$

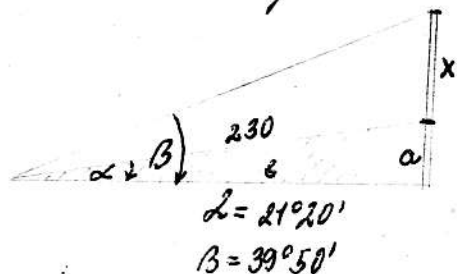
$$x = 42,456$$

$$m = \frac{0,977}{4} = 24,4$$

$$\begin{array}{r} 1,74 \cdot 24,4 \\ 348 \\ 696 \\ \hline 696 \end{array}$$

$$h = 25 + x = 67,5 \text{ m}$$

Egy tornyantörőműhöz 230 m hosszú egyenes út vezet, mely  
emelkedési szöge 21°20'. Az út elején az antenna körül 39°50'  
emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az antenna?



$$\sin 21^{\circ}20' = \frac{a}{230}$$

$$\begin{array}{r} 0,36 \cdot 230 \\ 72 \\ 1080 \\ \hline 8280 \end{array}$$

$$a = 230 \cdot 0,36$$

$$a = 82,8 \text{ m}$$

$$\cos 21^{\circ}20' = \frac{b}{230}$$

$$\begin{array}{r} 0,93 \cdot 230 \\ 186 \\ 2190 \\ \hline 21390 \end{array}$$

$$b = 230 \cdot \cos 21^{\circ}20'$$

$$b = 230 \cdot 0,93$$

$$b = 214 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r} 0,834 \cdot 214 \\ 1668 \\ 3336 \\ \hline 170136 \end{array}$$

$$\lg 39^{\circ}50' = \frac{x + 83}{214}$$

$$0,834 \cdot 214 = x + 83$$

$$x = 170 - 83 = 87 \text{ m}$$

197  
Mekkora szöggel emeli a Mars sugara a földet, ha  
valamely függőleges irány a vizor. Itén 3x akkora mint maga.

$$\lg 2 = \frac{1}{3} \quad L = 10^{\circ}30'$$



13.14 sz.

1966. XII. 2.

Egy csavar átmérője 32,4 mm. Egy menetmagasság 12 mm.  
Mekkora a csavar emelkedési szöge?



$$a = d \cdot \pi$$

$$a = 32,4 \cdot 3,14$$

$$a \approx 101,8$$

$$b = 12$$

$$\lg \gamma = \frac{b}{a} = \frac{12}{101,8} = 0,118$$

$$\gamma \approx 6^\circ 44'$$

Egy-egy csavar átmérője 3,5°, egy menet magassága 10 mm. Mekkora a csavar átmérője?



$$\lg 3,5^\circ = \frac{10}{b}$$

$$d = \frac{b}{\pi}$$

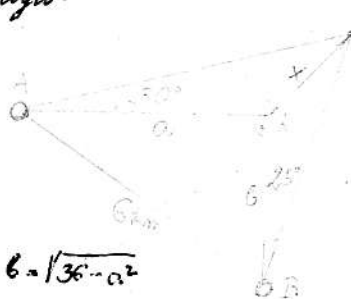
$$b = \frac{10}{0,06}$$

$$d = \frac{166,6}{3,14}$$

$$b \approx 166,6$$

$$d \approx 53, \text{ mm}$$

Egy léghajó A-ből kelet felé 30°, B-ből észak felé 25° emelkedési szög alatt látvány. AB = 6 km. Mekkora a léghajó magassága?



$$\lg 30^\circ = x : a \rightarrow a = x : \lg 30^\circ$$

$$\lg 25^\circ = x : \sqrt{36 - a^2}$$

$$\sqrt{36 - a^2} = x : \lg 25^\circ$$

$$36 - a^2 = x^2 \cdot (\lg 25^\circ)^2 / (-1)$$

$$a = \sqrt{36 - \frac{x^2}{(\lg 25^\circ)^2}}$$

$$x : \lg 30^\circ = \sqrt{36 - \frac{x^2}{(\lg 25^\circ)^2}} / 2$$

$$\frac{x^2}{(\lg 30^\circ)^2} = 36 - \frac{x^2}{(\lg 25^\circ)^2}$$

$$\frac{x^2}{(\lg 30^\circ)^2} + \frac{x^2}{(\lg 25^\circ)^2} = 36 \cdot (\lg 30^\circ)^2 / (\lg 25^\circ)^2$$

$$x^2 \cdot (\lg 25^\circ)^2 + x^2 \cdot (\lg 30^\circ)^2 = 36 \cdot (\lg 30^\circ)^2 / (\lg 25^\circ)^2$$

$$x = \frac{6 \cdot \lg 30^\circ \cdot \lg 25^\circ}{\sqrt{(\lg 25^\circ)^2 + (\lg 30^\circ)^2}} = \frac{6 \cdot 0,577 \cdot 0,466}{0,745}$$

$$x \approx \frac{16,185}{0,745} \approx 21,7 \text{ km}$$

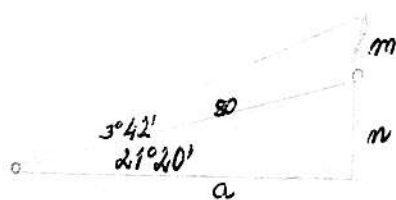
Milyen magas az a hegy, amelyre egy 2356 m hosszú egypáncsút vezet, ha az út a vízszintes síkhoz 40°50' szög alatt hajlik?

$$\sin 40^\circ 50' = \frac{m}{2356}$$

$$m = 2356 \cdot 0,654$$

$$m \approx 1568$$

80 m hosszú lejtő az felvő völgyében lévő emlékművet  
 $3,7^\circ$ -os szög alatt látunk az út eljéről. A lejtő hajlás-  
 szöge  $21^\circ 20'$ . Milyen magas az emlékmű?



$$\sin 21^\circ 20' = \frac{m}{80}$$

$$\cos 21^\circ 20' = \frac{a}{80}$$

$$m = 80 \cdot \sin 21^\circ 20'$$

$$a = 80 \cdot 0,93$$

$$m = 80 \cdot 0,36$$

$$a = 74,4 \text{ m}$$

$$m = 28,8 \text{ m}$$

$$\lg 25^\circ = \frac{m+n}{a}$$

$$a \cdot \lg 25^\circ = m+n$$

$$m = a \cdot \lg 25^\circ - n$$

$$m = 5,85$$

$$m = 74,4 \cdot 0,466 - 28,8$$

$$m = 34,65 - 28,8$$

Egy egy oldalú  $\Delta$ -ban az alap és a másik két oldalra  $30,4 \text{ m}$ ; az  
 alapon fekvő szög  $29,4^\circ$ -os. Mekkora a  $\Delta$  másik két oldala, területe?

$$\cos 29^\circ 24' = \frac{b+30,4}{2b}$$

$$a = b + 30,4$$

$$2b \cdot 0,871 = b + 30,4$$

$$a = 71,4 \text{ m}$$

$$1,742b = b + 30,4$$

$$0,742b = 30,4$$

$$b = \frac{30,4}{0,74}$$

$$b = 41 \text{ m}$$

$$T = \frac{b \cdot \sqrt{b^2 - c^2}}{2} = \frac{m \cdot \sqrt{m^2 - c^2}}{2}$$

$$T = a \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = 35,7 \cdot \sqrt{35,7^2 - 41^2} = 35,7 \cdot \sqrt{1275 - 1680} = 35,7 \cdot \sqrt{2955} = 35,7 \cdot 54,4 = 1523 \text{ m}^2$$

Mekkora az a húr, amely egy 7 cm sugarú körben  $75^\circ$ -os középponti szöghöz tartozik?



$$\alpha = 37^\circ 30'$$

$$\sin 37^\circ 30' = \frac{b_1}{r}$$

$$\sin 37^\circ 30' \cdot r = b_1$$

$$0,609 \cdot 7 = b_1$$

$$b_1 = 4,263 \text{ cm}$$

$$b = 2b_1 = \underline{\underline{8,5 \text{ cm}}}$$

Egy egyenlő oldalú  $\Delta$  alapja 300 m, a csúcs és az alaphoz tartozó  $\frac{1}{2}$  magasság különbsége 36 m. Mekkora a csúcs, szög, az alaphoz tart. magass. és a terület?

$$(m+36)^2 = m^2 + 150^2$$

$$m^2 + 72m + 1296 = m^2 + 22500$$

$$72m = 22500 - 1296 = 21204$$

$$m = \frac{21204}{72} = \underline{\underline{295 \text{ m}}}$$

$$b = 295 + 36 = \underline{\underline{331 \text{ m}}}$$

$$T = 150 \cdot 295 = \underline{\underline{44250 \text{ m}^2}}$$

$$\sin B = m/b = \frac{295}{331} = 0,891$$

$$\underline{\underline{B = 63^\circ}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 27^\circ}}$$

Egyenl.  $\alpha$ .  $\Delta$ -ben alap + oldal 11 cm. Alapon f. szög 53°8'.  
Mekk. a  $\Delta$  old., csúcson. s területe.

$\Delta$

$$2a + c = 11$$

$$\angle = 2(90 - 53^\circ 8') = 2 \cdot 36^\circ 52' = 73^\circ 44'$$

$$2a = 11 - c$$

$$c = 11 - 2a$$

$$\cos 53^\circ 8' = \frac{a}{c} = \frac{11 - c}{2c}$$

$$\left( \begin{aligned} \lg \cos 53^\circ 8' &= 0,977812 \\ \cos 53^\circ 8' &= 0,9502 \end{aligned} \right)$$

$$\cos 53^\circ 8' = \frac{a}{c} = \frac{a}{11 - 2a}$$

$$(11 - 2a) \cdot 0,5994 = a$$

$$c = 11 - 2a$$

$$c = 11 - 6$$

$$c = 5$$

$$6,585(-1,665) - 11,95a = a$$

$$6,58 = 2,19a$$

$$a = 3 \text{ cm}$$

$$m = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$T = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

1966. XII. 10.

16, 17 óra

Geometriai feladatok állatorvoslatára.

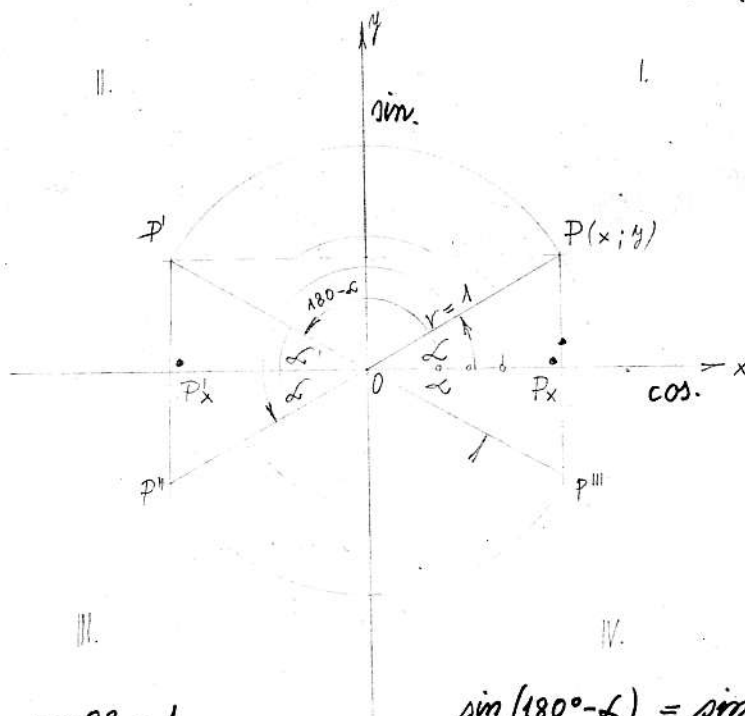
$K = (0; 1)$  - egyenletű kör

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = x$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



I.  $0^\circ \sim 90^\circ$

II.  $90^\circ \sim 180^\circ$

III.  $180^\circ \sim 270^\circ$

IV.  $270^\circ \sim 360^\circ$

$x = \overline{OP_x}$  - absz.  
 $y = \overline{OP_y}$  - ord.

$$y = \sin \alpha$$

$$x = \cos \alpha$$

$$\sin 0^\circ = 0 \quad \cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin 180^\circ = 0 \quad \cos 180^\circ = -1$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

$$\cos 270^\circ = 0$$

$$\sin 270^\circ = -1$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = \frac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\sin(360^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin 360^\circ = 0$$

$$\cos 360^\circ = 1$$

A sinusz az 1. és 2. negyedben ( $0^\circ \sim 180^\circ$ ) pozitív,  
a 3. és 4. negyedben ( $180^\circ \sim 360^\circ$ ) negatív.

A koszinusz az 1. negyedben ( $0^\circ \sim 90^\circ$ ) és a 4. negyedben ( $270^\circ \sim 360^\circ$ ),  
a 2. és 3. negyedben ( $90^\circ \sim 270^\circ$ ) negatív.

A tangens és kotangens előjelét a 2. kanyarokból állapíthatjuk meg.

$$\sin 103^\circ = \sin(180 - 103) = \sin 77^\circ = 0,97437$$

$$\sin 107^\circ = \sin(180 - 107) = \sin 73^\circ = 0,95630$$

$$\sin 159^\circ = \sin(180 - 159) = \sin 21^\circ = 0,35837$$

$$\sin 213^\circ = -\sin(213 - 180) = -\sin 33^\circ = -0,54464$$

$$\sin 242^\circ = -\sin(242 - 180) = -\sin 62^\circ = -0,88295$$

$$\sin 312^\circ = -\sin(360 - 312) = -\sin 48^\circ = -0,74314$$

$$\sin 355^\circ = -\sin(360 - 355) = -\sin 5^\circ = -0,08716$$

$$\cos 143^\circ = -\cos(180 - 143) = -\cos 37^\circ = -0,79864$$

$$\cos 192^\circ = -\cos(192 - 180) = -\cos 12^\circ = -0,97815$$

$$\cos 284^\circ = \cos(284 + 360) = \cos 76^\circ = 0,24192$$

$$\operatorname{tg} 136^\circ = \frac{\sin 136^\circ}{\cos 136^\circ} = -\frac{\sin 46^\circ}{\cos 46^\circ} = -\frac{0,71834}{0,69466}$$

$$\operatorname{tg} 218^\circ = \operatorname{tg}(180 + 38)^\circ = 0,78129$$

$$\operatorname{ctg} 347^\circ = -\operatorname{ctg} 13^\circ = 0,23087$$

$$\operatorname{cotg} 138^\circ = \operatorname{cotg} (180^\circ - 42^\circ) = -\operatorname{cotg} 42^\circ = -1,1106$$

$$\operatorname{cotg} 227^\circ = \operatorname{cotg} 47^\circ = 0,93252$$

$$\operatorname{cotg} 348^\circ = -\operatorname{cotg} 12^\circ = -4,70463$$

II. m. 5 n. cos. , Lg. , cotg. ,

III. m. " "

IV. m. " "

|        | I. | II. | III. | IV. |
|--------|----|-----|------|-----|
| sin.   | +  | +   | -    | -   |
| cosin. | +  | -   | -    | +   |
| Lg.    | +  | -   | +    | -   |

1966. XII. 10.

17. H

$$\sin 100^\circ = \sin (180 - 100) = \sin 80^\circ = 0,98481$$

$$\sin 123^\circ = \sin 57^\circ = 0,83867$$

$$\sin 142^\circ = \sin 38^\circ = 0,61566$$

$$\sin 155^\circ = \sin 25^\circ = 0,42262$$

$$\sin 175^\circ = \sin 5^\circ = 0,08716$$

$$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ = -0,17365$$

$$\cos 123^\circ = -\cos 57^\circ = -0,54464$$

$$\cos 142^\circ = -\cos 38^\circ = -0,78801$$

$$\cos 155^\circ = -\cos 25^\circ = -0,90631$$

$$\cos 175^\circ = -\cos 5^\circ = -0,99619$$

$$\lg 100^\circ = -\lg (180 - 100) = -\lg 80^\circ = -5,67128$$

$$\lg 123^\circ = -\lg 57^\circ = -1,53987$$

$$\lg 142^\circ = -\lg 38^\circ = -0,78129$$

$$\lg 155^\circ = -\lg 25^\circ = -0,46631$$

$$\lg 175^\circ = -\lg 5^\circ = -0,08749$$

$$\operatorname{cotg} 100^\circ = -\operatorname{cotg} 80^\circ = -0,17633$$

$$\operatorname{cotg} 123^\circ = -\operatorname{cotg} 57^\circ = -0,64941$$

$$\operatorname{cotg} 142^\circ = -\operatorname{cotg} 38^\circ = -1,27994$$

$$\operatorname{cotg} 155^\circ = -\operatorname{cotg} 25^\circ = -2,14451$$

$$\operatorname{cotg} 175^\circ = -\operatorname{cotg} 5^\circ = -11,43005$$

$$\sin 185^\circ = -\sin (185 - 180) = -\sin 5^\circ = -0,08716$$

$$\sin 190^\circ = -\sin 10^\circ = -0,17365$$

$$\sin 192^\circ = -\sin 12^\circ = -0,20791$$

$$\sin 198^\circ = -\sin 18^\circ = -0,30902$$

$$\sin 200^\circ = -\sin 20^\circ = -0,34202$$

$$\cos 185^\circ = -\cos 5^\circ = -0,99619$$

$$\cos 190^\circ = -\cos 10^\circ = -0,98481$$

$$\cos 192^\circ = -\cos 12^\circ = -0,97815$$

$$\cos 198^\circ = -\cos 18^\circ = -0,95106$$

$$\cos 200^\circ = -\cos 20^\circ = -0,93969$$

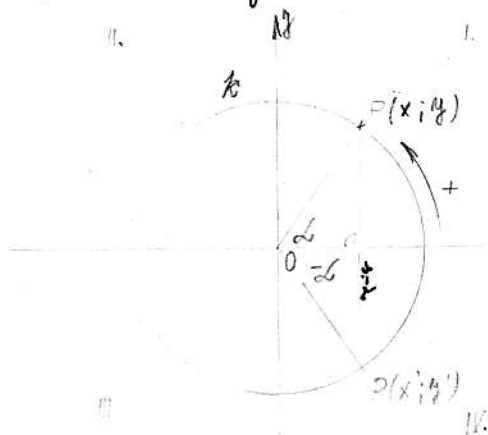
$$\begin{aligned}
 \lg 185^\circ &= \lg 5^\circ = 0,08749 \\
 \lg 190^\circ &= \lg 10^\circ = 0,17633 \\
 \lg 192^\circ &= \lg 12^\circ = 0,21256 \\
 \lg 200^\circ &= \lg 20^\circ = 0,36397 \\
 \lg 210^\circ &= \lg 30^\circ = 0,57735 \\
 \operatorname{ctg} 190^\circ &= \operatorname{ctg} 10^\circ = 5,67128 \\
 \operatorname{ctg} 200^\circ &= \operatorname{ctg} 20^\circ = 2,74748 \\
 \operatorname{ctg} 230^\circ &= \operatorname{ctg} 50^\circ = 0,83910 \\
 \operatorname{ctg} 240^\circ &= \operatorname{ctg} 60^\circ = 0,57735 \\
 \operatorname{ctg} 267^\circ &= \operatorname{ctg} 87^\circ = 0,05241
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 280^\circ &= -\sin 80^\circ = -0,98481 \\
 \sin 283^\circ &= -\sin 77^\circ = -0,97437 \\
 \sin 284^\circ &= -\sin 76^\circ = -0,97030 \\
 \sin 287^\circ &= -\sin 73^\circ = -0,95630 \\
 \sin 290^\circ &= -\sin 70^\circ = -0,93969 \\
 \cos 280^\circ &= \cos 80^\circ = 0,17365 \\
 \cos 283^\circ &= \cos 77^\circ = 0,22495 \\
 \cos 284^\circ &= \cos 76^\circ = 0,24192 \\
 \cos 287^\circ &= \cos 73^\circ = 0,29237 \\
 \cos 290^\circ &= \cos 70^\circ = 0,34202 \\
 \lg 280^\circ &= -\lg 80^\circ = -5,67128 \\
 \lg 283^\circ &= -\lg 77^\circ = -4,33148 \\
 \lg 284^\circ &= -\lg 76^\circ = -4,01078 \\
 \lg 287^\circ &= -\lg 73^\circ = -3,27085 \\
 \lg 290^\circ &= -\lg 70^\circ = -2,74748 \\
 \operatorname{ctg} 280^\circ &= -\operatorname{ctg} 80^\circ = -0,17633 \\
 \operatorname{ctg} 283^\circ &= -\operatorname{ctg} 77^\circ = -0,23087 \\
 \operatorname{ctg} 284^\circ &= -\operatorname{ctg} 76^\circ = -0,24933 \\
 \operatorname{ctg} 287^\circ &= -\operatorname{ctg} 73^\circ = -0,30573 \\
 \operatorname{ctg} 290^\circ &= -\operatorname{ctg} 70^\circ = -0,36397
 \end{aligned}$$

A  $360^\circ$ -nál nagyobb szögek és a negatív szögek szögfüggvényei.

$$\sin 192^\circ = -\sin 12^\circ = -0,2079$$

$$\lg 115^\circ = -\lg 65^\circ = -2,1466345$$



A szög +, ha a mozgás során az óramutatóval ellentétes irányban mozg.

$$\sin L = \sin(L + n \cdot 360^\circ)$$

$$\cos L = \cos(L + n \cdot 360^\circ)$$

$$\lg L = \lg(L + n \cdot 360^\circ)$$

$$\cotg L = \cotg(L + n \cdot 360^\circ)$$

$$\sin(-L) = -\sin L$$

$$\cos(-L) = \cos L$$

$$\lg(-L) = -\lg L$$

$$\cotg(-L) = -\cotg L$$

$$\sin 578^\circ = \sin 218^\circ = -\sin 38^\circ = -0,6157$$

$$\sin -42^\circ = -\sin 42^\circ = -0,6691$$

1966. XII. 14. 18. ór.

$$\cos 1245^\circ = \cos 165^\circ = -\cos 15^\circ = -0,96593$$

$$\lg 2640^\circ = \lg(360 \cdot 7 + 120) = \lg 120^\circ = \lg 80^\circ = -5,67128$$

$$\cotg 5218^\circ = \cotg 178^\circ = -\cotg 2^\circ = -28,33625$$

$$\cos -144^\circ = \cos 36^\circ = 0,81915$$

$$\lg -52^\circ = -\lg 52^\circ = -1,27994$$

$$\cotg -28^\circ = -\cotg 28^\circ = -1,88073$$

19. óra

1966. XII. 19.

$$\sin 1966^\circ = \sin 166^\circ = 0,24192$$

$$\sin(-1958^\circ) = \sin(-158^\circ) = -0,37461$$

$$\lg 123456^\circ = \lg 156^\circ = -\lg 75^\circ = -3,73205$$

$$\lg(-3248^\circ) = \lg -8^\circ = 0,14054$$

$$\cos(-3245^\circ) = \cos -5^\circ = 0,99619$$

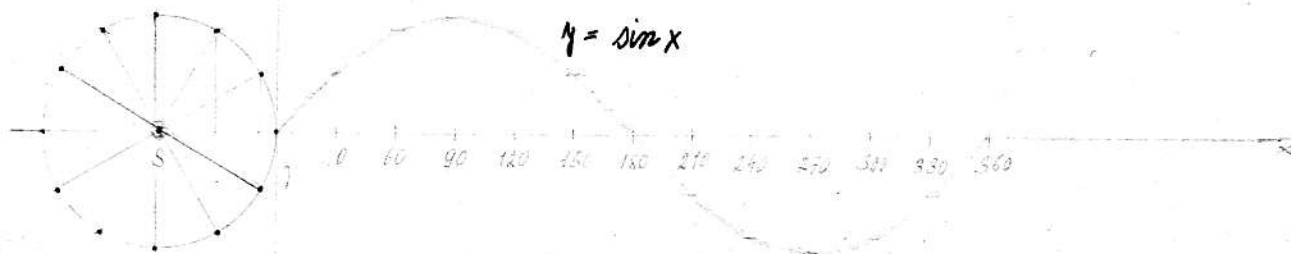
$$\cos 5243^\circ = \cos 203^\circ = -\cos 23^\circ = -0,92050$$

$$\cotg 672^\circ = \cotg 312^\circ = -\cotg 48^\circ = -0,9$$

$$\cotg(-136^\circ) = -\cotg 56^\circ = -0,8745$$

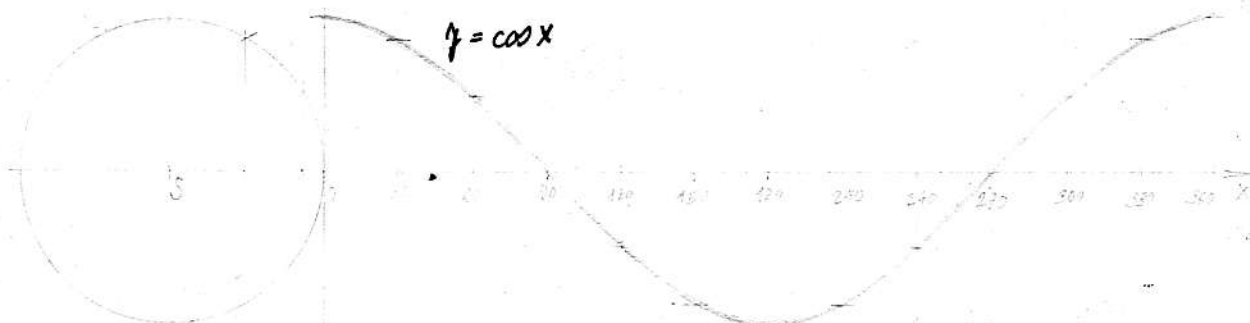
# Legfőbbek ábrázolása

$$y = \sin x$$



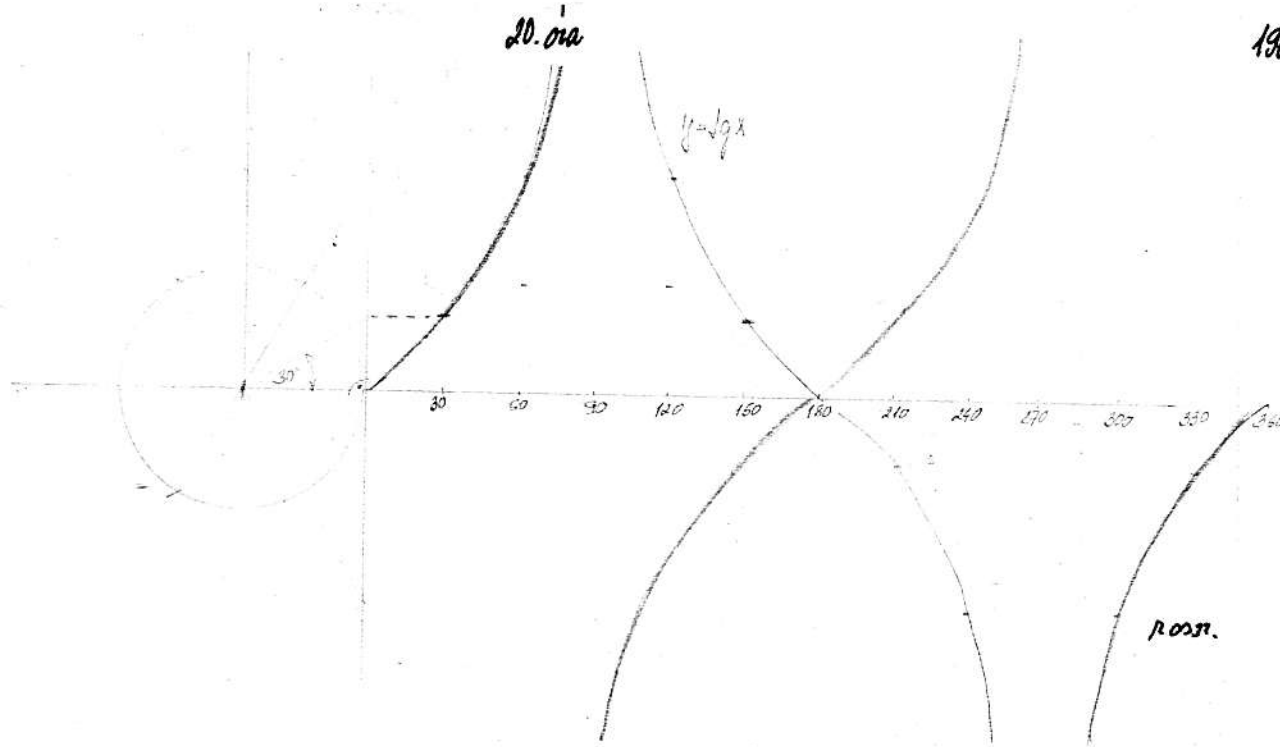
Az  $y = \sin x$  fg. képe a szinuszcímre.  
 360°-től ( $2\pi$ ) a hullám ismétlődik.  
 A fg. periódikus, periódusa pedig  $2\pi$ .

$$y = \cos x$$

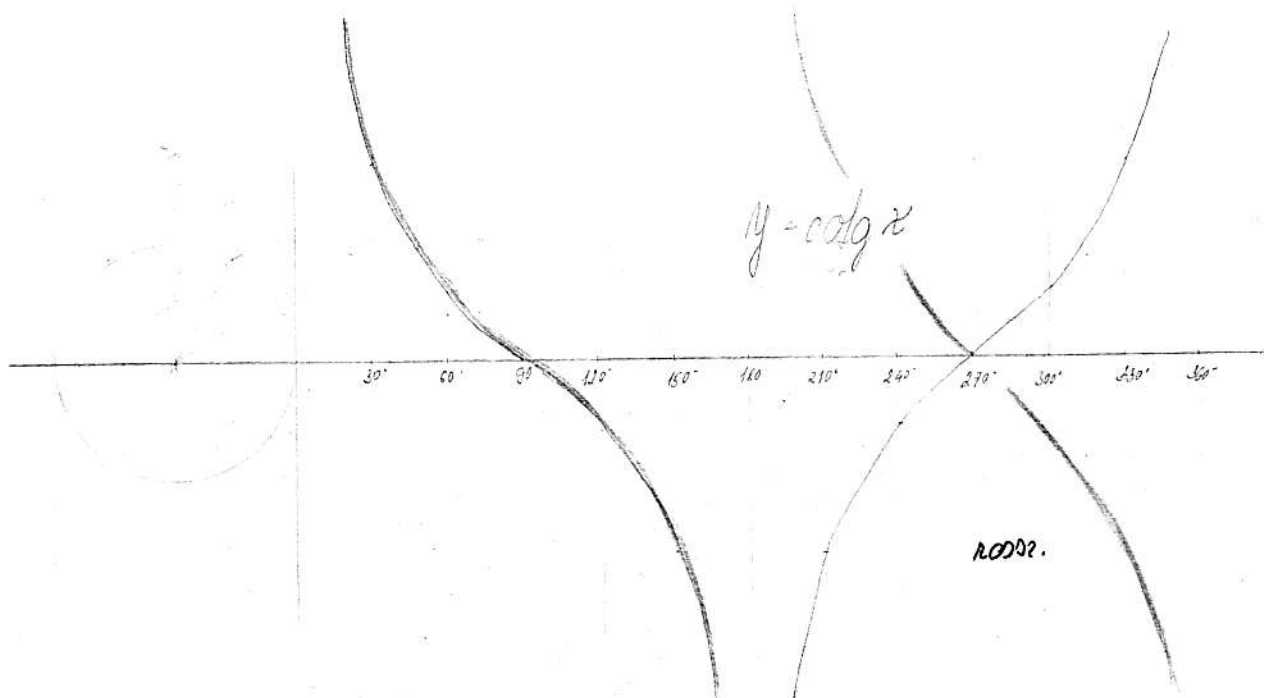


20. ábra

1968. 1. 9.



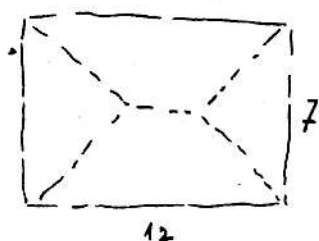
ross.



1967. I. 13.

21. аа

205/27.



$$\cos \alpha = \frac{a}{m}$$

$$m = \frac{a}{\cos \alpha}$$

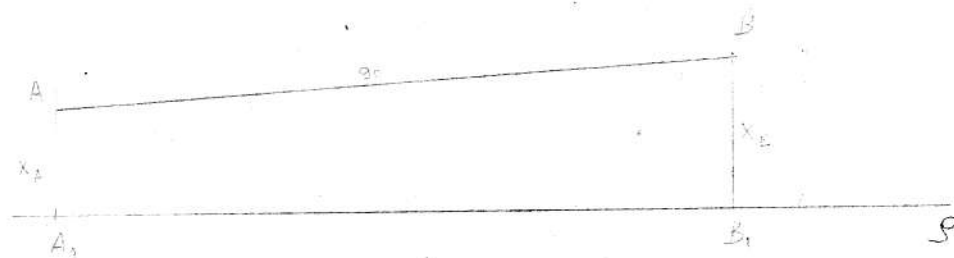
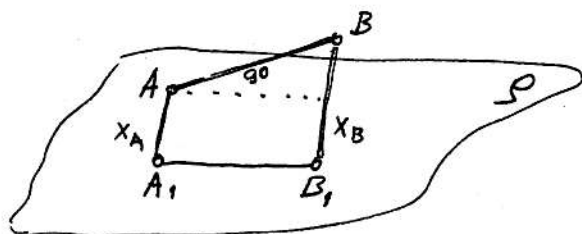
$$m = \frac{3,5}{0,82} = 4,27$$

$$T_1 = 7 \cdot m = 4,27 \cdot 7 = 29,89$$

$$T_2 = 29,89$$

$$T_3 = 4,27 \cdot 5,2 = \frac{42,7}{101,48 \text{ m}^2}$$

205/25



$$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$$

Minden  $\Delta$ -ban az oldalak úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben lévő szög szinuszai.

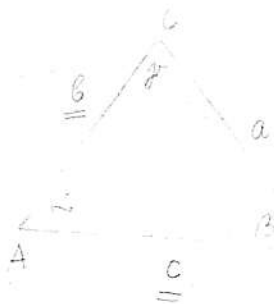
A sz. l. kifejezi a  $\Delta$  2 oldalának és az ezekhez szemben lévő szög szinuszainak összefüggését.

A 4. elem kiszámítható a 3 ismertből.

A sz. l.-től áll.  $\Delta$  megold. képletei:

1. Ha adott 1 oldal és 2 szög.

2. adott 2 oldal és a nagyobbikkal szembenfekvő szög.



$$\begin{aligned} c &= 340 \text{ m} \\ B &= 67^\circ \\ b &= 450 \text{ m} \\ \gamma &= \\ \alpha &= \\ a &= \end{aligned}$$

$$b : c = \sin B : \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{340 \cdot 0,925}{450} = \frac{31,25}{45}$$

$$\gamma = 44^\circ$$

$$\alpha = 69^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin B}$$

1967.1.

22. sz.

$$\begin{aligned} a &= 440 \\ B &= 47^\circ 40' \\ \gamma &= 98^\circ \\ \alpha &= 34^\circ 20' \end{aligned}$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin B$$

$$b : c = \sin B : \sin \gamma$$

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin B}$$

$$b = \frac{440 \cdot 0,7392}{0,564}$$

$$c = \frac{576,2 \cdot 0,99}{0,739}$$

$$\underline{\underline{b = 576}}$$

$$\underline{\underline{c = 771,8}}$$

$$\begin{array}{r} 0,739 \cdot 440 \\ 2956 \\ 2956 \\ \hline 32516 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32516 : 56,4 = 57 \\ 5050 \\ 02 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576,2 \cdot 0,99 \\ 51858 \\ 51858 \\ \hline 570,438 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 540 : 0,739 \\ 540000 : 739 = 730 \\ 2270 \end{array}$$

23. öv

1967. 11. 24.

$$\begin{aligned} a &= 20 \\ b &= 13 \\ \angle &= 67^\circ 20' \end{aligned}$$



$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \angle}{\sin B}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\angle + B)$$

$$\gamma = 180^\circ - 104^\circ 10' = \underline{\underline{75^\circ 50'}}$$

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin \angle}{a}$$

$$\sin B = \frac{13 \cdot 0,9228}{20}$$

$$\sin B = \frac{11,99}{20} = 0,599$$

$$\underline{\underline{B = 36^\circ 50'}}$$

$$\begin{array}{r} 0,9228 \cdot 13 \\ \hline 27684 \\ 11,9964 \end{array}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \angle}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \angle}$$

$$5048 : 0,9228$$

$$\begin{array}{r} 5048 : 922,8 = 54 \\ 43400 \end{array}$$

$$c = \frac{20 \cdot \sin 75^\circ 50'}{0,9228}$$

$$19,39,2 : 0,9228 = 21$$

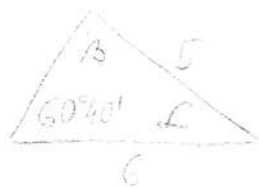
$$c = \frac{20 \cdot 0,9524}{0,9228}$$

$$\underline{\underline{c = 21}}$$

23. 2f.

1967. 11. 27.

Három szögű háromszög, melynek 2 oldala 5 és 6 cm, az 5 cm-es oldalal szemközti szög  $60^\circ 40'$ . Mekkora az ismeretlen szög?



$$\frac{5}{6} = \frac{\sin 60^\circ 40'}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{6 \cdot \sin 60^\circ 40'}{5}$$

$$\sin B = \frac{6 \cdot 0,864}{5} = \frac{5,23}{5} =$$

A 2 oldala 5, 6 cm. A kisebbik oldalal szemközti szög  $35^\circ$ .  
 Mekkora a  $\Delta$  ismeretlen szöge:



$$\frac{5}{6} = \frac{\sin 35^\circ}{\sin \alpha} = \frac{0,574}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{6 \cdot 0,574}{5} = 0,689$$

$$\alpha = 43^\circ 30'$$

$$\beta = 101^\circ 30'$$

A 2 sz. 12, 13 cm. A kis. old. szemk. sz.  $67^\circ 20'$ .



$$\frac{12}{13} = \frac{\sin 67^\circ 20'}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{13 \cdot \sin 67^\circ 20'}{12} = \frac{13 \cdot 0,92}{12} \approx 1$$

$$\beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 22^\circ 40'$$

100 kp-os erőt bontunk fel 2 ismeretlenre, melyek  $50^\circ$  és  $20^\circ$ -os szögek alkotnak vele:

$F_1$

$$\frac{F_1}{100} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}$$

$$\frac{F_2}{100} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 110^\circ}$$

$F_2$

$$F_1 = 100 \cdot \frac{0,766}{0,94}$$

$$F_2 = 100 \cdot \frac{0,341}{0,94}$$

$$F_1 = 81,5 \text{ kp}$$

$$F_2 = 36,2 \text{ kp}$$

$$R = 40,8 \text{ kp}$$

$$\alpha = 65^\circ 30'$$

$$\beta = 79^\circ 40'$$

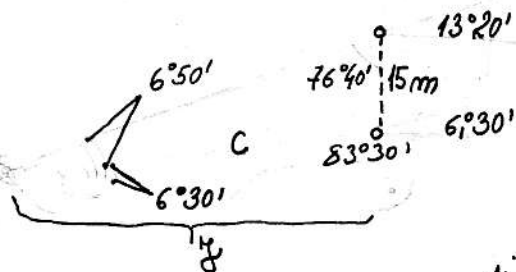
$$\frac{F_1}{40,8} = \frac{\sin 79^\circ 40'}{\sin 145^\circ 10'} = \frac{0,9845}{0,568}$$

$$F_1 = 40,8 \cdot 1,73 = 70,7 \text{ kp}$$

$$\frac{F_2}{40,8} = \frac{\sin 65^\circ 30'}{\sin 145^\circ 10'} = \frac{0,91}{0,568}$$

$$F_2 = 40,8 \cdot 1,6 = 65,5 \text{ kp}$$

Egy folyó partján van egy épület, melynek 2 egymással szembe fordított ablaka 15 m-re van egymástól. Milyen széles a folyó, ha az ablakból a távoli partot  $13^\circ 20'$  ill.  $6^\circ 30'$  depressziós szög alatt láthatjuk?



$$\frac{15}{C} = \frac{\sin 6^\circ 50'}{\sin 76^\circ 40'}$$

$$C = \frac{15 \cdot \sin 76^\circ 40'}{\sin 6^\circ 50'} = 12,2$$

$$\sin 83^\circ 30' = \frac{y}{C}$$

$$y = \sin 83^\circ 30' \cdot 12,2$$

$$y = 12,1 \text{ m.}$$

|           | $\sin L$                             | $\cos L$                             | $\lg L$                            | $\cotg L$                              |
|-----------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|
| $\sin L$  |                                      | $\sqrt{1 - \cos^2 L}$                | $\frac{\lg L}{\sqrt{1 + \lg^2 L}}$ | $\frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 L}}$       |
| $\cos L$  | $\sqrt{1 - \sin^2 L}$                |                                      | $\frac{1}{\sqrt{1 + \lg^2 L}}$     | $\frac{\cotg L}{\sqrt{1 + \cotg^2 L}}$ |
| $\lg L$   | $\frac{\sin L}{\sqrt{1 - \sin^2 L}}$ | $\frac{\sqrt{1 - \cos^2 L}}{\cos L}$ |                                    | $\frac{1}{\cotg L}$                    |
| $\cotg L$ | $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 L}}{\sin L}$ | $\frac{\cos L}{\sqrt{1 - \cos^2 L}}$ | $\frac{1}{\lg L}$                  |                                        |