X. 27.

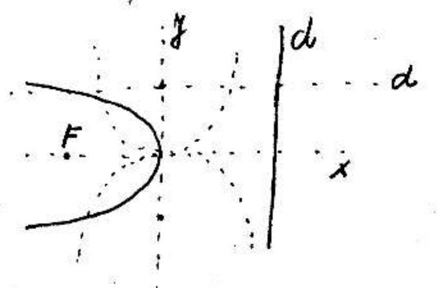
33-34 óra

I. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, mely csúcspontja O ; szimmetrikus x-re, átmegy A(-1;3)-on.
; szimm. y-ra, átmegy a B(4;-8) ponton.

1.
$$y^2 = -2px$$
$$9 = (-2)p\cdot(-1)$$
$$9 = 2p$$
$$p = 4{,}5$$
$$\rightarrow y^2 = 4{,}5\cdot 2x$$
$$\underline{y^2 = -9x}$$

2.
$$x^2 = -2py$$
$$16 = (-2)p\cdot(-8)$$
$$16 = 16p$$
$$p = 1$$
$$\rightarrow \underline{x^2 = -2y}$$

II. Írj. f. ann. a par. egyenletét, mely fókusza F(-7;0), és vezérvonalának egyenlete: x - 7 = 0



$$y^2 = -2px$$
$$y^2 = -2\cdot 14x$$
$$\underline{y^2 = -28x}$$

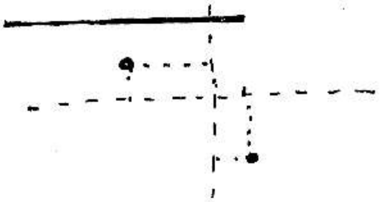
III. Hat. meg az $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$ parabola csúcspontjának koord., a paraméter nagyságát és tengelyének irányát!

$$y^2 - 2vy - 2px + (v^2 + 2pu) = 0$$
$$y^2 - 2y - 10x - 19 = 0$$

$v = 1$ $\quad$ $p = 5$ $\quad$ $v^2 + 2pu = -19$

$$u = \frac{-19 - v^2}{2p}$$
$$u = \frac{-19 - 1}{10} = -2$$

$v = 1$
$u = -2$
$p = 5$
$\sigma \parallel x$



IV. Mi az egy. ann. a par. mely cs. az origó, továbbá
1., átmegy (12,6) ponton, tengelye az x ill. y-ra illeszk.
2., " (4,4) "
3., " (-4;3)
4., " (-8;-6) ., tengelye az x. ill y-ra illeszkedik.

1.,

$$y^2 = 2px \qquad\qquad x^2 = 2py$$
$$36 = 24p \qquad\qquad 144 = 2p \cdot 6$$
$$y^2 = 2 \cdot \frac{36}{24} x \qquad\qquad p = 12$$
$$\underline{y^2 = 3x} \qquad\qquad \underline{x^2 = 24y}$$

2.,

$$y^2 = 2px \qquad\qquad x^2 = 2py$$
$$16 = 8p \qquad\qquad 16 = 8p$$
$$\underline{y^2 = 4x} \qquad\qquad \underline{x^2 = 4y}$$

3.,

$$y^2 = -2px \qquad\qquad x^2 = 2py$$
$$9 = y^2 = -2p(-4) \qquad\qquad 16 = 2p \cdot 3$$
$$9 = +8p \qquad\qquad 16 = 6p$$
$$p = \frac{9}{8} \qquad\qquad \underline{x^2 = \frac{16}{3} y}$$
$$\underline{y^2 = -\frac{9}{4} x}$$

4.,

$$y^2 = -2px \qquad\qquad x^2 = -2py$$
$$36 = -2p(-8) \qquad\qquad 64 = -2 \cdot p \cdot (-6)$$
$$p = \frac{36}{16} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \qquad\qquad p = \frac{64}{12} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$
$$\underline{y^2 = -\frac{9}{2} x} \qquad\qquad \underline{x^2 = -\frac{32}{3} y}$$

V. Mi a csúcsegyenlete ann. a par., mely csúcsa az origó, gyújtópontjának koord. (4;0) ; (-3;0) ; (0;-8).

I.

$$y^2 = 18x$$
$$y^2 = 16x$$

III. $x^2 = -32y$

II. $y^2 = -12x$

4. Of.
67.X.27.

1, Írj fel a par. egyenletét, ha $F(0;-4)$, vezéregyenese $y-4=0$

$x^2=-2py$ $\qquad$ $F(0;-4)$ $\quad y=4 \rightarrow p=8$

$\underline{x^2=-16y}$

II, Hat. meg a par. egy. ha: $d \equiv y+1=0$; $F(4;3)$

$y-3=0$; $F(2;-3)$

$y-6=0$; $F(3;-2)$

$x-1=0$; $F(4;2)$

$x+4=0$; $F(-1;3)$

csúcsp. : $A(-1;2)$; $F(-1;4)$

$A(4;2)$; $F(8;2)$

szimm. t. $\equiv y$ $\qquad p=8$ $\qquad F(0;6)$

" t. $\parallel x$ $\qquad p=4$ $\qquad F(6;2)$

1, $(y-3)^2=10(x+1)$ $\qquad A(-1;3)$

2, $(y+3)^2=2(x-2)$

3, $(y+2)^2=6(x-3)$

4, $(x-4)^2=10(y-2)$

5, $(x+1)^2=-6(y+1)$

6, $(x+1)^2=p(y-2) \rightarrow (x+1)^2=8(y-2)$

7, $(y-2)^2=p(x-4) \rightarrow (y-2)^2=8(x-4)$

8, $x^2=16(y-2)$

9, sz.t. $\parallel x$; $p=4$; $F(6;2) \rightarrow A(4;2)$

$(y-2)^2=8(x-4)$

III.

$y^2 = 24x \rightarrow \quad p = 12 \quad x = -6 \quad F(6;0)$

$y^2 = -8x \rightarrow \quad p = |-4| = 4 \quad x = 2 \quad F(-2;0)$

$x^2 = 6y \rightarrow \quad p = 3 \quad y = -1{,}5 \quad F(0;1{,}5)$

$y + x^2 = 0$
$x^2 = -y \rightarrow \quad p = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{4} \quad F(0;\frac{1}{4})$

$x + 4y^2 = 0$
$4y^2 = -1x$
$y^2 = -\frac{1}{4}x \rightarrow \quad p = |-\frac{1}{8}| = \frac{1}{8} \quad x = \frac{1}{16} \quad F(\frac{1}{16};0)$

$(x-5)^2 = 8(y+6) \rightarrow \quad A(5;-6) \quad p = 4 \quad F(5;-4) \quad y = -8$

$(y-2)^2 = 12(x+3) \rightarrow \quad A(-3;2) \quad p = 6 \quad F(0;2) \quad x = -6$

$(y-3)^2 = -4(x+1) \rightarrow \quad A(-1;3) \quad p = 2 \quad F(-2;3) \quad x = 1$

II.

$(x-4)^2 = 8(y-1)$
$(x-2)^2 = -12(y-0)$
$(x-3)^2 = -16(y-2)$
$(y-2)^2 = 6\cdot(x-2{,}5)$
$(y-3)^2 = 6(x+2{,}5)$
$(x+1)^2 = 8(y-2)$
$(y-2)^2 = 2{,}8(x-4)$
$(x-0)^2 = 2{,}8(y-2)$
$(y-2)^2 = 8(x-4)$

Hall meg F koord. (ha) p-t ; d egyenletét ; ha egyenlete

$y^2=24x$
$y^2=-8x$
$x^2=6y$
$y+x^2=0$
$x+4y^2=0$
$(x-5)^2=8(y+6)$
$(y-2)^2=12(x+3)$
$(y-3)^2=-4(x+1)$

Megoldás az előző oldalon!

XI. 1.

35. óra

A parabola érintője.

$y^2=2px \quad P_1(x_1;y_1) \quad P_2(x_2;y_2)$

$P_1;P_2$ – a parabola pontjai

$y_1^2=2px_1 \quad (1)$

$y_2^2=2px_2 \quad (2)$

$(2)-(1) \quad y_2^2-y_1^2=2px_2-2px_1$

$(y_2-y_1)(y_2+y_1)=2p(x_2-x_1)$

$P_1\neq P_2 \rightarrow \begin{matrix} x_1\neq x_2 \\ y_1\neq y_2 \end{matrix}$ (az egyenes szelő)

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2p}{y_2+y_1}$

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$y-y_1=\frac{2p}{y_2+y_1}(x-x_1)$

Ha érintő : $P_1\equiv P_2 \rightarrow \begin{matrix} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{matrix}$

$y-y_1=\frac{2p}{y_1+y_1}(x-x_1)$

$y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1) \quad /\cdot y_1$

$y\cdot y_1-y_1^2=px-px_1 \quad / y_1^2=2px$

$yy_1-2px_1=px-px_1$

$y\cdot y_1 = px_1+px$

$y\cdot y_1 = p(x_1+x)$

A csúcsegyenletes parabola érintőjének egyenlete:

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1) \qquad x \cdot x_1 = p(y + y_1)$$

Ha a parabola egyenlete $(y-v)^2 = 2p(x-u)$ akkor a $P_1(X_1 Y_1)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete

$$(y_1 - v)(y - v) = p\left[x + x_1 - 2u\right].$$

Ha a parabola egy. $(x-u)^2 = 2p(y-v)$, akkor az érintő egyenlete:

$$(x_1 - u)(x - u) = p(y + y_1 - 2v)$$

A parabola és más mértani hely kölcsönös helyzete

A metszéspontokat úgy számítjuk ki, hogy megoldjuk a parabolát és a másik mértani helyet meghatározó másodfokú kétismeretlenű egyenletrendszert.

A gyökök a metszéspontok koordinátái.

Milyen hosszú az $y^2 = 8p$ parabolának az a húrja, mely az $y_1 = 4$ $y_2 = 12$ ordinátájú pontjait köti össze? $8\sqrt{5}$

$y^2 = 8p \qquad 16 = 8p = 2px \rightarrow x_1 = 4$

$p = 2$

$144 = 8p = 2px \rightarrow x_2 = 4$

$p = 18$

$P_1(4;4)$

$P_2(4;12)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{0 + 64} = 8$$

$$h = 8$$

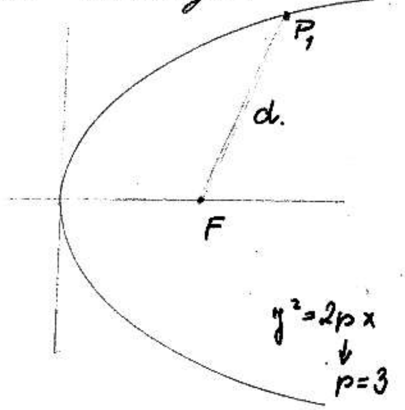
$y^2 = 8x \rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = 18$

$$h = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{320} = \sqrt{5 \cdot 64} = 8\sqrt{5}$$

$$h = 8\sqrt{5}$$

Hat. meg $y^2=6x$ par. 6.-os absc. pontjának a gyújtóponttól való távolságát. 7,5



$y^2=2px$
$\downarrow$
$p=3$

$y^2=6x$

$y=\sqrt{6\cdot 6}$

$y=\pm 6$

$P_1(6;6)$

$F(1{,}5;0)$

$d=\sqrt{4{,}5^2+6^2}=\sqrt{56{,}25}$

$d=7{,}5$

Szám. ki 1; az $y^2=6x$ par. és a $3x-2y-6=0$ egyenes
2; $y^2=-9x$ $3x+4y-12=0$
3; $x^2=4y$ $x+y-3=0$
metszéspontjának koordinátáit.

(6;6) (2/3;-2)
(-4;6)
3; ... (-6;9)

1;

$y^2=6x \quad 3x=2y+6$

$y^2=4y+12$

$y^2-4y-12=0$

$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{2}=\frac{4\pm 8}{2}$

$y_1=6 \quad y_2=-2$

$x=\frac{y^2}{6}$

$x_1=\frac{36}{6}=6$

$x_2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$P_1(6;6)$

$P_2(\frac{2}{3};6)$

2;

$y^2=-9x \quad -3x=4y-12$

$y^2=12y-36$

$y^2-12y+36=0$

$y_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{2}$

$y_{1,2}=6$

$x_{1,2}=-\frac{y^2}{9}$

$x_{1,2}=-\frac{36}{9}$

$x_{1,2}=-4$

$P\equiv T=(-4;6)$

3.) $x^2 = 4y \qquad x + y - 3 = 0$

$x^2 = 12 - 4x$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -6$

$y = \frac{x^2}{4}$

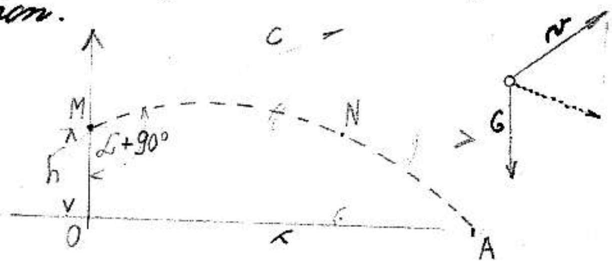
$y_1 = \frac{4}{4} = 1$

$y_2 = \frac{36}{4} = 9$

$P_1(2;1)$

$P_2(-6;9)$

Egy súlydobó a golyót a vízszintes talaj felett h magasságból, c kezdősebességgel, α + alatt dobja el. A golyó az A pontban éri talajt. Mekkora az OA távolság. O - a súlydobó talpának helye a vízszintes síkon.



$x = v \cdot t \cdot \cos\alpha \rightarrow t = \frac{x}{v \cdot \cos\alpha}$

$y = v \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$

$y = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}$

$y = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \qquad / \; A \equiv y = -h$

$-h = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \qquad / \cdot 2v_0^2\cos^2\alpha$

$(-h) \cdot 2v_0^2\cos^2\alpha = x\,tg\alpha \cdot 2v_0^2\cos^2\alpha - gx^2$

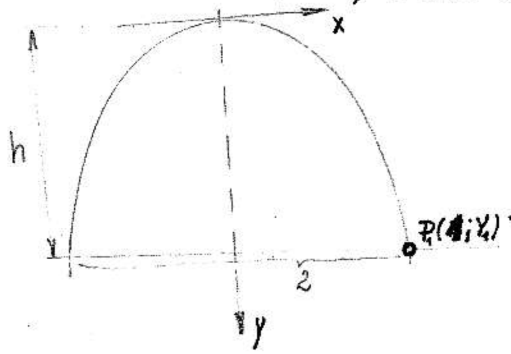
$gx^2 - 2v_0^2\cos^2\alpha \cdot tg\alpha \cdot x - 2hv_0^2\cos^2\alpha = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha \cdot tg\alpha \pm \sqrt{4v_0^4\cos^4\alpha \cdot tg^2\alpha + 4g \cdot 2hv_0^2\cos^2\alpha}}{2g}$$

$$x = \frac{\cancel{2}v_0^2\cos^2\alpha\,tg\alpha \pm \cancel{2}v_0\cos\alpha\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha + 2hg}}{\cancel{2}g}$$

$$x = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha\left(v_0\cos\alpha \cdot tg\alpha + \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha + 2hg}\right)}{g}$$

A szökőkútból parabola pályán lövődik ki a víz, mely paramétere 0,1. Mily. magasra emelkedik ki a vízsugár, ha a kilövellési ponttól 2 m-re hull a víz a medencébe.



$$x^2 = -2py$$

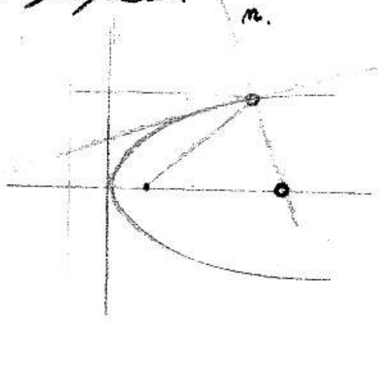
$$1^2 = -2 \cdot 0{,}1 \cdot y$$

$$1 = -2 \cdot 0{,}1 \cdot y$$

$$y = \frac{1}{-0{,}2}$$

$$y = -5 \quad \rightarrow h = 5m$$

Az $y^2 = 2px$ parabola $(x_1;y_1)$ pontjában húzható érintőre merőlegest állítunk az érintési pontban. Mely pontokban metszi ez a normális a koordináta tengelyeket.



$$t \equiv y y_1 = p \cdot (x_1 + x)$$

$$y \cdot y_1 = p x_1 + p x$$

$$y = \frac{px}{y_1} + \frac{px_1}{y_1} \rightarrow m_1 = \frac{p}{y_1}$$

$$m_2 = -\frac{y_1}{p}$$

$$P \equiv T(x_1;y_1)$$

$$y = mx$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

$$y = -\frac{y_1}{p} \cdot x + \frac{y_1 x_1}{p} + y_1$$

$$y = -\frac{y_1}{p} \cdot x + \left(\frac{y_1 \cdot x_1}{p} + y_1\right)$$

$$y = -\frac{y_1}{p}\cdot x + \left(\frac{y_1 \cdot x_1}{p} + y_1\right)$$

1, $x = 0 \rightarrow y = \frac{y_1 x_1}{p} + y_1$

2, $y = 0 \rightarrow \frac{y_1}{p}\cdot x = \frac{x_1 \cdot y_1}{p} + y_1$

$$x = \frac{\frac{x_1 y_1 + y_1 p}{p}}{\frac{y_1}{p}} = \frac{y_1 p \cdot (x_1 + p)}{p \cdot y_1} = (x_1 + p)$$

$A_y ; \left(0 ; \frac{y_1 x_1 + y_1 p}{p}\right)$

$B_x ; (x_1 + p ; 0)$

35. *H.* 1967. X.

13
116 14
15
16
17

3, Hat. meg a par. cs. koord., fók., leng., direkt., egyenletét, ha egyenlete $y^2 - 3x - 4y + 19 = 0$

$(y-m)^2 = 2p(x-n)$

$y^2 - 2my + m^2 = 2px - 2pn$

$y^2 - 2px - 2my - (2pn + m^2) = 0$

$y^2 - 3x - 4y + 19 = 0$

$p = \frac{3}{2}$ $m = 2$ $19 = 2pn + m^2$

$19 = 3n + 4$

$n = 5$

$A(5;2)$

$p = \frac{3}{2}$ $(y-2)^2 = 3(x-5)$

$F\left(\frac{23}{4};2\right)$

$d \equiv x = \frac{17}{4}$

$\equiv y = 2$

116/4.)

$$x^2-5y+6x+21=0$$

$$(x-m)^2=2p(y-n)$$

$$x^2-2mx+m^2-2py+2pn=0$$

$$x^2-2py-2mx+(m^2+2pn)=0$$

$$x^2-5y+6x+21=0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$p=2{,}5 \quad m=-3 \quad n=\frac{12}{5}$$

$$(x+3)^2=5\left(y-\frac{12}{5}\right)$$

$$A\left(-3;\frac{12}{5}\right)$$

$$\sigma \equiv x=-3$$

$$F\left(-3;\frac{73}{20}\right)$$

$$d \equiv y=\frac{23}{20}$$

5.) Hat. meg a par. egyenl., am. álm. a $P_1(5;6)$ ponton és cs. a $C(2;3)$ p.-ban van, tengelye ll. X-szel.

$$(y-v)^2=2p(x-u)$$

$$\frac{(y_1-v)^2}{2(x-u)}=p=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$(y-3)^2=2\cdot\frac{3}{2}(x-2)$$

$$(y-3)^2=3(x-2)$$

6., Hat. m. a p. egyl. am. átm. a $P_1(5;6)$-n és cs. a $C(2;3)$-ban van, tengelye az Y-nal párh.

$$(x-u)^2=2p(y-v)$$
$$(5-2)^2=2p(6-3)$$
$$p=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{(x-2)^2=3(y-3)}}$$

7., Milyen hosszú az $y^2-6x+2y-5=0$ parabolának az $x=6$ abszcisszájú pontjaihoz húzott vezérsugara.

$$(y-v)^2=2p(x-u)$$
$$y^2-2vy+v^2-2px+2pu=0$$
$$y^2-6x+2y-5=0$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$p=3 \qquad v=-1$$

$$v^2+2pu=5$$
$$2pu=4$$
$$pu=2$$
$$u=\frac{2}{3}$$

$$A\left(\frac{2}{3};-1\right)$$
$$F\left(\frac{13}{6};-1\right)$$

$$\left(y+1\right)^2=6\left(x-\frac{2}{3}\right)$$
$$\left(y+1\right)^2=6\left(6-\frac{2}{3}\right)=6\cdot\frac{16}{3}$$
$$y^2+2y+1=32$$
$$y^2+2y-31=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+124}}{2}$$
$$y_{1,2}=-1+\frac{\sqrt{128}}{2}=-1+\sqrt{31}\doteq 4{,}57$$

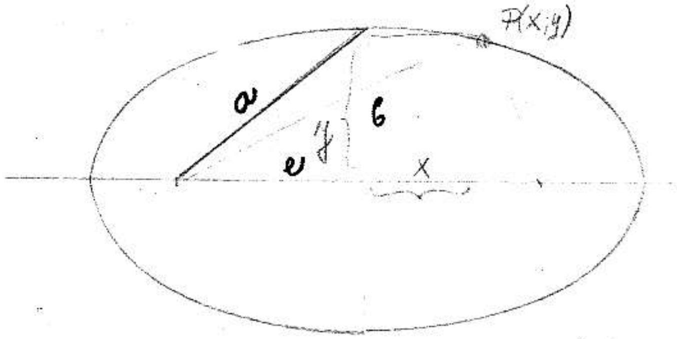
$$P_1(6;4{,}57)$$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(\frac{23}{6}\right)^2+(5{,}57)^2}\doteq\sqrt{14{,}8+30{,}8}\doteq\sqrt{45{,}..}\doteq 6{,}75$$

$$\underline{\underline{d\doteq 6{,}8}} \qquad \neq k.$$

Az ellipszis.

Meghatározás.



$a^2 = b^2 + e^2$

$r_1 ; r_2 = 2a$

$r_1 ; r_2$ - vezérsugarak

$r_1 = \sqrt{y^2 + (e+x)^2}$

$r_2 = \sqrt{y^2 + (e-x)^2}$

e - lineáris excentricitás.

$$\sqrt{y^2+(e+x)^2} + \sqrt{y^2+(e-x)^2} = 2a$$

$$\sqrt{y^2+(e+x)^2} = 2a - \sqrt{y^2+(e-x)^2} \quad /^2$$

$$y^2+(e+x)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2+(e-x)^2} + y^2 + (e-x)^2$$

$$y^2+e^2+2ex+x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2+(e-x)^2} + y^2 + e^2 - 2ex + x^2$$

$$2ex + 2ex = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2+(e-x)^2}$$

$$4ex - 4a^2 = -4a\sqrt{y^2+(e-x)^2} \quad /:4$$

$$ex - a^2 = -a\sqrt{y^2+(e-x)^2} \quad /^2$$

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2\left[y^2 + (e^2 - 2ex + x^2)\right]$$

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2e^2 - 2a^2ex + a^2x^2$$

$$e^2x^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2$$

$$e^2x^2 + a^4 - a^2y^2 = a^2(e^2+x^2)$$

$$\cancel{a^2y^2 = e^2x^2}$$

$$e^2x^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2$$

$$e^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2e^2 - a^4 \quad /\cdot(-1)$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - e^2x^2 = a^4 - a^2e^2$$

$$x^2(a^2-e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-e^2) \quad / \; a^2 - e^2 = b^2$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad / : a^2b^2$$

Az ellipszis középponti egyenlete :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

c - numerikus excentricitás $= \frac{e}{a}$ $\quad a > b \; (F_1F_2 = x)$

$$c = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$c = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

36. ó.

$AB = 20 = 2a \quad a = 10$

$CD = 12 = 2b \quad b = 6$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$2c = 14$

$2e = 12$

$a = \sqrt{b^2 + e^2}$

$a = \sqrt{85} \doteq 9{,}2$

$$\frac{x^2}{85} + \frac{y^2}{49} = 1$$

$2a = 16$

$2e = 10$

$b = \sqrt{a^2 - e^2}$

$b = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{49}$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} = 1$$

37 - 38 óra.

1967. XI. 3.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad / \cdot a^2b^2 \quad \rightarrow \quad x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 = a^2b^2 - y^2a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2}$$

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$$

$$x = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)}$$

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

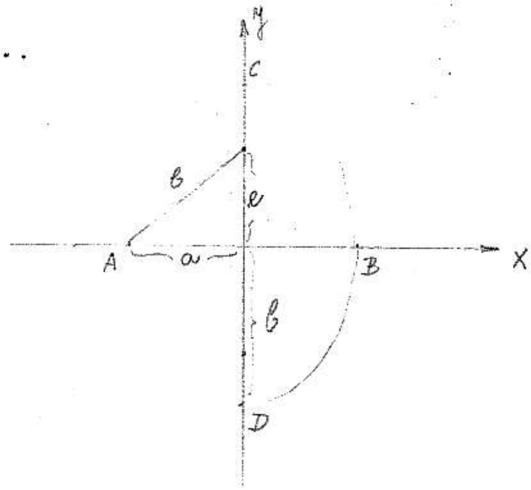
$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) \quad / \sqrt{\ }$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a<b \quad \ldots$$



Az ellipszis paramétere

Az ellipszis gyújtópontján áthaladó és az X tengelyre merőleges húr felét paraméternek nevezzük. Jele p.

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x=\pm e}$$ – a paraméternél

$$\frac{e^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad / \cdot a^2b^2$$

$$e^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$$

$$y^2a^2=a^2b^2-e^2b^2$$

$$y^2=\frac{b^2(a^2-e^2)}{a^2}$$

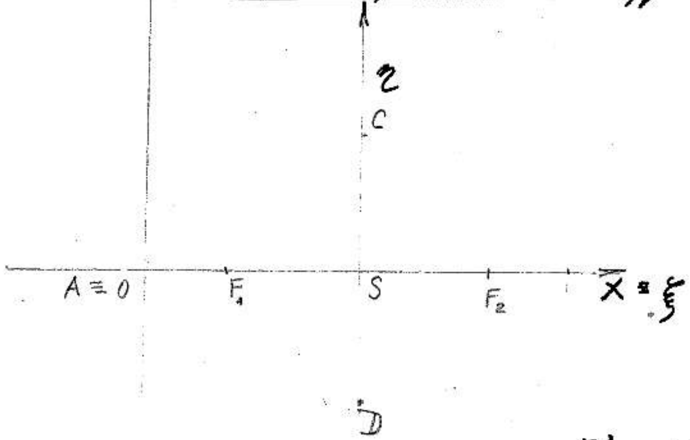
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2}$$

$$a^2-e^2=b^2 \longrightarrow \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{b^2}$$

$$y=\frac{b^2}{a}$$

$p=\frac{b^2}{a}$ az ell. paraméterének egyenlete.

Az ellipszis csúcsegyenlete



$F_1(a;0)$

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1 \qquad \left\{\begin{array}{l}\xi = x-a\\ \eta = y\end{array}\right.$$

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1 \quad /\cdot a^2b^2$$

$$b^2\xi^2+a^2\eta^2=a^2b^2$$

$$a^2\eta^2=a^2b^2-b^2\xi^2$$

$$\eta^2=\frac{a^2b^2-b^2\xi^2}{a^2}$$

$$\eta=\sqrt{\frac{a^2b^2-b^2\xi^2}{a^2}}$$

$$\eta=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\xi^2}$$

$$y=\eta=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}$$

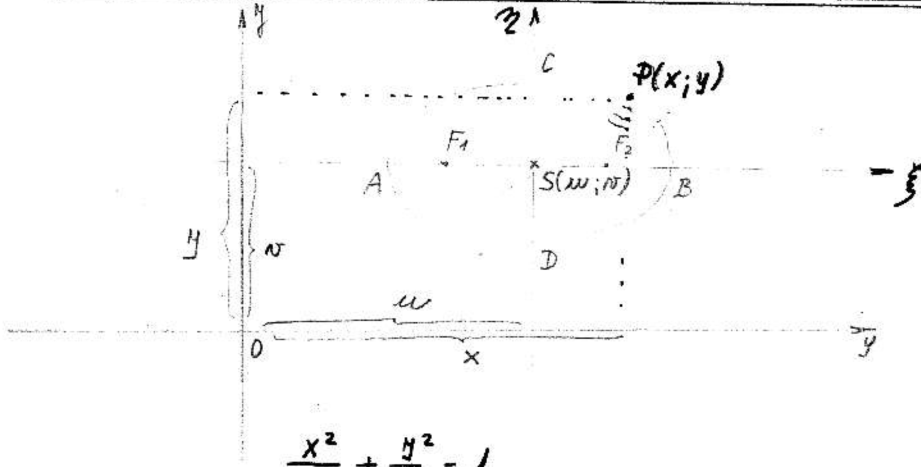
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2+2ax-a^2)$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$$

$$y^2=\frac{2b^2x}{a}-\frac{b^2x^2}{a^2} \quad \Big/\ \frac{b^2}{a}=p$$

Az ellipszis csúcsponti egyenlete: $\quad y^2=2px-\frac{px^2}{a}$

Az ellipszis egyenlete, amikor az ell. tengelyei párhuzamosak a koordináta rendszer tengelyeivel.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1 \qquad \xi = x-u \qquad \eta = y-v$$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1 \qquad /\cdot a^2b^2$$

$$b^2(x-u)^2+a^2(y-v)^2=a^2b^2$$

$$b^2(x^2-2ux+u^2)+a^2(y^2-2vy+v^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-b^2u\cdot 2x+b^2u^2+a^2y^2-2a^2vy+a^2v^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2ux-2a^2vy+(a^2v^2+b^2u^2-a^2b^2)=0$$

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

A (parabola) ellipszis és az egyenes kölcsönös helyzete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$M_1(x_1;y_1)$ $\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$ ... M_1 az ellipszisen kívül van.

$M_2(x_2;y_2)$ $\qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}<1$ ... M_2 az ellipszisen belül van.

1., Az egyenesnek és ellipszisnek nincs közös pontja.
2., Az " és " 1. közös pontja van: (érintő)
3., Az " és " 2 közös pontja van: (szelő)

Ha az ellipszis és egyenes kétismeretlenű, másodfokú egyenleteit egyenletrendszerben megoldjuk, megkapjuk a közös pontok koordinátáit.

1 gyök – érintő
2 gyök – szelő
0 " – nincs közös pont.

38. Hf 1967.

Mi az egyenlete annak az ellipszisnek, amely a $(3;2)$-n és $\left(-\frac{3}{2};\sqrt{7}\right)$ pontokon megy keresztül $(4x^2+9y^2=72)$

$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad 9b^2+4a^2=a^2b^2$

$\frac{9}{4a^2}+\frac{7}{b^2}=1 \quad 9b^2+28a^2=4a^2b^2$

$9u+4v=uv$

$9u+28v=4uv$

$24v=3uv$

$u=8$

$9u=v(u-4)$

$v=\frac{9u}{u-4}=\frac{72}{4}=18$

$b^2=8$

$a^2=18$

$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1 \quad /\cdot 72$

$4x^2+9y^2=72$

Mekkora az ell. paramétere ha az ell. egyenlete $9x^2+25y^2=225$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$p=\frac{b^2}{a}$

$p=\frac{9}{5}$

$2x^2+4y^2=5.$

$2x^2=5-4y^2$

$x^2=\frac{5-4y^2}{2}$

$x=\sqrt{\frac{5-4y^2}{2}}$

$5-2\cdot\underline{1^2}=4\cdot\underline{\frac{3}{2^2}}$ $\quad x=1;\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$5-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=4\cdot\frac{9}{8}$ $\quad x=\frac{1}{2};\ y=\sqrt{\frac{9}{8}}$

$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \quad 4b^2+a^2\cdot 3=a^2b^2\cdot 4$

$\frac{1}{4a^2}+\frac{9}{8b^2}=1 \quad 2b^2+9a^2=8a^2b^2$

$17a^2=12a^2b^2$

$b^2=\frac{17}{12}$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$

$8b^2+2a^2=2b^2+9a^2$ $\qquad \frac{2x^2}{5}+\frac{4y^2}{5}=1$

$6b^2=7a^2$

$\frac{6\cdot 17}{7\cdot 12}=a^2$ $\qquad p=\frac{b^2}{a}=\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{\frac{2}{5}}}=\frac{\sqrt{\frac{16}{5}}}{\sqrt{\frac{2}{5}}}=\sqrt{\frac{16}{2}}$

$\frac{17}{14}=a^2$ $\qquad p=\sqrt{8}$

$p=\frac{b^2}{a}=\frac{\frac{17}{12}}{\sqrt{\frac{17}{14}}}=\frac{17\cdot\sqrt{14}}{12\cdot\sqrt{17}}$

$p\doteq\frac{52{,}4}{49{,}5}\doteq 1{,}06$

Az $x^2:100+y^2:36=1$ ellipszis az $y=0{,}3x+6$ egyenest 2 pontban metszi. Keressük meg az ell. tengelyein azokat a pontokat, amelyekből mint középpontokból ha köröket rajzolunk, azok ezeken a metszéspontokon keresztül mennek.

$36x^2+100y^2=3600 \qquad 100y^2=30x+600$

$36x^2+30x+600-3600=0$

$36x^2+30x-3000=0$

$12x^2+10x-1000=0$

$6x^2+5x-500=0$

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+12000}}{12}=\frac{-5\pm\sqrt{12025}}{12}\doteq\frac{-5\pm 109}{12}$

$36x^2+100y^2=3600 \qquad 120y=36x+720$

$20y=6x+120 \rightarrow \cancel{400y^2=36x^2+120^2}$

$36x^2=120^2-40\cdot 120y+400y^2$

$100y^2+400y^2-4800y-120^2-3600=0$

$5y^2-48y-180=0$

$x_{1,2}=\frac{48\pm\sqrt{2304+3600}}{10}=\frac{48\pm\sqrt{5904}}{10}\doteq\frac{48\pm 77}{10}$

$P_1\left(\frac{105}{12};\frac{125}{10}\right)\doteq P_1'(9;12{,}5)$

$P_2\left(-\frac{115}{12};-\frac{29}{10}\right)\doteq P_2'(-9{,}5;-3)$

*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 12{,}5 = \frac{-15{,}5}{-18{,}5}(x - 9)$$

$$y \doteq 0{,}84x - 7{,}55 + 12{,}5$$

$$y \doteq 0{,}84x + 5$$

$$m_2 = -\frac{1}{0{,}84} = -1{,}2$$

$$P(-0{,}25;\ 4{,}7)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4{,}7 = -1{,}2(x + 0{,}25)$$

$$y = -1{,}2x + 4{,}7 - 0{,}3$$

$$y = -1{,}2x + 4{,}4$$

S_a — $y = 0 \rightarrow 1{,}2x = 4{,}4$

$x \doteq 3{,}7$

S_b — $x = 0 \rightarrow y \doteq 4{,}4$

$S_a(3{,}7\ ;\ 0)$

$S_b(0\ ;\ 4{,}4)$

Milyen pontban metszi a $7x^2+21y^2=364$ ell. a $7x+3y=26$ egyenes.

$$7x^2 + 21y^2 = 364 \qquad 7x + 3y = 26$$

$$x^2 + 3y^2 = 52 \qquad 7x + 3y = 26 \rightarrow x = \frac{26 - 3y}{7} \qquad x^2 = \frac{9y^2 - 6\cdot 26y + 26^2}{7^2}$$

$$9y^2 - 156y + 676 + 147y^2 - 2548 = 0$$

$$156y^2 - 156y - 1872 = 0$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -3$$

$$x = \frac{26 - 3y}{7} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = 5$$

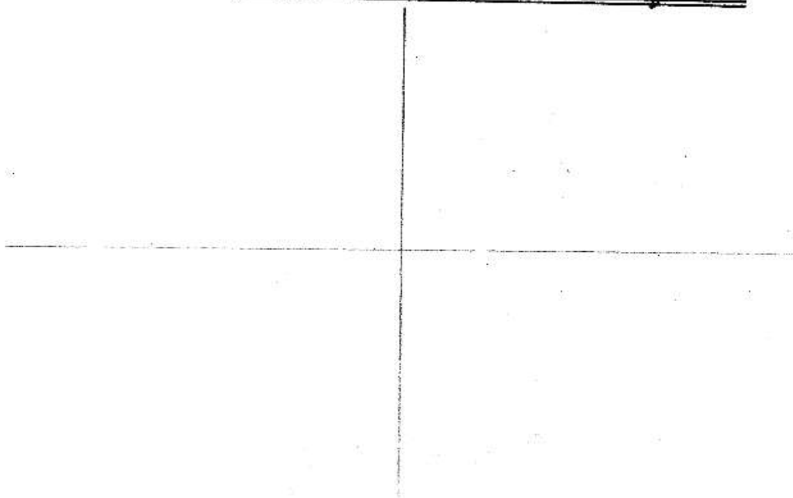
$P_1(2;4)$

$P_2(5;-3)$

1. 7.

39. óra

Az ellipszis érintője



Mely pontokban metszi a $7x^2+25y^2=364$ ellipszis a $7x+3y=26$ egyenest. = Hf.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad P_1(x_1;y_1) \quad P_2(x_2;y_2) \qquad P_1\neq P_2 \rightarrow x_1\neq x_2 \quad y_1\neq y_2$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad (1)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad (2)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0$$

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$$

$$\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2}+\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2}=0 \qquad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$b^2(x_2+x_1)(x_2-x_1)+a^2(y_2+y_1)(y_2-y_1)=0$$

$$b^2(x_2+x_1)=-\frac{a^2(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}=-\boxed{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} (x - x_1)$$

ha $P_1 \equiv P_2 \rightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x_1}{2y_1} (x - x_1)$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} (x - x_1) \quad / \cdot a^2 y_1$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 (x - x_1)$$

$$a^2 (y \cdot y_1 - y_1^2) = -b^2 (x \cdot x_1 - x_1^2)$$

$$\frac{y \cdot y_1 - y_1^2}{b^2} = -\frac{x \cdot x_1 - x_1^2}{a^2}$$

$$\frac{y \cdot y_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2}$$

$$\frac{y \cdot y_1}{b^2} + \frac{x \cdot x_1}{a^2} = \boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1}$$

$$\frac{y \cdot y_1}{b^2} + \frac{x \cdot x_1}{a^2} = 1$$ – az ellipszis érintőjének egyenlete.

$$\frac{(x-u)(x_1-u)}{a^2} + \frac{(y-v)(y_1-v)}{b^2} = 1$$ – transzf. ell. érintője.

39. Ó.

1967. XI. 7.

Hat. meg a $16x^2 + 9y^2 - 32x - 18y = 119$ ellipszis középpontjának koordinátáit és féltengelyeit. [$u=1$ $v=1$ $a^2=9$ $b^2=16$].

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot a^2 b^2$$

$$b^2 (x-u)^2 + a^2 (y-v)^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - 2b^2 ux + b^2 u^2 + a^2 y^2 - 2a^2 yv + a^2 v^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 ux - 2a^2 yv = a^2 b^2 - b^2 u^2 - a^2 v^2$$

$$16x^2 + 9y^2 - 32x - 18y = 119$$

$\downarrow$ $b = 4$ $\quad$ $\downarrow$ $a = 3$ $\quad$ $\downarrow$ $2b^2 u = 32$ $\quad$ $\downarrow$ $2a^2 v = 18$

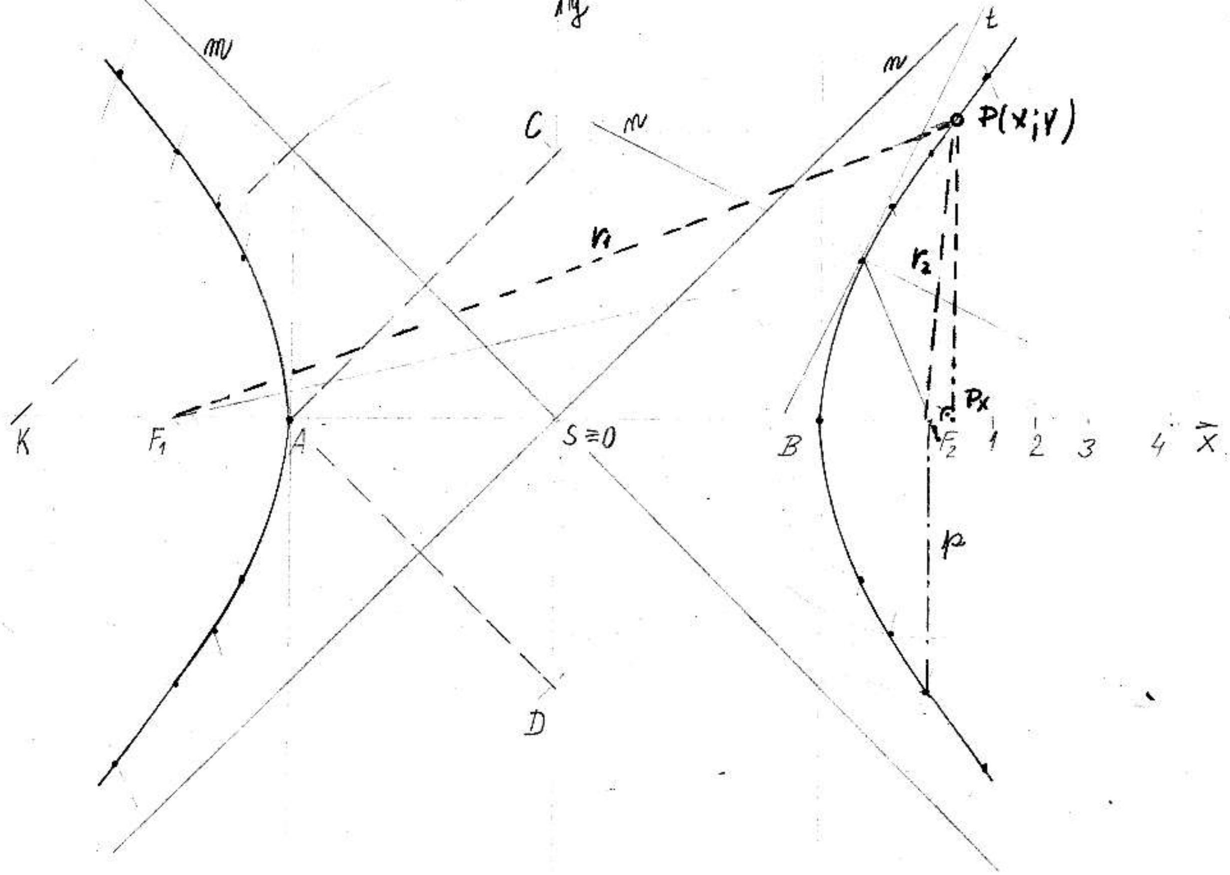
$$2b^2 u = 32$$
$$2 \cdot 16 \cdot u = 32$$
$$u = 1$$

$$2a^2 v = 18$$
$$2 \cdot 9 v = 18$$
$$v = 1$$

$a = 3 \quad b = 4 \quad u = 1 \quad v = 1$

A hiperbola kanonikus v. középponti egyenlete

A hiperbola a sík azon pontjainak halmaza, melyek két adott ponttól mért távolságaik különbsége állandó és kisebb mint az adott pontok távolsága.
A két adott pont a hiperbola gyújtópontja.
Az állandó távolság a valós tengely hossza; 2a.



$F_1S = F_2S = e$ ~ lineáris excentricitás $e^2 = a^2 + b^2$
$AS = BS = a$ ~ valós féltengely
CD; $CS = DS = b$ ~ képzetes féltengely

A gyújtóponton áthaladó és az X tengelyre merőleges egyenes fele a hiperbola paramétere.

F_1P ; PF_2 - vezérsugár.

$|r_1 - r_2| = 2a$

$F_2 P_x P_\Delta \ldots$ derékszögű Δ
$F_1 P_x P_\Delta \ldots$ derékszögű

$r_1 = \sqrt{y^2+(e+x)^2}$
$r_2 = \sqrt{y^2+(x-e)^2}$

$r_1 - r_2 = 2a$

$\sqrt{y^2+(x+e)^2} - \sqrt{y^2+(x-e)^2} = 2a$

$\sqrt{y^2+(x+e)^2} = 2a + \sqrt{y^2+(x-e)^2} \quad /^2$

$y^2+(x+e)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2+(x-e)^2} + y^2+(x-e)^2$

$y^2+x^2+2ex+e^2 = 4a^2+4a\sqrt{y^2+(x-e)^2} + y^2+x^2-2ex+e^2$

$4ex - 4a^2 = 4a\sqrt{y^2+(x-e)^2} \quad /:4$

$ex - a^2 = a\sqrt{y^2+(x-e)^2} \quad /^2$

$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(y^2+x^2-2ex+e^2)$

$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2exa^2 + e^2a^2$

$e^2x^2 - a^2x^2 = e^2a^2 - a^4 + a^2y^2 \quad / \ e^2 = a^2+b^2$

$x^2(e^2-a^2) = a^2(e^2-a^2) + a^2y^2$

$x^2b^2 = a^2b^2 + a^2y^2 \quad /:a^2b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a hiperbola középponti egyenlete.

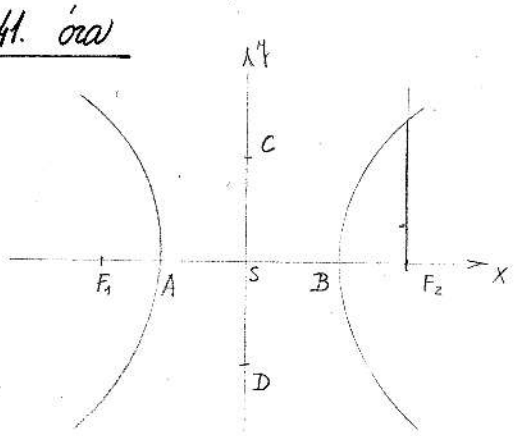
41. óra

1967. XI. 8.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c = \frac{e}{a} > 1$

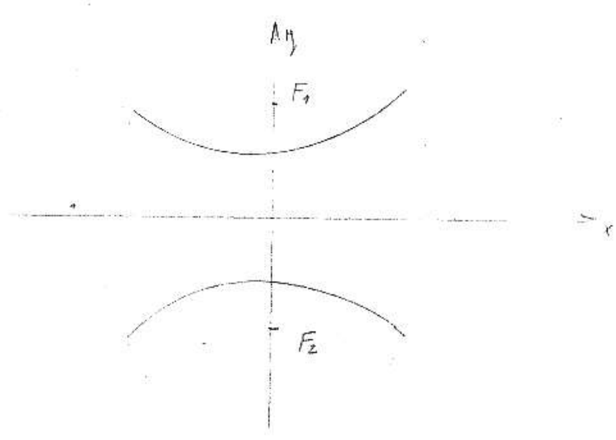
$e = \sqrt{a^2+b^2}$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c = \frac{e}{b}$

$e = \sqrt{a^2+b^2}$



A hiperbola paramétere

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x=|e|}$$ – a paraméternél

$$\frac{e^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad /\cdot a^2b^2$$

$$e^2b^2-y^2a^2=a^2b^2$$

$$y^2a^2=e^2b^2-a^2b^2$$

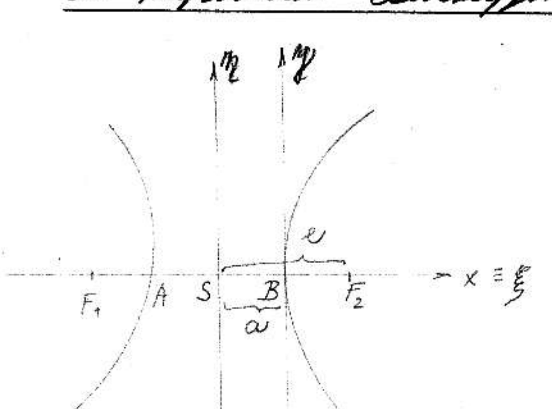
$$y^2a^2=b^2(e^2-a^2)$$

$$y^2a^2=b^2\cdot b^2$$

$$y^2=\frac{b^4}{a^2}$$

$$y=\left|\frac{b^2}{a}\right|\equiv p$$ – a hiperbola paraméterének egyenlete.

A hiperbola csúcsegyenlete



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\underbrace{\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1 \quad \Big/ \begin{array}{l}\xi=x+a\\ \eta=y\end{array}}$$

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad /\cdot a^2b^2$$

$$b^2(x+a)^2-y^2a^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+2axb^2+a^2b^2-y^2a^2=a^2b^2$$

$$y^2a^2=b^2x^2+2ab^2x$$

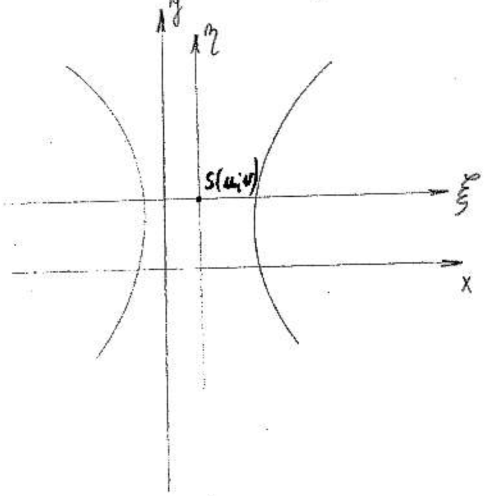
$$y^2=\frac{b^2(x^2+2ax)}{a^2}$$

$$y^2=\left|\frac{b}{a}\right|^2\cdot(x^2+2ax)$$

$$y^2=p\left(\frac{x^2}{a}+2x\right)$$

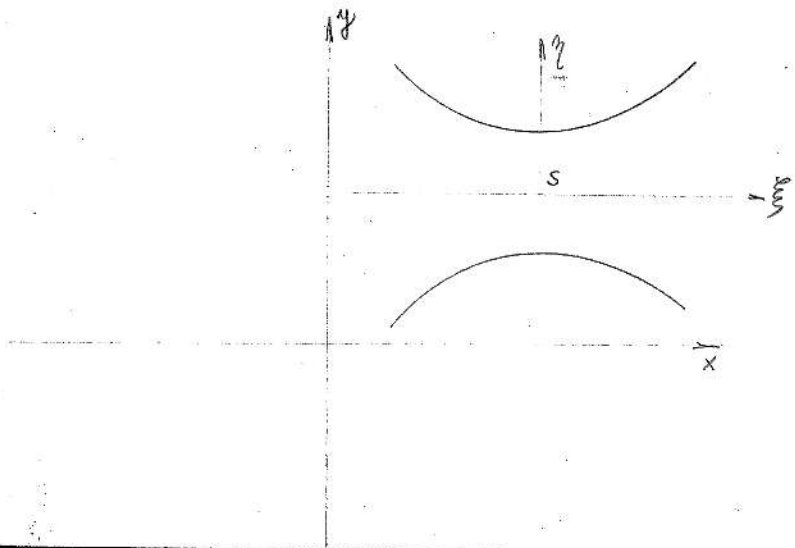
$$y^2=2px+p\frac{x^2}{a}$$ – a hiperbola csúcsegyenlete.

Az $S(u;v)$ középpontú hiperbola egyenlete



$$\xi = x + u$$
$$\eta = y + v$$
$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x+u)^2}{a^2} - \frac{(y+v)^2}{b^2} = 1$$

$$\xi = x - u$$
$$\eta = y - v$$
$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$



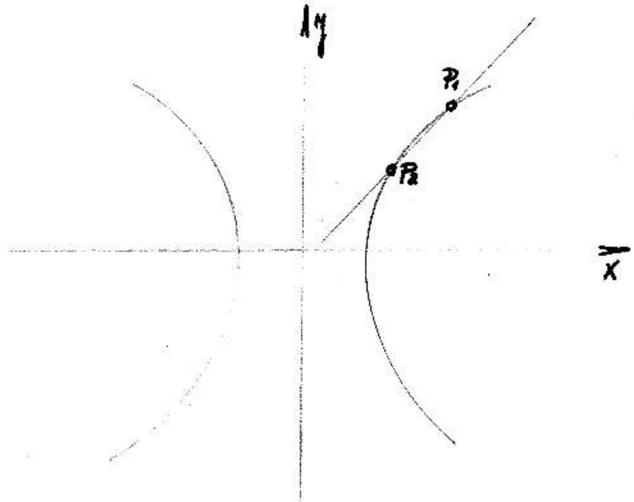
$$\frac{(y-v)^2}{b^2} - \frac{(x-u)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$
$$b^2(x^2 - 2ux + u^2) - a^2(y^2 - 2vy + v^2) = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - 2ubx + u^2b^2 - a^2y^2 + 2a^2vy - a^2v^2 - a^2b^2 = 0$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2ubx + 2a^2vy + u^2b^2 - a^2v^2 - a^2b^2 = 0$$
$$-Ax^2 + By^2 + Cx - Dy + E = 0$$

a hiperbola egyenlete: másodfokú kétism. egyenlet, melyből hiányzik az xy -os tag és a másodfokú tagok együtthatójának előjelei ellentétesek:

$$\underline{\underline{Ax^2 - By^2 + Cx - Dy + E = 0}}$$

A hiperbola érintője



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$P_1(x_1 ; y_1)$

$P_2(x_2 ; y_2)$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

$$x_1^2b^2 - y_1^2a^2 = a^2b^2$$

$$x_2^2b^2 - y_2^2a^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2}$$

$$\frac{y_2^2}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2}$$

$$a^2(y_2^2 - y_1^2) = b^2(x_2^2 - x_1^2)$$

$$a^2(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = b^2(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = m$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1) \qquad \Big/ \; P_1 \equiv P_2,\; x_1 = x_2,\; y_1 = y_2$$

$$y - y_1 = \frac{b^2 \cdot 2x_1}{a^2 \cdot 2y_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

$$a^2 y_1 \cdot y - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\frac{y_1 \cdot y - y^2}{b^2} + \frac{-x_1 \cdot x + x_1^2}{a^2} = \frac{1}{a^2b^2} \cdot 0$$

$$\frac{y_1 \cdot y}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x_1 \cdot x}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{1}{a^2b^2} \cdot 0$$

$$\frac{y_1 \cdot y}{b^2} - \frac{x_1 \cdot x}{a^2} + \boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = 0 \qquad 1 \,|(-1)|\, -1$$

$$\underline{\underline{\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1}}$$ – a hiperbola érintője

Az $S(u;v)$ középpontú hiperbola érintőjének egyenlete:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1 \qquad \xi = x - u$$

$$\frac{\xi \xi_1}{a^2} - \frac{\eta \cdot \eta_1}{b^2} = 1 \qquad \xi_1 = x_1 - u$$

$$\eta = y - v$$

$$\eta_1 = y_1 - v$$

$$\frac{(x-u)(x_1-u)}{a^2} - \frac{(y-v)(y_1-v)}{b^2} = 1$$ ~ a hiperbola érintője.

1967. XI. 10.

42 - 43 óra

A hiperbola aszimptotája

Azokat az egyeneseket, amelyekhez a hiperbola ágai állandóan közelegnek, de azt soha el nem érik, a hiperbola aszimptotáinak nevezzük.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad / : x^2$$

$$\frac{b^2 x^2}{x^2} - \frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a^2 b^2}{x^2}$$

$$b^2 - \frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a^2 b^2}{x^2} \quad / : a^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{x^2} \quad / \; x \to \infty \Rightarrow \frac{b^2}{x^2} \to 0$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

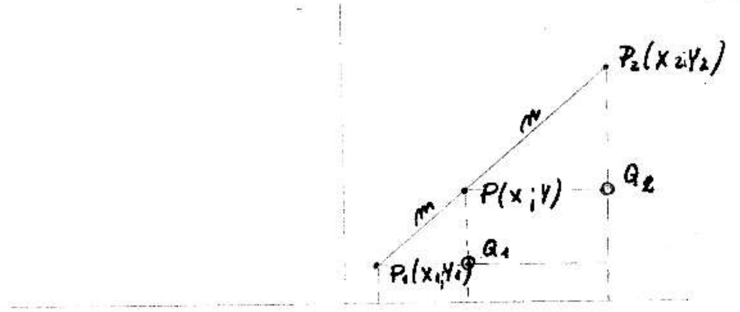
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$ – a hiperbola aszimptotáinak egyenlete.

A hiperbola és más mértani hely megoldása

Szakasz felosztása adott arányban



$$P_1Q_1P\triangle \sim PQ_2P_2\triangle$$
$$\Downarrow$$
$$P_1Q_1 : PQ_2 = P_1P : PP_2$$
$$(x - x_1):(x_2 - x) = m : n$$
$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{m}{n} \qquad /\cdot n(x_2-x)$$
$$n(x-x_1) = m(x_2-x)$$
$$nx - nx_1 = mx_2 - mx$$
$$nx + mx = mx_2 + nx_1$$
$$x(n+m) = nx_1 + mx_2$$
$$x = \frac{nx_1+mx_2}{n+m}$$

$$P_1Q_1P\triangle \approx PQ_2P_2\triangle$$
$$\Downarrow$$
$$PQ_1 : P_2Q_2 = PP_1 : PP_2$$
$$(y-y_1):(y_2-y) = m : n$$
$$\frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{m}{n}$$
$$ny - ny_1 = my_2 - my$$
$$ny + my = my_2 + ny_1$$
$$y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$
$$y = \frac{ny_1+my_2}{n+m}$$

$$P\left(\frac{nx_1+mx_2}{n+m}\,;\,\frac{ny_1+my_2}{n+m}\right)$$

Hol van annak a merőlegesnek a talppontja, amelyet a $7x-5y=19$ és $10x-7y=28$ egyenesek metszéspontjából az $y=\frac{3}{4}x+7$ egyenesre bocsájtunk és mekkora ennek a merőleges távolságnak a hosszúsága?

$$\begin{aligned} 7x-5y &= 19 \quad /\cdot 7 \\ 10x-7y &= 28 \quad /\cdot 5 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 49x-35y &= 133 \\ -50x+35y &= -140 \\ \hline -x &= -7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$$5y = 7x - 19$$
$$5y = 49 - 19$$
$$y = 6$$

$$P(7;6) \qquad m = -\frac{4}{3}$$

$$y - y_1 = m(x-x_1)$$
$$y - 6 = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\cdot 7$$
$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{28+18}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{46}{3} \qquad /\cdot 3$$
$$3y + 4x = 46$$

$4x + 3y = 46 \quad /\cdot 4$

$-3x + 4y = 7 \quad /\cdot 3$

$16x + 12y = 184$

$9x - 12y = -21$

$25x = 163$

$x = \frac{163}{25} \doteq 6{,}5$

$12x + 9y = 138$

$-12x + 16y = 28$

$25y = 166$

$y = \frac{166}{25} \doteq 6{,}7$

$P_1(6{,}5; 6{,}7)$

$d \doteq \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}7^2} \doteq \sqrt{0{,}25 + 0{,}49} = \sqrt{0{,}74} \doteq 0{,}8$

Írjuk fel ann. a körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2+y^2+2x-6y=0$ kört az $T(1;2)$ pontban és átmegy a $(4;-1)$ ponton.

$(x-m)^2+(y-n)^2 = r^2$

$x^2-2mx+m^2+y^2-2ny+n^2=r^2$

$x^2+y^2-2mx-2ny+m^2+n^2-r^2=0$

$x^2+y^2+2x-6y+0=0$

$m=-1 \quad n=3 \qquad S(-1;3)$

$r^2=m^2+n^2$

$r^2=1+9$

$r^2=10$

$r \doteq \sqrt{10} = 2\sqrt{2{,}5}$

$s \equiv S_1 P_1$

$s \equiv y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

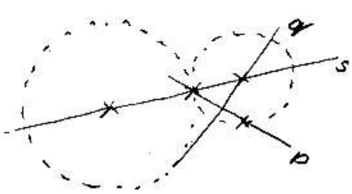
$y-2 = \frac{3-2}{-1-1}(x-1)$

$y-2 = -\frac{1}{2}(x-1)$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad /\cdot 2$

$x+2y=5 \equiv s$

$p \equiv T_1 P_4$



$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$y-2 = \frac{-1-2}{4-1}(x-1)$

$y-2 = -\frac{3}{4}(x-1)$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \quad \rightarrow m_q = \frac{4}{3}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0{,}5 = \frac{4}{3}(x - 2{,}5)$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} + \frac{1{,}5}{3} \quad / \cdot 3$

$\underline{3y - 4x = -8{,}5}$

$r^2 = 4 + 1 = 5$

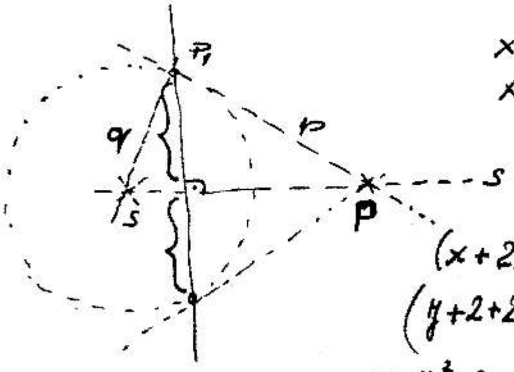
$(x-3)^2 + (y-1)^2 \doteq 5$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ -4x + 3y = -8{,}5 \\ \hline 4x + 8y = 20 \\ -4x + 3y = -8{,}5 \\ \hline 11y = 11{,}5 \\ y \doteq 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x + 6y = 15 \\ 8x - 6y = 17 \\ \hline 11x = 32 \\ x \doteq 3 \end{array}$$

$S_2(3;1)$

$T(1;2)$

Az $x^2+y^2+4x-4y-18=0$ körhöz és kívül fekvő P-ből érintőket rajzolunk. Szám. ki P koord., ha az érintési pontokon átm. szelő egy.: $x-y+2=0$.



$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$

$m = -2 \quad n = 2$

$m^2 + n^2 - r^2 = -18$

$4 + 4 + 18 = r^2$

$r^2 = 26$

$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 26$

$(y+2+2)^2 + (y-2)^2 = 26$

$P_1(3;1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 + 8y + 16 + y^2 - 4y + 4 = 26 \\ 2y^2 + 4y - 6 = 0 \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \end{array} \right.$$

$y_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$y_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$

$x = y + 2 \rightarrow x_1 = 3$

$s \equiv y - y_S = m(x - x_S)$

$y - 2 = -1(x+2)$

$y = -x \quad \equiv s$

$p \equiv y - y_{P_1} = \frac{y_P - y_{P_1}}{x_P - x_{P_1}}(x - x_{P_1})$

$y - 1 = \frac{y_P - 1}{x_P - 3}(x - 3)$

$y - 1 = \frac{y-1}{-y-3}(-y-3)$

$m_q = \frac{2-1}{-2-3} = -\frac{1}{4} \rightarrow m_p = 4$

$y - y_{P_1} = 4(x - x_{P_1})$

$y - 1 = 4(x - 3)$

$$\left. \begin{array}{l} p \equiv y = 4x - 11 \\ s \equiv y = -x \end{array} \right\} P$$

$4x - 11 = -x$

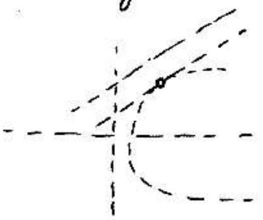
$5x = 11$

$x = \frac{11}{5} = 2{,}2$

$y = -2{,}2$

$P(2{,}2; -2{,}2)$

Írj fel az $y^2=12x$ p. érintőjének egyenletét, mely párh. a $3x-y+5=0$ egyenessel.



$$t \equiv y \cdot y_1 = p(x+x_1)$$
$$y \cdot y_1 = 6(x+x_1)$$
$$y = \frac{6x}{y_1} + \frac{6x_1}{y_1}$$
$$y = 3x+5$$

ha párh $\rightarrow m_1 = m_2$

$$3 = \frac{6}{y_1} \rightarrow 3y_1 = 6 \rightarrow y_1 = 2$$
$$x = \frac{y^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = x_1$$

$T(\frac{1}{3};2)$

$m = 3$

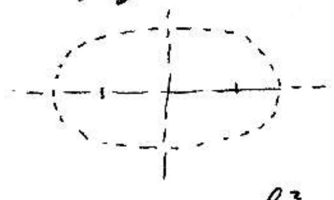
$$t \equiv y - y_1 = m(x-x_1)$$
$$y-2 = 3\left(x-\frac{1}{3}\right)$$
$$y-2 = 3x-1$$

$y = 3x+1$

Írj. fel az ellipszis egyenletét ha 1. nagytengelye 26, gyújtó pontjai $(-10;0)$ $(14;0)$.

2. középp. $(-3;4)$; nagyt. 10, kistengelye 8 és nagyt. párh. az X-szel.

1.)



$a = 13 \rightarrow a^2 = 169$

$e = 12$

$$b^2 = a^2 - e^2$$
$$b^2 = 169 - 144$$
$$b^2 = 25$$

$$\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

2.)

$a = 5 \rightarrow a^2 = 25$

$b = 4 \rightarrow b^2 = 16$

$$\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$x = 2y + 1$$

$$b^2(2y+1)^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2 4y^2 + b^2 4y + b^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b^2\cdot 4 \pm \sqrt{16b^4 - 4(b^2 - a^2b^2)}}{8b^2 - 2a^2}$$

$$x_{1,2} = 2y_{1,2} + 1$$

$$P_{1,2}(x_{1,2};\, y_{1,2})$$

$$h = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Milyen hosszú húrt vág ki az $x^2 : a^2 - y^2 : b^2 = 1$ hiperbola az $x - 2y - 1 = 0$ egyenesből.

1967. XI. 13.

44. óra

Mi az egyenlete annak az egyenesnek amely az origón és a $(-3;-5)$ -n megy keresztül.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y + 5 = \frac{0+5}{0+3}(x+3)$$

$$y = \frac{5}{3}x - 5 + 5$$

$$y = \frac{5}{3}x$$

Mekkora azon a két egyenessel bezárt szög amelyeknek egyenlete $y=\frac{1}{2}x+2$; $y=\frac{3}{2}x-3$

$$tg\,\omega = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$tg\,\omega = \frac{4}{7} = 0{,}571 \qquad \alpha = 29°45'$$

Hat. meg az $x+2y=12$ és $5x-3y=-5$ egyenesek metsz. p. koord.

$$\begin{aligned} x+2y &= 12 \quad /\cdot 5 \qquad & x &= 12-2y \\ 5x-3y &= -5 & x &= 2 \\ -5x-10y &= -60 & & \\ \hline -13y &= -65 & P&(2;5) \\ y &= 5 & & \end{aligned}$$

Mi az egyenlete annak az egyenesnek amely az $x-y=-3$ és $x+2y=12$ egyenesek metszéspontján és a $(7;-5)$ ponton megy keresztül.

$$\begin{aligned} x-y &= -3 \qquad & x &= y-3 \\ -x\pm 2y &= 12 & x &= 2 \\ \hline -3y &= -15 & & \\ y &= 5 & P&(2;5) \end{aligned}$$

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-5 = \frac{-5-5}{7-2}(x-2)$$

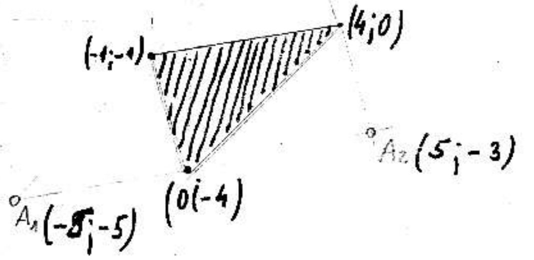
$$y-5 = -\frac{10}{5}(x-2)$$

$$y = -2x+9$$

45;46. dolgozat. 47. óra 1967. XI. 15

Ism. felelés.

Vm. parallelogr. 3 csúcsp. koord. $(-1;-1)(0;-4)(4;0)$
Keressük ki a 4. csúcsp. koord.



$$a \equiv y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-y_1}(x-x_1) \rightarrow m_1$$

$$m_1 = m_2 \quad c \equiv y-y_1 = m(x-x_1)$$

$(-1;-1)$ $(0;-4)$ $(4;0)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$y+1=\frac{4+1}{0+1}(x+1)$$
$$y+1=5(x+1)$$
$$y=5x+4 \rightarrow m=5$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-0=5(x-4)$$
$$\underline{y=5x-4}$$

2. Állítsuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $x+y=12$ $4x-3y=-7$ egyenesek metszéspontján megy keresztül és az $x-2y-2=0$ egyenessel párhuzamos.

$$x=12-y$$
$$4(12-y)-3y=-7$$
$$48-4y-3y=-7$$
$$-7y=-55$$
$$y=\frac{55}{7}$$

$$x=12-y$$
$$x=\frac{84}{7}-\frac{55}{7}$$
$$x=\frac{29}{7}$$

$$P\left(\frac{29}{7};\frac{55}{7}\right)$$

$$2y=x-2$$
$$y=\frac{1}{2}x-1$$
$$\downarrow m=\frac{1}{2}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-\frac{55}{7}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{29}{7}\right)$$
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{29}{14}+\frac{110}{14}=\frac{1}{2}x+\frac{81}{14}$$

$$\underline{\underline{14y-7x-81=0.}}$$

7. XI. 16.

48. óra

$A(2;-1)$
$B(5;-2)$
$C(10;3)$

kör egy.

Hat. meg a $(-3;-2)$ és $(5;8)$-on átm. egyenes és a $6x+5y=53$ egyenes hajlásszögét.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$y+2=\frac{8+2}{5+3}(x+3)$$
$$y+2=\frac{10}{8}(x+3);\ m=\frac{5}{4}$$

$$5y=-6x+53\ ;\ m=-\frac{6}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{6}{5}}{1-\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}}=\frac{\frac{25+24}{20}}{\frac{20-30}{20}}=$$
$$=\frac{\frac{49}{20}}{-\frac{10}{20}}=-\frac{49}{10};$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{6}{5}+\frac{5}{4}}{1-\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{4}} = \frac{\frac{+49}{20}}{\frac{20-30}{20}} = \frac{-49}{-10} = 4{,}9 \qquad \alpha = 78°28'$$

Mi az egyenlete annak az egy. mely a koord. kezd. p.-n megy ker. és az $5x-7y=35$ egyenesre mer.

$$m_1 = \frac{5}{7} \qquad m_2 = -\frac{7}{5}$$

$$y = mx$$
$$y = -\frac{7}{5}x$$

Áll. f. ann. az egy. az egyenl., amely az $x+2y=12$ és $4x-3y=-7$ egyenesek metsz. megy ker. és az $x-2y=-2$ egy. párh. áll alak.

$$4(12-2y)-3y=-7 \qquad x = 12-10=2$$
$$48-8y-3y=-7$$
$$-11y=-55 \qquad P(2;5)$$
$$y=5$$

$$2y = x+2$$
$$m = \frac{1}{2}$$

$$y-y_1 = \frac{1}{2}(x-x_1)$$
$$y-5 = \frac{1}{2}(x-2)$$
$$2y-10 = x-2$$
$$2y-x-8=0 \qquad x-2y+8=0$$

XI. 17.

49. 50. óra Összefoglaló ismétlés

1., An. mérlan. – geom. feladatok számtanilag old meg.

Koord. rendszer. felezőpont, arányos osztás, szakasz hossz.

a., Mekkorák a Δ old., ha csúcsp. $A(3;4)$ $B(6;8)$ $C(10;-3)$

b., " $A(2;5)$ $B(-5;-6)$ $C(5;-1)$

c., Vm. Δ csúcsp. koord. $A(2;7)$ $B(-3;1)$ $C(1;-3)$. Milyen hosszúak az egyes súlyvonalak

d., Vm. egyenlőszárú Δ-ben az alap végpontjainak koord $(-1;-1)$ $(8;2)$. Az egyik szárának hossza pedig 5 egység. Szám. ki a csúcsának koordinátáit.

e., Vm. négyszög egymás után következő csúcspontjainak koord. $A(0;2)$ $B(4;2)$ $C(1;7)$ $D(1;5)$. Mekkorák a négyszög oldalai és átlói.

f., Vm. Δ csúcsp. koord. $A(-3;0)$ $B(0;5)$ $C(3;1)$. Mekkorák a Δ súlypontjainak koord.

2., $T_\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ $T_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

a., Mekk. a Δ ter. ha csúcsp. koord. $A(-3;-2)$ $B(0;5)$ $C(5;0)$

b., Egy Δ 3 csúcsp. koord.: $P(3;2)$ $Q(-5;5)$ $R(1;-3)$. Mekk a Δ ter.?

c., Egy Δ csúcsp. koord.: $A(-3;2)$ $B(-1;9)$ $C(8;5)$. Hat meg azon Δ területét, amelynek csúcspontjai az adott Δ oldalainak felezőpontjai.

d., Hat. meg. azon a négysz. a ter. amelynek csúcsp. $A(5;1)$ $B(-2;4)$ $C(-4;-3)$ $D(2;-2)$

e., Hat. meg a tr. területét, amelynek csúcsp. $P(0;0)$ $Q(9;0)$ $R(6;3)$ $S(1;3)$.

f., Az $A(-8;-14)$ $B(-4;2)$ $C(5;8)$ csúcsp. adott Δ-ben az AB oldalt 1:3 arányban, a BC oldalt 1:2 a-ban, és a CA oldalt 1:1-hez osztjuk. Mekkora az osztópontok összekötése által kelet. Δ területe?

3., Egyenesek: 1 ~ 6

a., Mi az egy. egy. az egyenesnek mely átm. a $(4;5)$-n és X-t az origótól -3 egységnyi távban metszi.

b., Mi az egy. egy. az egy.-nek (mely a $(4;5)$-n megy át) mely a koord. kezd. pontján és a $(-3;-5)$-n megy át.

c., Hat. meg a Δ csúcspontjain és a szemben fekvő oldalak felezőpontján átmenő egy. egyenletét, ha a Δ csúcsp. koord.: $A(0;2)$ $B(8;4)$ $C(6;-2)$.

4.) Két egyenes metszéspontja   Akkor metszi egymást ha $m_1 \neq m_2$.
A metszéspont rajta van mindkét egyenesen. Úgy kell meg, hogy megoldjuk a 2 egyenes által meghatározott elsőfokú kétismeretlenű egyenletrendszert.

a.) H. meg az $x+2y=12$ és $5x-3y=-5$ egyenesek metszéspontjának koordinátáit.

b.) H. m. " $3x+y+7=0$ $x-4y-2=0$.

c.) Vm. Δ old. egy. $4x-5y=-13$ $7x+2y=31$ $3x+7y=1$
Hat. meg a Δ csúcspontjainak a koordinátáit.

d.) Hat meg a négysz. átl. egyenletét és szám. ki az átlók metszéspontjának koord., ha a $\square$ egymás után köv csúcsp. koord. $A(-3;2)$ $B(2;5)$ $C(4;2)$ $D(4;-3)$.

e.) Mi az egy. ann. az egy.-nek amely az $x-y=-3$ és $x+2y=12$ egyenesek metszéspontján és a $(7;-5)$-n megy keresztül.

f.) 2 egy. egyenlete $2x+3y=15$ és $x-y=1$. Mekkora a 2 egyenes és az X tengely által meghatározott Δ területe.

5.) Két egyenes hajlásszöge. $\operatorname{tg}\omega=\frac{m_1-m_2}{1+m_1 \cdot m_2}$

a.) Mekk. szöget zár be az $A(-3;-4)$ és $B(5;7)$ pontokon áthaladó egyenes az $5x-4y=14$ egyenessel.

b.) H. m. a $(-3;-2)$ és az $(5;8)$ pontokon átmenő egyenes és a $6x+5y=30$ egyenes hajlásszögét.

c.) Mekkorák a Δ szögei ha csúcsp. koord. $(-1;-2)$ $(2;3)$, $(4;-1)$.

d.) Mekkora szöget zárnak be a négysz. átlói, ha az egymás után köv. csúcsp. koord.:
$A(-1;-2)$ $B(6;1)$ $C(5;6)$ $D(1;5)$

e.) $[(-1;-2)]$ Hat. meg ann. az egy.-nek az egyenletét, amely átm. az $A(3;5)$-n és 45°-os szöget zár be az $x-2y+2=0$ egyenessel.

f.) Írj fel a $2x-4y+9=0$ egyenessel 60°-os szöget bezáró és az origón átmenő egyenes egyenletét.

6.) Párhuzamos egyenesek.   feltétele: $m_1=m_2$

a.) írj. föl. ann. az egy.-nek az egyenletét amely átmegy $A(3;4)$-n és $\parallel$ az $y=2x-3$ egy.-sel.

b.) Írj f. azon egy egyenletét amely átm $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ponton és párh. a $\underline{-3}$ iránytang. egyenessel.

c.) mely pontban metsz. az origón átm. és az $y=-2x+3$ egyenessel $\parallel$ egyenes az $x+2y=4$ egyenest.

A merőlegesség feltét. $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

a.) H. m. ann. az egy.-nek az egy. mely a $(4;1)$ és $(5;3)$-hal adott szakaszt merőlegesen felezi.
b.) H. m. a $(-1;0)$, $(5;0)$ és $(1;4)$ csúcsokkal adott Δ magasságpontjának és a körülírt kör középpontjának koord..

7. Pont távolsága az egyenestől.
Párhuzamos egy.-ek távolsága

a.) Mily táv. van a $(2;5)$ p.a $3x+4y=6$ egyenestől.
b.) Mily t. v. a koord. kezdp. a $6x-8y=25$ egyenestől.
c.) Egy Δ old. egy.:

$$5x + 2y - 29 = 0$$
$$9x - y - 43 = 0$$
$$14x + y - 49 = 0$$

Mekkora t. van a súlypont a Δ oldalaitól.
d.) az $A(-3;2)$.-n kez. párh. húz. a $B(1;-2)$ és $C(4;1)$-n áthaladó egyenessel. Mekk. a $\parallel$ egyenesek távolsága.
e.) szám. ki a négyzet ter., ha 2 old. egyenlete $3x-5y=4$ és $3x-5y=5$
f.) szám. ki a két egy. távolságát: $y=\frac{x}{2}+3$ $y=\frac{x}{2}-4$.

XI. 21. 51. óra

Összefoglaló ismétlés.

8. A kör egyenletei. Kör pont és egyenes kölcsönös helyzete
Két kör kölcsönös helyzete.
A kör érintője.

a.) $x^2+y^2=r^2$ $S(u;v)$
$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$
b.) Kör, pont, egyenes kölcs. helyzete.
c.) 2 kör kölcs. helyzete.
d.) $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$

lenvezetés

$(x-u)(x_1-u)+(y-v)(y_1-v)=r^2$

$$x^2+y^2-2ux-2vy+u^2+v^2-r^2=0$$
$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

a.) Mi az egy. anm. a körnek, mely a $(-1;1)$ $(4;2)$ $(4;-4)$-n megy keresztül?
b.) Kér. meg anm. a k.-nek az egy., amely a $(2;7)$-n megy át és az $(x-5)^2+(y-3)^2=36$ körrel koncentrikus.
c.) Vm. kör egy.: $x^2+y^2+2x-2y=14$. Hat. meg az $(1;3)$-n átm. legrövidebb húr egyenletét és koord.
d.) Keressük meg az $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ kör és a $3x-4y=19$ egyenes metszéspontjának koord. és áll. meg a kör és egyenes kölcsönös helyzetét.
e.) Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=25$ és az $x^2+y^2-12x-16y=-75$ körök érintik egymást. Írjuk le annak a k.-nek az egyenletét, amely átmegy a 2 kör érintési pontján és a tengelyekkel érinti.
f.) Mekkora szöget zárnak be az $x^2+y^2=36$ kör -5 abszcisszájú pontjaiban húzható érintők.

9. A parabola egyenletei, a p. és más alakz. kölcsönös helyzete. A parabola érintőjének egyenlete.

a.) $x^2=2py$ $\quad x^2=-2py$ $\quad y^2=2px$ $\quad y^2=-2px$
$(x-u)^2=2p(y-v)$ ...
b.) kölcsönös helyzet.
c.) $y\cdot y_1=p(x+x_1)$ $\quad x\cdot x_1=p(y+y_1)$
$(y-v)(y_1-v)=p(x_1+x_2-2u)$

a.) Hat. meg anm. a p. egyenletét, amely átm. $(-2;3)(4;0)$ $(8;8)$-n.
b.) Egy a vízszinteshez hegyes szögben elhajított kő az eldobástól 36 m-re esett le és 12 m-re emelkedett. Írjuk fel a röppálya egyenletét.
c.) Milyen hosszú az $x^2+10x-6y+49=0$ parabolának az a húrja, amely a fókuszon megy keresztül és az X tengellyel 45°-os szöget zár be.
d.) Hat meg az $y^2=9x$ p. és az $x^2+y^2=52$ kör metszéspontjait!
e.) a p. egy.: $y^2-7y-4x+41=0$. Hat. meg az $x_1=5$ absz. pontjaihoz tartozó érintők egyenletét.
f.) Írj fel az $y^2=12x$ p. érintőjének egy., amely 45°-os szöget zár be a $4x-2y+9=0$ egyenessel.

10.

Az ellipszis egyenletei, az ellipszis, pont, egyenes kölcs. helyzete, az ellipszis érintőjének egy.

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ε; $c=\frac{\varepsilon}{a}$ / l.

XI. 22.

52. óra Ismétlés

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2}+\frac{y \cdot y_1}{b^2}=1 \qquad p=\frac{b^2}{a}$$

a) Írj fel az ellipszis egyenletét, ha a középpontja az $M(-5;-4)$-ban van, tengelyei párhuzamosak a koord. tengelyekkel, $a=6$ $b=3$.

b) Hat. meg fókuszainak koord, tengelyeinek egy.-t. vmint a numerikus excentricitást.

b) Hat. meg az alábbi egyenlettel adott ell. középpontját és gyújtópontjai koord.:

1) $4x^2+5y^2+16x-20y+31=0$

2) $x^2+2y^2-10x+12y+43=0$

c) Ker. meg az ellipsz. mindkét tengelyén azokat a pontokat amelyből, mint középpontokból köröket rajzolva azok átmennek az $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ ellipsz. és a $3x-10y+60=0$ egyenes metszéspontján.

d) Milyen pontokban metszi a $7x^2+21y^2=364$ ellipszist a $7x+3y=26$ egyenes?

Milyen hosszú az egyenesen fekvő húr?

e) Írj. fel az $x^2/169+y^2/25=1$ ell. azon érintőjének egyenletét, amelyek merőlegesek a $13x+12y-115=0$ egyenesre.

f. Hat. meg az $5x^2+3y^2=93$ ell. $y_1=4$ ordinátájú pontjához tartozó érintők egyenletét.

11.

A hiperbola egyenletei, a h. és más mértani hely kölcsönös helyzete. Érintője és aszimptotái.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2}-\frac{y \cdot y_1}{b^2}=1$$

$$y=\frac{bx}{a}$$

a.) Hat. meg: $3x^2-2y^2-18x+8y-29=0$ h. középp. koord., fókusztávolságát, fókuszainak koord., numerikus excentricitását

$$2y^2-x^2+8y+6x-8=0$$

b.) Hat. meg az $x^2+y^2=25$ kör és a $9x^2-4y^2=108$ hiperbola metszéspontjai által meghatározott négyszög átlóinak egyenletét.

c.) Hat. meg az $x^2/16-y^2/9=1$ hiperbola és az $x-2y-2=0$ egyenes metszéspontját.

d.) Mekkora szöget zárnak be az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5,76}=1$ h. aszimptotái.

e.) Milyen helyzetű az $x^2-4y^2=12$ hiperbolához képest az $x-y-3=0$ egyenes.

f.) Hangforrás helyét akarjuk meghatározni. Három megfigyelő helyezkedik el, melyeknek koordinátái $A(0;0)$ $B(4;0)$ $C(6;0)$
B figyelő 3 sec.-mal később észlelte a hangot mint C. ~~gacg~~ A 9 sec.-mal később mint B. A hang terjedési sebessége 340 m/s. (333 m/s). Hat. meg a hangforrás helyét.

53. óra. Ism.

54-55. óra. 1967. XI. 2

A függvény fogalma

Ha két mennyiség olyan összefüggésben van egymással, hogy az egyik mennyiség értékének tetszőleges megváltozása maga után vonja a másik mennyiség értékének bizonyos törvényszerűség szerint való megváltozását, akkor ezt az utóbbi mennyiséget az előbbi függvényének, funkciójának nevezzük.

E 2 mennyiség változó mennyiség, még pedig azt, amelyek az értékét tetszés szerint változtathatja meg – független változónak, azt pedig, amelyiknek az értékváltozása a független változó értékváltozásától függ, függő változónak nevezzük.

pl. az ár nagysága az áru mennyiségének,
a munkaidő a munkások számának,
a négyzet területe az oldalának,
a kocka köbtartalma az élének,
a gömb felszíne a sugarának,
a mozgás sebessége és gyorsulása az időnek,
a test térfogata a hőmérsékletnek

a függvénye.

A matematika a változók értékei közötti összefüggést egyenlet ún. függvényegyenlet alakjában fejezi ki. A változókat az ABC utolsó betűivel, az állandókat pedig az ABC elejéről vett betűkkel jelöljük.

A fgg.-egyenletben előforduló azon mennyiségeket, amelyek értéke nem változik állandóknak v. konstansoknak nevezzük.

pl.

$$y = ax + b - c$$

$$y = \frac{3x^2 - 5}{2}$$

$$y = \sqrt{2x - a}$$

x – független
y – függő változó

Ha a fg.-ben a független és függő változót egymással felcseréljük, a fg. fordított v. inverz függvényét nyerjük:

$$y = ax + b - c \rightarrow ax + b - c = y$$

$$ax = y - b + c$$

$$x = \frac{y - b + c}{a}$$

$$y = \frac{3x^2 - 5}{2} \rightarrow 2y = 3x^2 - 5$$

$$3x^2 = 2y + 5$$

$$x = \sqrt{\frac{2y + 5}{3}}$$

$$y = \sqrt{2x - a} \rightarrow y^2 = 2x - a$$

$$2x = y^2 + a$$

$$x = \frac{y^2 + a}{2}$$

Ha a fg. egyenletben a bal oldalon csak a függő változó áll, míg a jobb oldal a független változót és az állandókat tartalmazza – neve kifejtett v. explicit függvény.

A kifejtetlen v. implicit fg.-ek, amelyeket magunknak kell a függő változó szerint megoldani, hogy a változók közötti kapcsolatot világosan felismerhessük.

Implicit v. kifejtetlen fg.:

$$2x+5y-3=4x+8$$
$$x^2-5xy-6y^2=2x+5y$$

↓

Kifejtett fg.; explicit fg.:

$$2x+5y-3=4x+8$$
$$5y=4x+8+3-2x$$
$$5y=2x+11$$
$$y=\frac{2x+11}{5}$$

$$x^2-5xy-6y^2=2x+5y$$
$$-6y^2-5xy-5y-2x+x^2=0 \quad /\cdot(-1)$$
$$6y^2+5xy+5y-x^2+2x=0$$
$$y(6y+5x+5)-x^2+2x=0$$

$$6y^2+y(5x+5)-x^2+2x=0$$
$$6y^2+(5x+5)y-(x^2-2x)=0 \quad \leftarrow Ay^2+By-C=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-(5x+5)\pm\sqrt{(5x+5)^2+24(x^2-2x)}}{12}=$$
$$=\frac{-5x-5\pm\sqrt{25x^2+50x+25+24x^2-48x}}{12}=$$
$$=\frac{-5x-5\pm\sqrt{49x^2+2x+25}}{12}$$

Függvények általános jelölése:

$y = f(x)$ $\quad y = g(x)$ $\quad f(x,y)=0$ $\quad g(x,y)=0$

$y = F(x)$ $\quad y = G(x)$ $\quad F(x,y)=0$ implicit fg.

$y = \varphi(x)$ kifejtett fg. $\quad \varphi(x,y)=0$

A függvények felosztása – azon műveletek szerint történik, amelyek a kifejtett függvényben a változókat összekapcsolják. Ez alapon a függvények lehetnek algebraiak v. transzcendensek.

A fg. algebrai, ha a fg. egyenlet következő algebrai műveleteket foglalja magába:

összeadás,
kivonás,
szorzás,
hatványozás egész kitevőre
osztás
és gyökvonás.

A transzcendens „túllépő" fg.

Ha a változó a hatvány és gyökkitevőben logaritmus-jel alatt v. goniometriai függvényekben fordul elő".

Az algebrai fg. racionális ha a változók nem fordulnak elő" gyökjel alatt, ellenkező esetben irracionális.

A rac. fg.: $y = 3x^4 - 7x$

$y = \frac{2}{3}x^2 + 5x - \sqrt{18}$

Irrac. fg.: $y = \sqrt{x}$

$y = 3x^2 + 5\sqrt[4]{x^3 - 7}$

A racionális fg. lehet egész v. tört fg. aszerint, amint a független változó csak a számlálóban v. pedig a nevezőben is előfordul:

Egész fg. : $y = 4x^2 + 5x - 8$

$$y = \frac{3x^2 + 8x - 6}{13}$$

Tört fg. : $y = \frac{3x+5}{9x-4}$

$$y = \frac{4x^2 + 6x - 7}{2x^3 - 9x}$$

Az egész fg. a független változó hatványkitevője szerint lehet elsőfokú egész fg. : $y = ax + b$; $y = 3x$

másodfokú " fg. : $y = ax^2 + bx + c$; $y = 8x^2 - 5$

harmadfokú " fg. : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$y = x^3 - 2x + 5$$

n-ned-fokú egész fg. : $y = x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px + Q$

$$y = x^n - 1$$

A transzcendens fg. lehet:

kitevős - exponenciális: $y = 2^x$

$y = \sqrt[x]{5}$; $y = a^{x+2}$

logaritmikus : $y = \log_a x$ $y = \log(3x+5)$

$$y = \log \frac{x}{2}$$

trigonometriai : $y = \sin x$; $y = \cos x^2$

$$y = \operatorname{tg} \frac{x + \pi}{x - \pi}$$

Az olyan fg., melynél a független változó egy értékéhez a függvénynek is csak egy értéke tartozik, egyértékű fg-nek nevezzük: pl. racionális fg.

Ha a független változó egy értéke a fg-nek több egymástól különböző értékét határozza meg, akkor a fg-t többértékűnek, 2, 3 ... n értékűnek mondjuk: ilyenek az irracionális fg-~~nyek~~:

A független változók száma szerint a fg. lehet 1, 2 .... általában n változós függvény.

2. változós fg.: $z = f(x;y) = ax^2 + bxy + y^2$

3. » fg.: $u = f(x;y;z) = 2x + 3y + 4z$

több változós fg.: $y = f(x_1, x_2 \cdots x_n) = ax_1 + bx_2 + \ldots + px_n$

A fg. értéke a független változó bizonyos helyén.

A fg-nek a független változó bizonyos helyeihez, értékeihez tartozó értékét megkapjuk, ha a fg. egyenletben a független változó helyébe, annak kiszemelt értékét helyettesítjük.

Az $y = f(x)$ fg-nek az $x = a$ helyen az értéke $y = f(a)$

Hat. meg az $y = x^2 + ax + b$ másodfokú fg. értékét az $x = 0, \infty, 1, -1, 2, -2, a, -a$ helyeken.

$$y = f(0) = 0^2 + a.0 + b = 0 + 0 + b = b$$
$$y = f(\infty) = \infty^2 + a.\infty + b = \infty(\infty + a) + b = \infty$$
$$y = f(1) = 1^2 + a.1 + b = 1 + a + b = a + b + 1$$
$$y = f(-1) = (-1)^2 + a(-1) + b = 1 + (-a) + b = 1 - a + b$$
$$y = f(2) = (2)^2 + a.2 + b = 4 + 2a + b = 2a + b + 4$$
$$y = f(-2) = (-2)^2 + a(-2) + b = 4 - 2a + b$$
$$y = f(a) = a^2 + a.a + b = a^2 + a^2 + b = 2a^2 + b$$
$$y = f(-a) = (-a)^2 + a.(-a) + b = a^2 - a^2 + b = b$$

A független változónak azt az értékét (v. értékeit) amely mellett a fg. értéke nulla, a fg. zérus helyeinek nevezzük. A fg. zérus helyeinek meghatározása az $f(x) = 0$ algebrai egyenlet megoldása útján történik s így nem fg.-tani, hanem algebrai feladat.

Keressük meg az $y = x^2+ax+b$ fg. zérus-helyeit:

$f(x) = 0$

$x^2+ax+b = 0 \qquad x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

A változóknak összetartozó értékeit értéktáblázatba foglalhatjuk össze.

A fg. zérushelyeinek a sík azon pontjai felelnek meg, amelyben a fg.-görbe az abszcissza tengelyt metszi.

55 ó. 1967. XI

$f(x) = \frac{x-2}{x+1} \quad ; \; x \neq -1 \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ -2,\ a,\ a^2$

$y = -2,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ +4,\ \frac{a-2}{a+1},\ \frac{a^2-2}{a^2+1}$

$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} \quad ; \; x \neq 2 \qquad x = 0;1$

$y = -1;0$

$f(x) = 3x^2+7x+3/x^2+7/x \qquad x \neq 0 \qquad x = 1;2;3;\frac{1}{2};\frac{1}{3};a;\frac{1}{a}$

$y = 3+7+3+7 = 20$

$y = 6+14+\frac{3}{4}+\frac{7}{2} = 20+\frac{17}{4} = 24\frac{1}{4}$

$y = 27+21+\frac{1}{3}+\frac{7}{3} = 48+\frac{8}{3} = 50\frac{2}{3}$

$y = \frac{3}{4}+\frac{7}{2}+12+14 = 26+\frac{17}{4} = 30\frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{3}+21+27+\frac{7}{3} = 48+\frac{8}{3} = 50\frac{2}{3}$

$y = 3a^2+7a+\frac{3}{a^2}+\frac{7}{a}$

$y = \frac{3}{a^2}+\frac{7}{a}+3a^2+7a$