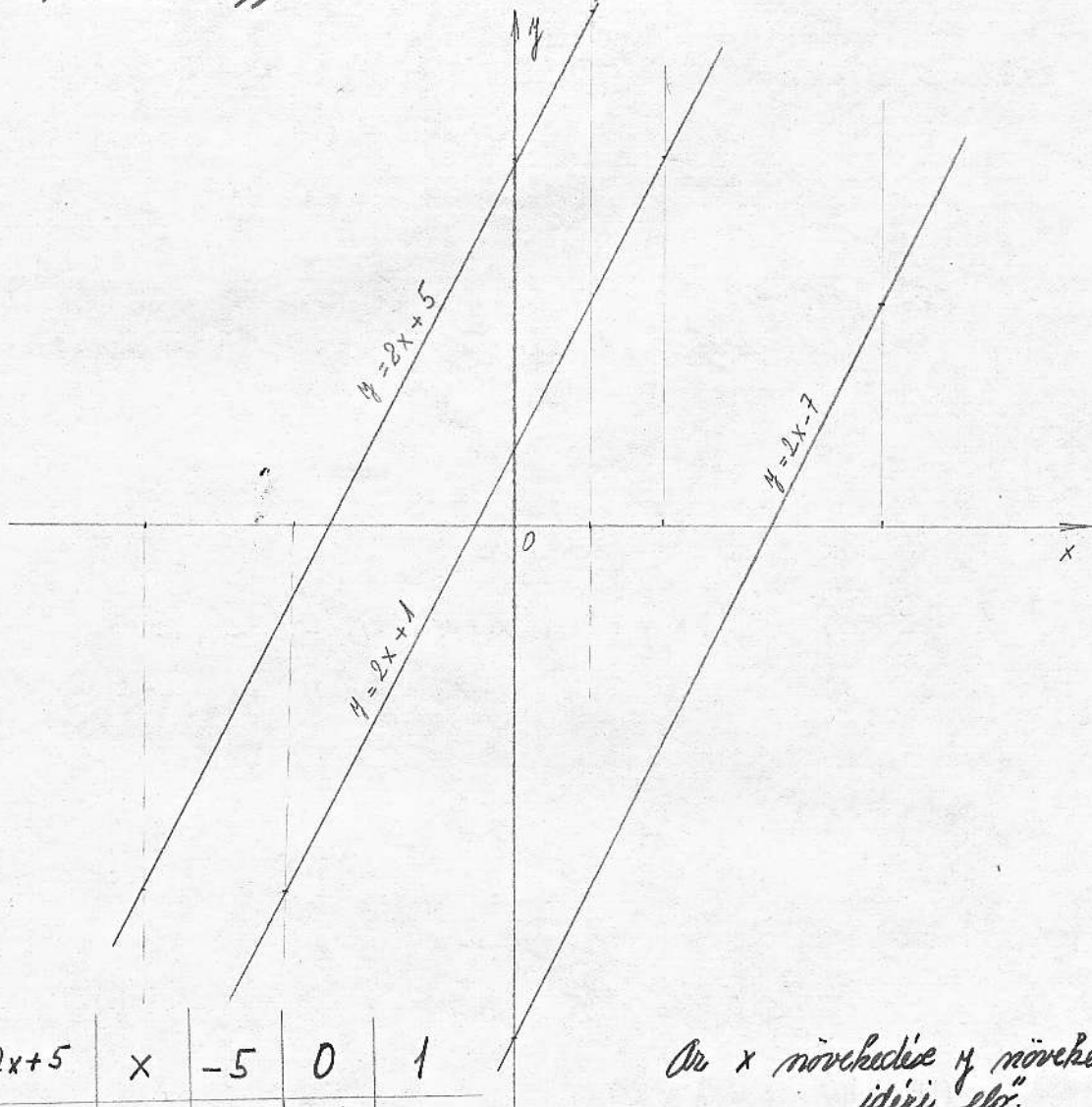


A függvény határértéke

Adt. a fűv. függ. : $y = 2x + 5$ $y = 2x + 1$ $y = 2x - 7$
 Alkalmazd meg a fű. változójának monotonitását és graf.
 képződését egyenlősen való helyettesít.



$y = 2x + 5$	x	-5	0	1
	y	-5	5	7
$y = 2x + 1$	x	-3	0	2
	y	-5	1	5
$y = 2x - 7$	x	0	3	5
	y	-7	-1	3

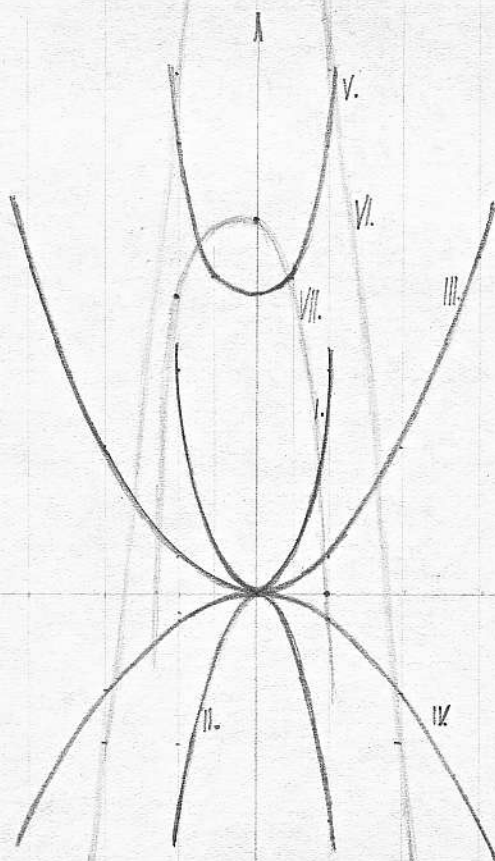
Ar x növekedése y növekedését
 idézi elő.

A grafikonok pontszámok.

Ábr. a kör. másodf. fg. és ill. meg a fg-nyek
váltakozóinak menete:

$$I. y = 3x^2 \quad II. y = -3x^2 \quad III. y = \frac{1}{2}x^2 \quad IV. y = -\frac{x^2}{3}$$

$$V. y = 2x^2 + 4 \quad VI. y = 10 - 3x^2 \quad VII. y = 5 - 2x - 3x^2$$



2.) Hat. meg az. $y = ax + b$ fg. értékeit az $x = 0, \infty, -a; a$
 $-1, 1$ helyeken.

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad x = 0 \quad y = f(0) \quad y &= \underline{b} \\ y = f(\infty) &= \underline{\infty} \\ y = f(-a) &= \underline{-a^2 + b} \\ y = f(a) &= \underline{a^2 + b} \\ y = f(-1) &= \underline{-a + b} \\ y = f(1) &= \underline{a + b} \end{aligned}$$

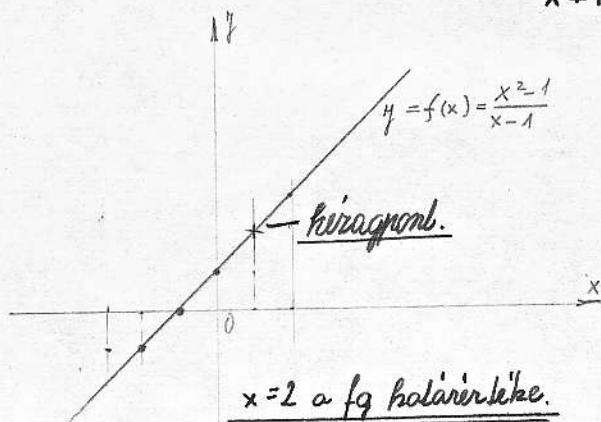
3.) $y = ax^2 + x + a$ $x = 0; \infty; +a; -a$

$$\begin{aligned} y = f(0) &= \underline{a} \\ y = f(\infty) &= \underline{\infty} \\ y = f(a) &= \underline{a^3 + 2a} \\ y = f(-a) &= \underline{a^3} \end{aligned}$$

4.) $y = \frac{1}{x-a}$ $x = 0, \infty, a, -a,$

$$\begin{aligned} y = f(0) &= \underline{\frac{1}{-a}} \\ y = f(\infty) &= \underline{\frac{1}{\infty - a}} \\ y = f(a) &= \frac{1}{a-a} = \frac{1}{0} \text{ minél ismertebb, } x \neq a \text{ meghatározva.} \\ y = f(-a) &= \underline{\frac{1}{-a-a} = -\frac{1}{2a}} \end{aligned}$$

5.) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $x \neq 1$



x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{3}{-3}$	$\frac{0}{-2}$	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{1}$

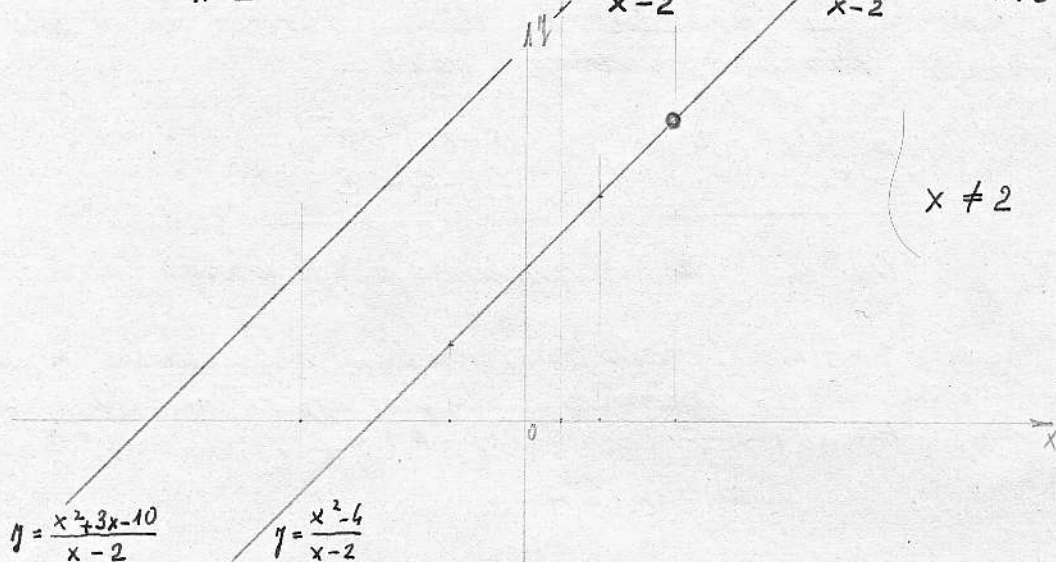
$$\begin{aligned} x = 0,9 \quad f(0,9) &\rightarrow y = 1,9 \\ x = 0,99 \quad f(0,99) &\rightarrow y = 1,99 \\ x = 0,999 \quad f(0,999) &\rightarrow y = 1,999 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 1 -$ (x közeledik 1-hez balról)

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1 + \quad f(1,1) &\rightarrow y = 2,1 \\ f(1,01) &\rightarrow y = 2,01 \\ f(1,001) &\rightarrow y = 2,001 \end{aligned}$$

$$y = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$$

$$y = f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x-2} = \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = x+5$$

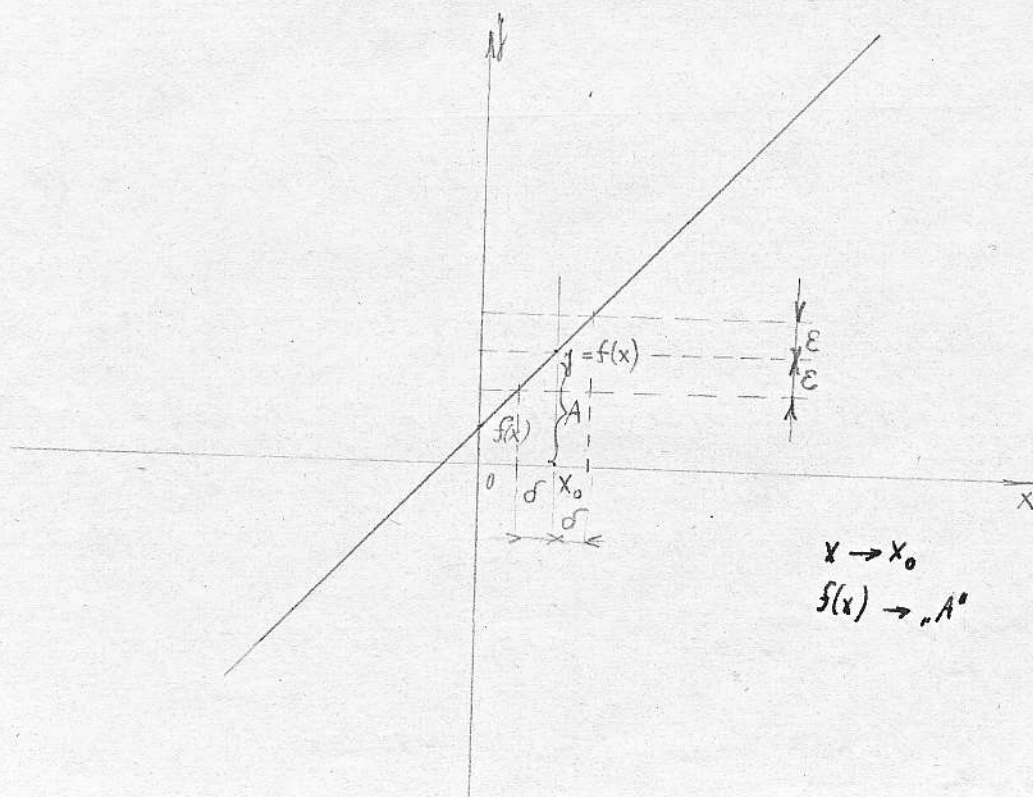


57. óra

1967. XI. 29.

$$y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \quad x \neq 1$$

$$x \rightarrow 1 \text{ akkor } y = f(x) \rightarrow 2$$



$x \rightarrow x_0$ esetén akkor mondjuk hogy az $y = f(x)$ fg. határértéke A , ha x -vel közeledve x_0 felé $f(x)$ -nek A -lól való különbsége tetszőlegesen kicsinnyé válik.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ |f(x) - A| < \varepsilon \end{array}$$

Az $y = f(x)$ fg. az x_0 pontban v. határozott v. nemhat.

Az $y = f(x)$ fg.-nek az x_0 pontban a határértéke A , ha tetszőlegesen ε számhoz találunk egy δ számot úgy, hogy $|x - x_0| < \delta$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$, amit így írunk:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

- I. Összeg határértéke egyenlő az összeadandók határértékének összegével.
- II. Különbség " " a kivételendő és kiv. különbségével " különbségével.
- III. Szorzat " " a szorzóval " szorzattal.
- IV. Tört " " az osztandó és osztó " hányadosszal.
- V. Az állandó határértéke mindig az állandóval egyenlő.

- I. $\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$
- II. $\lim [f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x)$
- III. $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- IV. $\lim [f(x) : g(x)] = \lim f(x) : \lim g(x)$
- V. $\lim konst. = konst.$

$$\lim [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim f(x)$$

$$Pl.: y = f(x) = 3x^2 + 5x + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim (3x^2 + 5x + 6) = \lim 3 \cdot 2^2 + \lim 5 \cdot 2 + \lim 6 = 12 + (-10) + 6 = 8.$$

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim \frac{x^2 + 1}{3x - 2} = \frac{25 + 1}{15 - 2} = \frac{26}{13} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 2x = \lim \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \lim \cos \pi = 0$$

57. Hf.

1967. XI. 29.

Als. a köv. fg. is áll. meg' vállasírók munkái:

$$y = -x^3$$

$$y = \frac{x^3}{10} - 5$$

$$y = x^3 + 6x^2 - 4$$

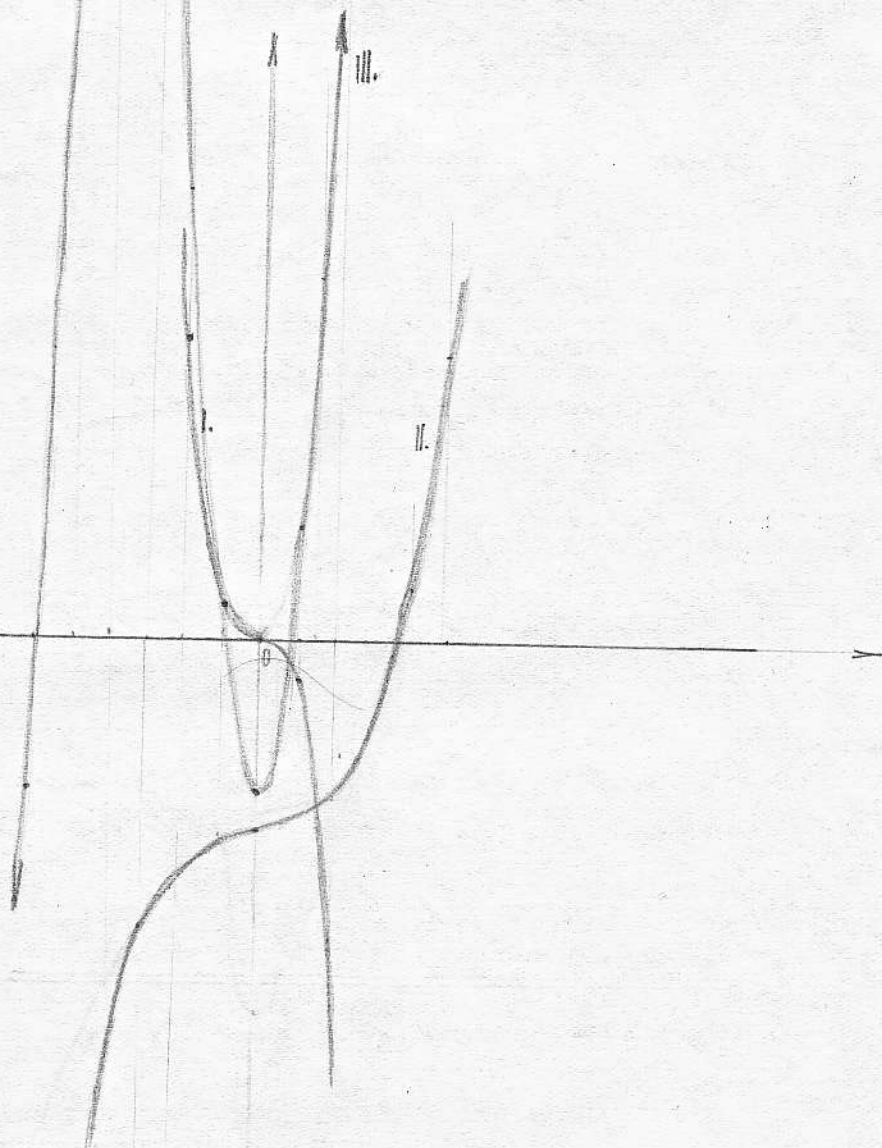
x	-2	-1	0	1	2
y	8	1	0	-1	-8

I.

x	-3	-1	0	2	5	4	-0,5	0,5
y	-7,7	-5,1	-5	-4,2	7,5	1,4	-5	-5

II.

x	-3	-2	-1	0	1	2	-1,5	-8	-6
y	23	12	1	-4	3	28	6	132	-4



$$\lim_{x \rightarrow 0} [(x-4) \sin x + \cos 2x]$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x-4) \cdot \sin x + \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin x - \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \sin x + \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 0 - 0 + 1 \\ &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 180^\circ} \frac{\cos x}{\cotg \frac{x}{4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 180^\circ} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 180^\circ} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 180^\circ} \cotg \frac{x}{4}} = \frac{-1}{1} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$$

$$f = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = \underline{\underline{6}}$$

A f. g. határértéket, ha $x \rightarrow \infty$ a következő
összeírás segítségével állapíthatjuk meg:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x-2) : \lim_{x \rightarrow \infty} 5x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} - 2}{5 \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-2x}{x}}{\frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-2x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{5} = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

58. 24.

1967 XI. 30.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x^2 + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}{5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^2} - 1}{\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2}{5 + 3x - x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - x^2) \cdot x^2}{(5 + 3x - x^2) \cdot x^2} = \frac{2 - 0^2}{5 + 3 \cdot 0 - 0^2} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(30^\circ + \frac{180^\circ}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(30^\circ + \frac{180^\circ}{\frac{1}{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin(30^\circ + 180^\circ \cdot x) = \sin 30^\circ + \lim_{x \rightarrow 0} \sin 180^\circ \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} + 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{2x^2 + 3x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{2\frac{1}{x^2} + 3\frac{1}{x} + 5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - x}{x^2}}{\frac{2 + 3x + 5x^2}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 - x) \cdot x^2}{(2 + 3x + 5x^2) \cdot x^2} = \frac{3 - 0}{2 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

59. dia Gyakalat

1967. XII. 6.

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x^2 + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\frac{1}{x^2} - 1}{5 + 3\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - x^2}{x^2}}{\frac{5x^2 + 3x - 1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2}{5x^2 + 3x - 1} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}} \end{aligned}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-5)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = \underline{\underline{7}}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \frac{2}{x}}{x + \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^2 + 2}{x}}{\frac{x^2 + 5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 5} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

$$4.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a = a$$

$$\begin{aligned} 5.) \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{4m+1}{m} + \frac{2m^2+1}{m^2+1} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \frac{1}{m} + 1}{\frac{1}{m}} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{m^2} + 1}{\frac{1}{m^2} + 1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\frac{4+m}{m}}{\frac{1}{m}} + \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\frac{2+m^2}{m^2}}{\frac{1+m^2}{m^2}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{4+m}{1} + \lim_{m \rightarrow 0} \frac{2+m^2}{1+m^2} = 4 + \frac{2}{1} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{x^2} - \frac{1-2x^2}{2-3x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2\frac{1}{x^2}}{2-3\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x^2}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{2x^2-3}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2}{2x^2-3} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$7.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1+n}{n}} = \frac{1}{1+n} = 1$$

$$8.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{2n^2}{n(1+n^2)} = \frac{2n}{1+n^2} = 0$$

$$\begin{aligned} 9.) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3-5m^2-2m^4}{3-2m^5} &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{3-5\frac{1}{m^2}-2\frac{1}{m^4}}{3-2\frac{1}{m^5}} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\frac{3m^4-5m^2-2}{m^4}}{\frac{3m^5-2}{m^5}} = \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{m(3m^4-5m^2-2)}{3m^5-2} = \frac{0 \cdot (0-0-2)}{0-2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+2n-3n^2+5n^3-2n^5}{1-100n^4-3n^5} &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{4+2\frac{1}{n}-3\frac{1}{n^2}+5\frac{1}{n^3}-2\frac{1}{n^5}}{1-100\frac{1}{n^4}-3\frac{1}{n^5}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{4n^5+2n^4-3n^3+5n^2-2}{n^5}}{\frac{n^5-100n-3}{n^5}} = \frac{0 \dots -2}{0 \dots -3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$11.) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+n} \right)^n = 1^n = 1$$

$$12.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

59 ff.

1967.XII.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n^2}+1}{\frac{1}{n^2}-1} = \frac{\frac{1+m^2}{m^2}}{\frac{1-m^2}{m^2}} = \frac{1+m^2}{1-m^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1} &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2\frac{1}{n^2}+3\frac{1}{n}-1}{3\frac{1}{n^2}-2\frac{1}{n}+1} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2+3n-m^2}{3-2n+n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2+3n-m^2}{3-2n+n^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$13.) \lim_{x \rightarrow -1} \log(3x^2-5x+1) = \log(3+5+1) = \lim_{x \rightarrow -1} \log(9) = \log 9$$

$$14.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x(x^2-3x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} 15.) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x-4}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-4)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+4}{x^2+x+1} = \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

$$16.) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+2)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$17.1 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x - 4) = \underline{8}$$

$$18.1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 + 1}{x + 3} \right) = \frac{-1 + 1}{2} = \underline{0}$$

$$19.1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x(x-2)} = \cancel{f} \frac{(x-2)(x+5)}{x(x-2)} = \underline{\frac{7}{2}}$$

$$20.1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = \underline{3}$$

XII. 7. 60. öca

$$1.) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{32-x^5} = \cancel{f} \frac{2-x}{2^5-x^5} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\uparrow} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2^4 + 2^3x + 2^2x^2 + 2x^3 + x^4}$$

$$(2^5 - x^5) : (2 - x) = 2^4 + 2^3x + 2^2x^2 + 2x^3 + x^4$$

$$\frac{2^5 - 2^4x}{2^4x - x^5}$$

$$\frac{2^4x - 2^3x^2}{+ 2^2x^2 - x^5}$$

$$\vdots$$

$$2.) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{32-x^5} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{16 + 16 + 16 + 16 + 16} = \frac{1}{16 \cdot 5} = \underline{\frac{1}{80}}$$

$$3.) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = \cancel{f} \frac{(2x+3)(2x-3)}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (2x+3) = 3+3 = \underline{6}$$

$$4.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+x}{x} = \underline{1}$$

$$5.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(6x-5)}{(5x-4)(4x-3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(6x-5)}{20x^2 - 16x - 15x + 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(6x-5)}{20x^2 - 31x + 12}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x}}{\frac{20}{x^2} - \frac{31}{x} + 12} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{6-5x}{x^2}}{\frac{20-31x+12x^2}{x^2}} = \frac{6}{20} = \underline{\frac{3}{10}}$$

$$6.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x}{5} = \underline{\frac{1}{5}}$$

$$7.) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$8.) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x^2 + 12x + 7) = -1 + 2 + 12 + 7 = 20$$

$$9.) \lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 3x^2 + 1)^2 = (54 - 27 + 1)^2 = (28)^2 = 784$$

$$10.) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 8}{5x + 2} = \frac{12 - 8}{-10 + 2} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$11.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 3n^2 + 5}{3n^4 - n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^4}}{3 - \frac{1}{n^3} + \frac{6}{n^4}} = \frac{2}{3}$$

$$12.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 3n^2 + 5}{3n^4 - n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^4}{n^4} + \frac{3n^2}{n^4} + \frac{5}{n^4}}{\frac{3n^4}{n^4} - \frac{n}{n^4} + \frac{6}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

60 ff. nimen

1967. XII. 7.

61. ora

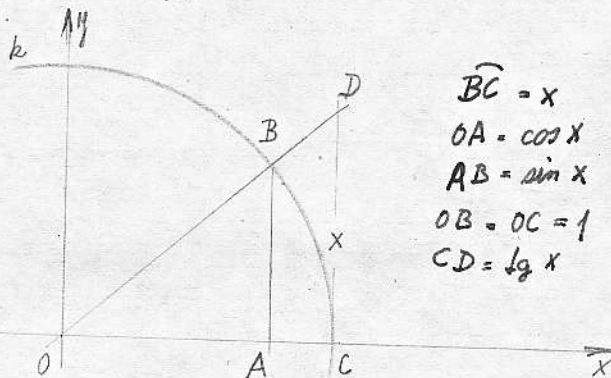
1967. XII. 12.

$$1.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{n^4 - 3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 + n}{n^4}}{\frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$2.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

$$3.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{3x + 2} = \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{2}{x}} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

$$4.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\triangle OAB \text{ feritele } \dots T = \frac{\cos x \cdot \sin x}{2}$$

$$\triangle OCB \text{ feritele } \dots T_1 = \frac{1 \cdot x}{2}$$

$$\triangle OCD \text{ " } \dots T_2 = \frac{1 \cdot \lg x}{2}$$

$$T < T_1 < T_2$$

$$\frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\lg x}{2} \quad \Bigg/ \cdot \frac{2}{\sin x}$$

$$\frac{1 \cdot \cos x \cdot \sin x}{2 \sin x} < \frac{2x}{2 \sin x} < \frac{2 \lg x}{2 \sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\lg x}{\sin x} \quad / \lg x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x / \cos x}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\cos x}{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \end{array} \right\} 1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

for $a > b$ akkor $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\lg x}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 + 1 = 2$$

7. XII. 12.

61. f.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{2 - 3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 5} = \frac{1 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{2 - 3x^2} = \frac{0 - 2}{0 - 3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{x^2} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin x) = 0 + 0 = 0$$

62. oldal

1967. XII.

$$1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{2x}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cdot x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2 \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

termékek Laplace-f. logarithmus alaptörvénye.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= 1 \cdot a^n \cdot b^0 + \frac{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \cdot b^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^0 b^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot n \cdot n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \cdot n \cdot n} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n \cdot \frac{n \dots n}{n \text{ taggal}}} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} = \right. \\ \left. = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} = 2,71828 \dots = e \right. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$e = 2,718281828459$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x \cos h + \sin h \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin h \cos x}{h} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

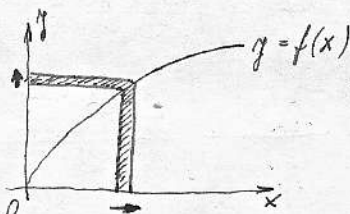
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{3x} - \frac{\lg x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin 2x}{3 \cdot 2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lg x}{x} \right) = \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

A folytonos függvény

Az $y = f(x)$ függvényt akkor nevezzük folytonosnak, ha a függvény vektorai valamely végtelen kis mennyiséggel való eltérőkörön a fg -nek is végtelen kis eltérőkörrel való megközelítést enged meg.

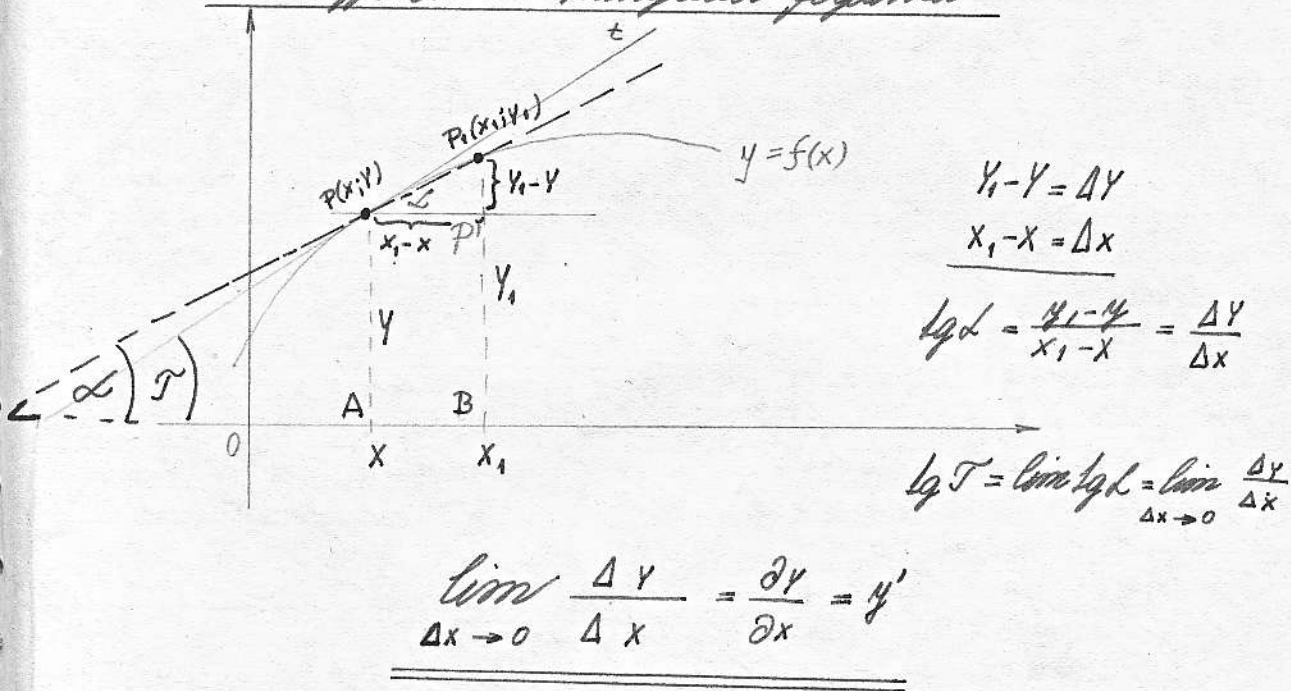
Ha ez a körülmény a vektorai valamely eltérőkörrel minél közelebbre, akkor az $f(x)$ fg -t az "illék" helyen nem folytonosnak, szakadásnak mondjuk.

$$y = f(x) \quad y = \frac{x}{x-a}$$



Ha $a = x$, a fg szakadásos.

A differenciál hányados fogalma



Ha a fg. görbe 2 pontjának koordinátáit ismerjük akkor ezek által némileg jellemzőjük a görbe helyzetét is a 2 pont között ($P; P_1$). Meg tudjuk ui. osztani mondani, hogy az x tengely irányában mit mily kisméretűen a görbe az y tengely irányában milyen mértékben emelkedett v. süllyedt.

A görbe emelkedését ill. süllyedését csak a kérdés is végülreértéke körülbelül és megközelítő körülmények ismerjük pontosan, míg a két pont között a görbe széle, kanyar, mértékelt, mert a 2 pont között valamely görbe-vonal feltehető. Mivelamint az emelkedés a 2 pontot összekötő egyenes-vonalnak, az görbe PP_1 mérőjének az x teng. irányú irányított kétszer 1 hányadosa jellemző:

$$tg \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Mivel kizárható van a P és P_1 pont egyenlősége, amint inkább megérthető, hogy a kérdés emelkedés mint pontosabban jellemző a görbe natúr emelkedését, mert a PP_1 mérő is mindig jobban közelíti a PP_1 irány.

Ha a P_1 pont a görben a P pont felé haladva akkor az közel jutott, hogy abszolút csak a végülreértéke Δx értéke körülbelül egyenlős, és ha a fg. folytonos, akkor az ordináták körülbelül is végülreértéke

húci, Δy , is üg a P is P_1 pontokhoz a görbe egyenlőitől
mért távolsága is végtelen kicsinyre válik.

Ezen a végtelen kis görbe szakaszon az emelkedés
is csak végtelen csekélyen változhat meg is üg a
görbe emelkedését, a most min végtelen
kicsinyre van PP_1 görbe szakasz minden
pontjában megfigyeléssel megadja a hozzá
tartozó PP_1 "szelő" emelkedése.

Ahogy közelodik a P_1 pont a görbe a P -hez,
annak inkább közelodik PP_1 "szelő" helyére
a P ponthoz tartozó érintő helyére, is
 $P_1 = P$ esetén a "szelő" érintő lesz.

Tehát az érintő üg érintőhöz, mint
a P ponton keresztülhaladó "szelő" helyére
határolódik arra az esetre, ha a "szelő" két
metszéspontja egybeesik. Hisz ha a metszéspontok
abszolútjában közelírnak, $\Delta x = 0$.

Így tehát a görbehez P pontjához tartozó
emelkedést az ebben a pontban húzott érintőnek
az x teng. $pm.$ részét alkothat P hajlásszög
jelölése, mely röviden csak egyet mint
a "szelő" hajlásszögének határoltát használhatunk ha
a "szelő" két metszéspontja egybeesik.

Az emelkedés tehát:

$$\lg T = \lim \lg t = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} ;$$

A függőlen változó végtelen kis $x_1 - x = \Delta x$ értékkülönbséget
a függőlen változó növekményének v.
differenciájának,

a $fg.$ végtelen kis $y_1 - y = \Delta y$ értékkülönbséget pedig
a $fg.$ növekményének v.
differenciájának nevezzük.

A $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hányados a különbségi v. differencia hányados.

Ezeknek a végtelen kis növekményekből a határoltát
a változó differenciájának nevezzük.

A függőlen változó differenciáját ∂x ,

a $fg.$ megfelelő " " ∂y -nak jelöljük.

Így a görbe valamely P pontjához tartozó emelkedést
annak a hányadosának a határoltát adja meg,
amelynek számlálóját a $fg.$ -nek növekménye pedig
a függőlen változóinak növekménye, vagyis:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Ezt a határértéket a fg. differenciál
hányadosának nevezzük.

Úmely $Y = f(x)$ fg. differenciál hányadosán
annak a mérsékelt frekvenciájú tangensét
értjük, amelyet a görbe illelő pontjának
húzó érintő az x tengely pozitív részén alkot.

A differenciál-hányados a fg. növekményéből
és a független változó növekményéből álló
hányadosnak a határértéke egyenlő, amikor
a független vált. növekménynek határértéke nulla.

Az $Y = f(x)$ fg. differenciál hányadosának a meghe-
tőssége.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad / \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Kel. meg az $y = ax + b$ differenciál hányadosát.

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$$

$$y + \Delta y = ax + a\Delta x + b$$

$$y + \Delta y = \underline{ax + b} + a\Delta x$$

$$\Delta y = a\Delta x \quad / \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a$$

$$y = x^2$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = -y + x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = (\Delta x)^2 + 2x\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

$$\underline{y' = 2x}$$

$$y = x^2 + 2x + 1$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 1$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2\Delta x \cdot x + 2x + 2\Delta x + 1 + \Delta x^2$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x + 2x\Delta x + 2\Delta x + 1 + \Delta x^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + 2\Delta x + \Delta x^2 \quad / \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 2 + \Delta x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + 2 + \Delta x = 2x + 2$$

$$\underline{y' = 2x + 2}$$

$$y = 2x^2 + 3x + 4$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 4$$

$$y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 4$$

$$\Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 4 - y$$

$$\Delta y = 4x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x \quad / \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + \Delta x + 3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x + \Delta x + 3 = 4x + 3$$

$$\underline{y' = 4x + 3}$$

$$y = 4x^2 \quad y = \frac{1}{x} \quad y = 2x^3$$

$$\begin{aligned} 1. \quad y + \Delta y &= 4(x + \Delta x)^2 \\ y + \Delta y &= 4x^2 + 8x \cdot \Delta x + \Delta x^2 \\ \Delta y &= 8x \cdot \Delta x + \Delta x^2 \quad / : \Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 8x + \Delta x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 8x + \Delta x = 8x$$

$$y' = 8x^2$$

$$\begin{aligned} 2. \quad y + \Delta y &= \frac{1}{x + \Delta x} \\ \Delta y &= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \\ \Delta y &= \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} \\ \Delta y &= \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \quad / : \Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-1}{x(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + x \Delta x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad y &= 2x^3 \\ y + \Delta y &= 2(x + \Delta x)^3 \\ y + \Delta y &= 2(x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) \\ y + \Delta y &= 2x^3 + 6x^2 \Delta x + 6x \Delta x^2 + 2\Delta x^3 \\ \Delta y &= 6x^2 \Delta x + 6x \Delta x^2 + 2\Delta x^3 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 6x^2 + 6x \Delta x + 2(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x^2 + 6x \Delta x + 2(\Delta x)^2 = 6x^2$$

$$y' = 6x^2$$

1967. XII. 19.

1968. I. 3.

66 ó. a diff. hány. geom. jelentősége
(67. óra)

$$1.) \quad y = 3x^2 + 5x - 8 \quad y' = 6x + 5$$

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 8$$

$$y + \Delta y = \underline{3x^2} + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \underline{5x} + 5\Delta x - 8$$

$$\Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 5\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x + 5$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + 3\Delta x + 5 = \underline{6x + 5} = y'$$

$$2.) \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \quad x = 3$$

$$\Delta y + y = \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 3$$

$$\Delta y + y = \underline{\frac{1}{2}x^2} + x\Delta x + \Delta x^2 - \underline{2x} - 2\Delta x + \underline{3}$$

$$\Delta y = x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x + \Delta x - 2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x + \Delta x - 2 = x - 2$$

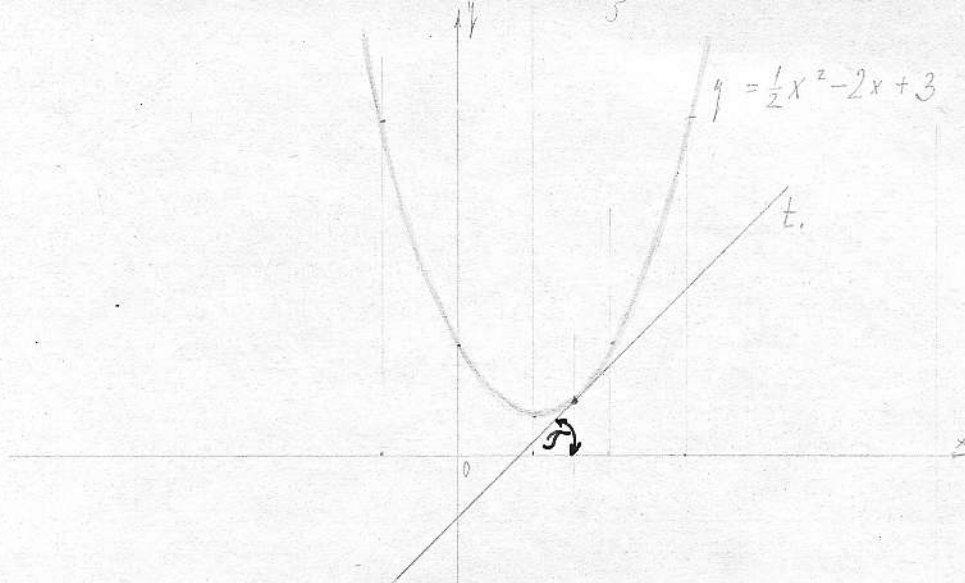
$$y' = x - 2 \quad / \quad (x = 3)$$

$$y' = 3 - 2$$

$$\underline{y' = 1} = \lg T$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

x	-2	-0	3	4					
y	9	3	1,5	3					



67. óra

1968.1.

3.) $y = \pi x$

$$y + \Delta y = \pi(x + \Delta x) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \pi = \pi$$

$$y + \Delta y = \pi x + \Delta x \pi$$

$$\Delta y = \Delta x \pi$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pi$$

$$\underline{y' = \pi}$$

4.) $y = x^2 - x \quad y' = 2x - 1$

$$\left(\begin{aligned} y + \Delta y &= 2x + 2\Delta x - 1 \\ \Delta y &= 2\Delta x \end{aligned} \quad \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y = \underline{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2} - \underline{x - \Delta x}$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 - \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 1 + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{2x - 1}$$

$$6_7 \quad s = \frac{g t^2}{2}$$

$$s + \Delta s = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2$$

$$\underline{s + \Delta s} = \underline{\frac{g}{2} t^2} + \frac{g}{2} \cdot 2 t \Delta t + \frac{g}{2} \Delta t^2$$

$$\Delta s = g t \cdot \Delta t + \frac{g}{2} \Delta t^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = g t + \frac{g}{2} \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g t + \frac{g}{2} \Delta t \right) = \underline{\underline{g t = v}}$$

1. 1968.

68. óra

A differenciál számítás alapozásai

1,

$$y = 2x^2 + x + 1 \quad y' = 4x + 1$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + x + \Delta x + 1$$

$$\underline{y + \Delta y} = \underline{2x^2} + 4x \Delta x + 2 \Delta x^2 + \underline{x + \Delta x + 1}$$

$$\Delta y = 4x \Delta x + 2 \Delta x^2 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2 \Delta x + 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\underline{4x + 1 = y'}}$$

2,

$$y = \frac{5}{2}x$$

$$y + \Delta y = \frac{5}{2}(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \frac{5}{2}\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = y'$$

3,

$$y = x$$

$$y + \Delta y = x + \Delta x$$

$$\Delta y = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 = y'$$

4,

$$y = ax$$

$$y + \Delta y = ax + a\Delta x$$

$$\Delta y = a\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a = y'$$

5,

$$y = 2x^2 + 3x + 6$$

$$y' = 4x + 3$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 6$$

$$y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 6$$

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 3 + 2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 3 = y'$$

$$6.) \quad y = 2x^3 - 6$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 - 6$$

$$y + \Delta y = 2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - 6$$

$$\underline{y + \Delta y = 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 - 6}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{6x^2} = y'$$

$$7.) \quad y = \sqrt{x}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \quad y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{x + \Delta x - x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$(x + \Delta x - x) : [\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}] = \sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$$

$$(A^2 - B^2) : (A - B) = (A + B)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = y'$$

1. Ar állandó diff. hányadosa

$$y = k \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad f(x) = k \quad f(x + \Delta x) = k$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Ar állandó differenciál hányadosa nulla.

$$y = f(x) = 15 \quad y' = 0$$

$$y = \pi^5 \quad y' = 0$$

Az az eljárás, melynek segítségével mely függvény differenciál hányadosát meghatározzuk diff. számításnak nevezzük.

Képezzük meg az $y = x^m$ fg. differenciál hányadosát, 70-69.ó.
ahol m term. szám. 1968.1.5.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^m - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^m - x^m \quad / : \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{(x + \Delta x) - x}$$

$$\begin{aligned} a^m - b^m &= (a - b)(a^{m-1}b^0 + a^{m-2}b^1 + \\ &+ a^{m-3}b^2 + a^{m-4}b^3 + \dots + \\ &+ \dots + a^2b^{m-3} + a^1b^{m-2} + ab^{m-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= x + \Delta x \\ b &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + \Delta x)^m - x^m &= (x + \Delta x - x) \left[(x + \Delta x)^{m-1} + (x + \Delta x)^{m-2} \cdot x + \dots + \right. \\ &+ (x + \Delta x)^{m-3} \cdot x^2 + \dots + \\ &\left. + (x + \Delta x)^2 \cdot x^{m-3} + (x + \Delta x) \cdot x^{m-2} + x^{m-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \left[(x + \Delta x)^{m-1} + (x + \Delta x)^{m-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{m-3} \cdot x^2 + \dots + \right. \\ &\left. + \dots + (x + \Delta x)^2 \cdot x^{m-3} + (x + \Delta x) \cdot x^{m-2} + x^{m-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[(x + \Delta x)^{m-1} + (x + \Delta x)^{m-2} \cdot x + \dots + (x + \Delta x) \cdot x^{m-2} + x^{m-1} \right] = \\ &= x^{m-1} + x^{m-1} + x^{m-1} + \dots + x^{m-1} + x^{m-1} = \\ &= n \cdot x^{m-1} \end{aligned}$$

$$f = x^m$$

$$f' = m x^{m-1}$$

A hatvány differenciál hányadosát meghatároztuk, ha a kitevővel megszorozzuk az alapokat 1-gyel kisebb kitevőre emelt hatványát.

$$y = x^7 \quad y' = 7x^6$$

$$y = x^{a+b} \quad y' = (a+b)x^{a+b-1}$$

A hatvány differenciálási szabálya negatív kitevőre,
"váltakozó" hatványokra, gyökműveletekre is érvényes.

$$y = x^{-10} \quad y' = -10x^{-11}$$

$$y = x^{-6} \quad y' = -6x^{-7}$$

$$y = x^{\frac{5}{2}} \quad y' = \frac{5}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt[2]{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = x^{-\frac{5}{4}} \quad y' = -\frac{5}{4} \cdot x^{-\frac{9}{4}} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{9}{4}}} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt[4]{x}} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt[4]{x}}$$

II. Határozzuk meg az $y = a \cdot x^m$ fg differenciál hányadosát.
(Az állandó tényezővel szorozz hatvány)

$$y = ax^m$$

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot m \cdot x^{m-1}$$

$$\underline{\underline{y' = a \cdot m \cdot x^{m-1}}}$$

Állandó tényező a differenciálásiál változatlan marad.

$$y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} = 3 \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y = \pi x^2$$

$$y' = 2\pi x$$

$$y = 7,8 \cdot x^{\frac{1}{2}} ; y' = 7,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 3,9 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3,9}{\sqrt{x}}$$

Összeg és különbség diff. függvényeinek megkalk.

IV.

$$y = f(x) \pm g(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \pm g(x + \Delta x) - g(x) \quad / \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \underline{\underline{f'(x) \pm g'(x) = y' \quad y = f(x) \pm g(x)}}$$

Összeg (különbség) diff. függvényeként megkapjuk, ha az egyes tagok diff. függvényeként ismeradjuk (kiegérjük).

A fenti törvényszerű összeadandókra (+) érvényes.

$$y = 3x^2 + 5x - 8 \quad y' = 6x + 5$$

$$y = 3x^2 - 5x \quad y' = 6x - 5$$

$$y = \frac{5}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 7 = 5 \cdot x^{-3} - 3 \cdot x^{-2} + 2x^{-1} - 7 \cdot x^0 = 5 \cdot (-3)x^{-4} - 3 \cdot (-2)x^{-3} + 2 \cdot (-1)x^{-2} - 7 \cdot 0 = -15x^{-4} + 6x^{-3} - 2x^{-2}$$

$$y' = -\frac{15}{x^4} + \frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 \cdot \frac{1}{2} + x - 4 \quad y' = x^2 + x + 1$$

V. Általános differenciál képlet

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \quad | + -f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x + \Delta x) \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)] + f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x + \Delta x) \cdot \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + f(x) \cdot \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ g(x + \Delta x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$\underline{y' = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)} \quad y = f(x) \cdot g(x)$$

A két függvény szorzatának diff. képletét megkapjuk,
ha mindkét függvénynek diff. képletét a másik
függvényrel megszorozzuk és a szorzatot összeadjuk.
E képlet előnyös 3 és több tényező esetén is.

$$y = 3x^2 \cdot 5x^3 \quad y' = 3x^2 \cdot 15x^2 + 5x^3 \cdot 6x = 45x^4 + 30x^4 = 75x^4$$

$$y' = 75x^4$$

$$\underline{y' = u'v + uv'}$$

$$1.) y = (2x-5)(4x^2+2x-3)$$

$$2.) y = (3x+4)(9x^3+3x^2-4x+5)$$

1.)

$$y' = f(x) \cdot g(x)' + g(x) \cdot f(x)'$$

$$y' = (2x-5) \cdot (8x+2) + (4x^2+2x-3)(2) = 16x^2 - 40x + 4x - 10 + 8x^2 + 4x - 6$$

$$y' = 16x^2 + 8x^2 - 40x + 4x + 4x - 10 - 6 = \underline{24x^2 - 32x - 16 = y'}$$

$$2.) y' = (3x+4)(27x^2+6x-4) + (3) \cdot (9x^3+3x^2-4x+5) =$$

$$= \underline{81x^3 + 108x^2 + 18x^2 + 24x - 12x - 16 + 27x^3 + 9x^2 - 12x + 15 =}$$

$$y' = \underline{108x^3 + 135x^2 - 1}$$

71. óra

1968. I. 9.

$$y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$$

$$y = (3x+5)/(5x-7)$$

$$y = (2x^2+3x-7)/(6x^2+5)$$

$$y = (2x+5)/(3x-3)(4x-1)$$

$$1.) y = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{4+9}{6}} = x^{\frac{13}{6}} \quad y' = \frac{13}{6} x^{\frac{7}{6}}$$

$$2.) y = (3x+5)(5x-7) \quad y' = 3(5x-7) + 5(3x+5) = 15x - 21 + 15x + 25$$

$$y' = 30x + 4$$

$$3.) y = (2x^2+3x-7)(6x^2+5) \quad y' = (4x+3)(6x^2+5) + (2x^2+3x-7) \cdot 12x$$

$$y' = \underline{24x^3 + 18x^2 + 20x + 15 + 24x^3 + 36x^2 - 84x =}$$

$$y' = 48x^3 + 54x^2 - 64x + 15$$

$$4.) y = (2x+5)/[(3x-3)(4x-1)] = (2x+5)/(12x^2-15x+3)$$

$$y' = 2(12x^2-15x+3) + (24x-15)/(2x+5)$$

$$y' = \underline{24x^2 - 30x + 6 + 48x^2 - 30x + 120x - 75 =}$$

$$y' = 72x^2 + 60x - 69$$

$$v. y' = A' \cdot B \cdot C + B' \cdot A \cdot C + C' \cdot A \cdot B$$

$$y = \left(\frac{3}{5} \sqrt[3]{x^7}\right) \cdot (3x^4 - 4x)$$

$$y' = \left(\frac{3}{5} x^{\frac{7}{3}}\right)' (3x^4 - 4x) + \left(\frac{3}{5} x^{\frac{7}{3}}\right) \cdot (3x^4 - 4x)'$$

$$y' = \frac{7}{5} x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{x^2} - 8x \sqrt[3]{x^2}$$

$$y = x \cdot \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$y = x^3 - 7x + 6$$

$$y' = 3x^2 - 7$$

$$y = 5x^3 \cdot 4x^7$$

$$y' = 200x^9$$

$$y = 8x^4 \cdot (-3x^6)$$

$$y' = -240x^9$$

Több differenciál hányadosa

VI.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y + \Delta y = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x + \Delta x) - f(x)g'(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x) \cdot f(x + \Delta x) - g(x) \cdot f(x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x) \cdot \Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \cdot \frac{g(x) \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)] - f(x) [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)} \cdot \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$y' = \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)]$$

$$y' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Több (hányados) differenciál hányadosát megkaphatjuk, ha a számlálót, osztótól külön-külön differenciáljuk, megosztva a nevezővel, és sorozatból képezzük a nevező (oszló) differenciál hányadosát, megosztva a számlálót, és külön-külön elosztjuk a nev. nevezővel.

$$y = \frac{2x^5 - 3x^3 + 5x}{6x^2 - 4} \quad y' = \frac{(10x^4 - 9x^2 + 5)}{(6x^2 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{(2x^5 - 3x^3 + 5x)'(6x^2 - 4) - (6x^2 - 4)'(2x^5 - 3x^3 + 5x)}{(6x^2 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{(10x^4 - 9x^2 + 5)(6x^2 - 4) - 12x(2x^5 - 3x^3 + 5x)}{(6x^2 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{60x^6 - 54x^4 + 30x^2 - 40x^4 + 36x^2 - 20 - 124x^6 + 36x^4 - 60x^2}{(6x^2 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{36x^6 - 58x^4 + 6x^2 - 20}{36x^4 - 48x^2 + 16} = \frac{6x^2(6x^4 + 1) - 4(14.5x^4 + 5)}{(6x^2 - 4)^2}$$

$$y = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$y = \frac{a + bx}{a - bx}$$

73. y

1968. I. II.

$$y = \frac{x^2}{3-x}$$

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 5}$$

$$1, y' = \frac{1'[x(x+1)] - [x(x+1)]' \cdot 1}{(x^2 + x)^2} = -\frac{(x^2 + x)'}{(x^2 + x)^2} = -\frac{2x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$$

$$2, y' = \frac{x'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$3, y' = \frac{(a + bx)'(a - bx) - (a - bx)'(a + bx)}{(a - bx)^2} = \frac{b(a - bx) + b(a + bx)}{(a - bx)^2} = \frac{ab - b^2x + ab + b^2x}{(a - bx)^2} = \frac{2ab}{(a - bx)^2}$$

$$4, y' = \frac{(x^3)'(3-x) - (3-x)' \cdot x^3}{(3-x)^2} = \frac{3x^2(3-x) + 1 \cdot x^3}{(3-x)^2} = \frac{9x^2 - 3x^3 + x^3}{(3-x)^2} = \frac{9x^2 - 2x^3}{9 - 6x + x^2}$$

$$5, y' = \frac{(x^2 - 2x + 3)'(x^2 + 5) - (x^2 + 5)'(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 + 5)^2} = \frac{(2x - 2)(x^2 + 5) - 2x(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 + 5)^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 + 10x - 10 - 2x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 5)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 4x - 10}{x^4 + 10x^2 + 25}$$

8. 1. 18.

78. óra

dolgozat.

79. ó. gyakorlat.

9. 1. 23.

80. óra. a 2. dolgozat javítása.

1. 24.

81. óra.

9. 1. 25.

82. óra

Összetett függvények deriválása

Összetett függvények pl.:

$$y = (3x^2 + 7x - 10)^{\frac{3}{4}}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3}$$

$$y = f[p(x)]$$

$$y = f u \text{ ha } u = p(x)$$

$$\underline{\underline{y' = f'(u) \cdot p'(x)}}$$

Pl.: 1, $y = (x^2 - 3)^2 \quad / x^2 - 3 = u$

$$y^0 = u^2$$

$$y' = \underbrace{f'(u)}_{2u} \cdot \underbrace{p'(x)}_{2x}$$

$$y' = 2(x^2 - 3) \cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 - 12x}}$$

2, $y = (x^3 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}} \quad / (x^3 - 2x + 1) = u$

$$y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{x^3 - 2x + 1}}$$

3, $y = (2x^3 + 3)^2 \quad / (2x^3 + 3) = t$

$$y' = (t^2)' \cdot (2x^3 + 3)'$$

$$y' = 2t \cdot 6x^2 = (4x^3 + 6) \cdot 6x^2 = \underline{\underline{24x^5 + 36x^2}}$$

$$4, \quad y = (1-x)^3 \quad / (1-x) = u$$

$$y' = 3u^2 \cdot (-1)$$

$$y' = 3(1-x)^2 \cdot (-1)$$

$$y' = -3(1-2x+x^2) = \underline{\underline{-3x^2+6x-3}}$$

$$y = (A^a)^b = (\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^a)^b$$

$$y' = (A^b \cdot \overbrace{A^b \cdot \dots \cdot A^b}^a)$$

$$y' = (A^b)' \cdot (\overbrace{A^b}^{a-1} + \dots + \overbrace{A^b}^1)$$

$$y' = b \cdot A^{b-1} \cdot (\overbrace{A^b}^{a-1} + \dots + \overbrace{A^b}^1)$$

$$y' = a \cdot b \cdot A^{b-1} \cdot (\overbrace{A^b}^{a-1} + \dots + \overbrace{A^b}^1)$$

$$y' = b \cdot A^{b-1} \cdot a (\overbrace{A^b}^{a-1} + \dots + \overbrace{A^b}^1)$$

83. 28

1968.127

$$y = (1+x^2)^5 \quad y' = 5 \cdot (1+x)^5 \cdot 2x = 10x (1 + 5x^0 + 5 \cdot 1^4 x^1 + 10 \cdot 1^3 x^2 + 10 x^3 1^2 + 5 \cdot 1^1 x^4 + x^5)$$

$$y' = \underline{\underline{10x + 50x^2 + 100x^3 + 100x^4 + 50x^5 + 10x^6}}$$

$$y = (x^3-1)^{20} \quad y' = 20 \cdot (x^3-1)^{19} \cdot 3x^2 = 60x^2 (1 \cdot x^{3 \cdot 19} - 1^0 - 19x^{3 \cdot 18} + 171x^{3 \cdot 17} - 969x^{3 \cdot 16} + 3876x^{3 \cdot 15} - 11628x^{3 \cdot 14} + 27132x^{3 \cdot 13} - 50388x^{3 \cdot 12} + 75582x^{3 \cdot 11} - 92378x^{3 \cdot 10} + 92378x^{3 \cdot 9} - 75582x^{3 \cdot 8} + 50388x^{3 \cdot 7} - 27132x^{3 \cdot 6} + 11628x^{3 \cdot 5} - 3876x^{3 \cdot 4} + 969x^{3 \cdot 3} - 171x^{3 \cdot 2} + 19x^{3 \cdot 1} - 1x^{3 \cdot 0})$$

$$y' = \underline{\underline{60x^{59} - 1140x^{56} + 10260x^{53} - 58140x^{50} + 23256x^{47} - 697680x^{44} + 1627960x^{41} - 3023280x^{38} + 4534920x^{35} - 5542680x^{32} + 5542680x^{29} - 4534920x^{26} + 3023280x^{23} - 1627960x^{20} + 697680x^{17} - 23256x^{14} + 58140x^{11} - 10260x^8 + 1140x^5 - 60x^2}}$$

$$y = \sqrt{1+x^3} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = y'}}$$

$$y = \sqrt[3]{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3} (1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} = y'}}$$

$$y = (1+x^2)^5$$

$$y = (x^3-1)^{20}$$

$$y = \sqrt{1+x^3}$$

$$y = \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$y = \frac{a^2+x^2}{x}$$

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{(a+x)^3}$$

$$y = (2x-1)^2(3x+1)$$

$$y = \frac{a^2+x^2}{x} \quad y' = \frac{(a^2+x^2)' \cdot x - x' \cdot (a^2+x^2)}{x^2}$$

$$y' = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (a^2+x^2)}{x^2} = \frac{2x^2 - a^2 - x^2}{x^2}$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{x^2 - a^2}{x^2}}}$$

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{(a+x)^3} = \frac{2}{3} (a+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \left(\frac{2}{3}\right)' \cdot (a+x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \left[(a+x)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \sqrt{a+x}$$

$$\underline{\underline{y' = \sqrt{a+x}}}$$

$$y = (2x-1)^2(3x+1)$$

$$y' = [(2x-1)^2]'(3x+1) + (3x+1)'(2x-1)^2$$

$$y' = 2(2x-1) \cdot 2(3x+1) + 3(2x-1)^2$$

$$y' = 4(6x^2-x-1) + 3(4x^2-4x+1)$$

$$y' = 24x^2-4x-4 + 12x^2-12x+3$$

$$\underline{\underline{y' = 36x^2-16x-1}}$$

Trigonometriaal függvények
diff. képletének.

1968. II. 6.

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x \quad | \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \quad \left| \begin{array}{l} \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \alpha = x + \Delta x \quad \beta = x \end{array} \right.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \\ \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \end{array} \right.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \cos x$$

$$\underline{\underline{y = \sin x \quad y' = \cos x}}$$

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \quad \left| \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1$$

$$\underline{\underline{y = \cos x \quad y' = -\sin x}}$$

$$y = \lg x$$

$$\begin{aligned} y' &= (\lg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \right)' = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}' = \\ &= \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \frac{\cos' x}{\cos^2 x} = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \\ &= 1 + \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{1 - \lg^2 x}} \\ &= \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y = \lg x \quad y' = 1 - \lg^2 x \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}}}$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \left(\frac{\cos x' \cdot \sin x - \sin x' \cdot \cos x}{\sin^2 x} \right) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \underline{\underline{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sin^2 x}}} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y = \operatorname{ctg} x \quad y' = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}}}$$

$$1, \quad y = 2 \cdot \sin x$$

$$y' = 2 \cdot \sin x' = 2 \cos x$$

$$2, \quad y = 5 \cdot \sin x - 7 \cos x$$

$$y' = 5 \cos x + 7 \sin x$$

$$3, \quad y = \sin x : x$$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\sin x' \cdot x - x' \cdot \sin x}{x^2} = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$4, \quad y = \frac{\sin x + \cos x}{\lg x} = \frac{\sin x}{\lg x} + \frac{\cos x}{\lg x} = \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x \cdot \sin x}{\sin x} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\sin x}$$

$$y' = \cos x' + (\cos x \operatorname{ctg} x)' = -\sin x + \cos x' \cdot \lg x + \lg x' \cdot \cos x$$

$$y' = -\sin x + \lg x \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = -\sin x - \frac{\sin x \cdot \sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = -\sin x + \frac{-\sin^2 x + 1}{\cos x} = -\sin x + \cos x$$

$$y' = \underline{\cos x - \sin x}$$

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\lg x}$$

84. *ff.*

1968. II. 6.

$$y = x \cdot \sin x$$

$$y = \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$$

$$y = \sin x + 2 \cdot \cos x$$

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \frac{1}{\sin x}$$

$$y = x \cdot \sin x$$

$$y' = x \cdot \sin x' + x' \cdot \sin x = x \cdot \cos x + \sin x = \underline{y'}$$

$$y = \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$$

$$y' = \frac{(\sin x \cdot \cos x)' \cdot x - x'(\sin x \cdot \cos x)}{x^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x' \cdot \cos x + \cos x' \cdot \sin x) \cdot x - \sin x \cdot \cos x}{x^2}$$

$$y' = \frac{x \cdot \cos^2 x + -\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x}{x^2}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$$

$$y = \sin x + 2 \cos x$$

$$y' = \cos x + 2(-\sin x) = \cos x - 2 \sin x = \underline{y'}$$

$$y = \frac{1}{\cos x}; y' = \frac{\cos x'}{(\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{\lg x}{\cos x} = \underline{y'}$$

$$y = \frac{1}{\sin x}$$

$$y' = \frac{\sin x'}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cot x}{\sin x} = \underline{y'}$$

$$1.) \quad y = \lg x - x$$

$$y' = 1 + \lg^2 x - 1 = \lg^2 x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \lg^2 x$$

$$2.) \quad y = \sin x + \sin x + \cos x = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$y' = \frac{-\sin x'(\sin x + \cos x) - \sin x(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{+\cos x(\cos x - \sin x) - \cos x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{-\cos x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{+\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} = \frac{1}{1 + 2\sin x \cos x} = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

$$3.) \quad \text{Hát. meg az } y = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sin x} \text{ f. diff. hányadosát az } x = \frac{\pi}{2} \text{ (90°) pontban.}$$

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sin x} = \frac{(x-1)^2}{\sin x}$$

$$y' = \frac{[(x-1)^2]' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot (x-1)^2}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2(x-1) \cdot 1 \cdot \sin x - \cos x \cdot (x^2 - 2x + 1)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2x \sin x - 2 \sin x - x^2 \cos x + 2x \cos x - \cos x}{\sin^2 x} ;$$

$$y'_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 1 - \frac{\pi^2}{4} \cdot 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0}{1} =$$

$$= \underline{\underline{\pi - 2}}$$

$$4.) \quad y = \frac{\lg x}{x^2 - 1} \quad y'_{x=0} ?$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\lg x' \cdot (x^2 - 1) - (x^2 - 1)' \cdot \lg x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(1 + \lg^2 x) \cdot 2x - 2x \cdot \lg x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x + 2x \cdot \lg^2 x - 2x \lg x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \lg^2 x - 2 \cdot 0 \lg x}{(-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.) \quad y &= \frac{\sin x}{1 - \sin x} \quad y' = \frac{\sin x' \cdot (1 - \sin x) - (1 - \sin x)' \cdot \sin x}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \\ &= \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x - 2 \sin x} = \\ &= \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x - 2 \sin x} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.) \quad y &= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad y' = \frac{(1 - \cos x)' \cdot (1 + \cos x) - (1 + \cos x)' \cdot (1 - \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x + \sin x \cdot \cos x + \sin x - \sin x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

1,

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{1 - 2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{-2}{1 - \sin 2x}$$

2,

$$y = x^m \sin x$$

$$y' = (x^m)' \sin x + (\sin x)' x^m = m x^{m-1} \sin x + \cos x \cdot x^m$$

$$y' = m x^{m-1} \sin x + \cos x x^m = x^{m-1} (m \sin x + x \cos x) = y'$$

3,

$$y = x^m \lg x$$

$$y' = (x^m)' \lg x + (\lg x)' x^m = m x^{m-1} \lg x + x^m (1 + \lg^2 x)$$

4,

$$y = \frac{\lg x}{x}$$

$$y' = \frac{(\lg x)' x - (x)' \lg x}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{x^2}{1}}$$

$$y' = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cdot \cos^2 x}$$

5,

$$y = \sin^2 x - \sin x = \sin x (\sin x - 1)$$

$$y' = \sin x' (\sin x - 1) + (\sin x - 1)' \sin x = \cos x (\sin x - 1) + \cos x \cdot \sin x$$

$$y' = \cos x \sin x - \cos x + \cos x \sin x = (2 \cos x \sin x - \cos x) = \underline{\underline{-\cos x}}$$

$$y = \sin 2x$$

$$y = \sin u$$

$$y = f[u(x)] \quad / u = 2x$$

$$y' = 1 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = 2 \cos u$$

$$y' = 2 \cos 2x$$

86 ff.

1968. II. 8

$$y = \sin x^2$$

$$y = \sin^3 x$$

$$y = \cos x^3$$

$$y = \sin^3 x + 3 \cos x$$

$$y' = \cos x^2$$

$$y' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$y' = -\sin x^3$$

$$y' = 3(\sin^2 x) \cdot \cos x + 3 \cdot (-\sin x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \sin x$$

87. ora

1968. II. 9

$$1. y = 5 \cdot \lg(1-x^2) \quad \cos(1-x^2) \neq 0$$

$$y' = 5 \cdot (\lg(1-x^2))' = 5 \cdot \frac{1}{\cos^2(1-x^2)} = 5 \cdot \frac{1}{\cos^2(1-x^2)} \cdot (1-x^2)' =$$

$$= 5 \cdot (-2x) : (\cos^2(1-x^2)) = -\frac{10x}{\cos^2(1-x^2)}$$

$$2. y = \lg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \quad \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \neq 0 \quad x \neq 2k\pi\right]$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)}$$

$$3. y = \frac{\sin x}{1 - \sin x} \quad [1 - \sin x \neq 0]$$

$$y' = \frac{(\sin x)' \cdot (1 - \sin x) - \sin x \cdot (1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x(1 - \sin x) - \sin x \cdot (-\cos x)}{1 - 2 \sin x + \sin^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos x - \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x}{1 - 2 \sin x + \sin^2 x} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

4,

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$y' = \frac{\sin x' \cdot (\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)' \cdot \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x (\sin x + \cos x) - (\cos x + (-\sin x)) \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

5,

$$y = \lg x - x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \lg^2 x$$

6,

$$y = \lg x + \frac{1}{3} \lg^3 x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \lg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\lg^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\lg^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \lg^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^4 x}$$

7,

$$y = \frac{\lg x + 1}{\lg x - 1}$$

$$y' = \frac{(\lg x + 1)'(\lg x - 1) - (\lg x - 1)'(\lg x + 1)}{(\lg x - 1)^2} = \frac{\frac{\lg x - 1}{\cos^2 x} - \frac{\lg x + 1}{\cos^2 x}}{(\lg x - 1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\lg x - 1 - \lg x - 1}{\cos^2 x}}{(\lg x - 1)^2} = - \frac{2}{\cos^2 x (\lg x - 1)^2} = - \frac{2}{\cos^2 x \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} \right)^2} =$$

$$= - \frac{2}{\sin x^2 - 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x} = - \frac{2}{1 - \sin 2x}$$

Örnekleli függvény d.b.

$$y = f(p(x))$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Magasabb diff. hányadosok.

Ha $y = f(x)$ fg. diff. hányadosa általában nem ismét
kalkulációs az x függősen változik és így amint az előbbi
változtatja az értéket, vele kapcsolatban megváltozik a
diff. hányados értéke is. Vagyis smely. fg. diff. hányadosa
általában ismét az x függvénye. Így tehát az x szerint
újra differenciálható. Így minden a fg. 2. diff. h.-át
nyerjük.

Pé. in: fel az $y = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ fg.
első diff. hányadosait:

$$y' = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 8x + 5$$

$$y'' = 20x^3 + 24x^2 + 18x + 8$$

$$y''' = 60x^2 + 48x + 18$$

$$y^{(4)} = 120x + 48$$

$$y^{(5)} = 120$$

$$y^{(6)} = 0$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

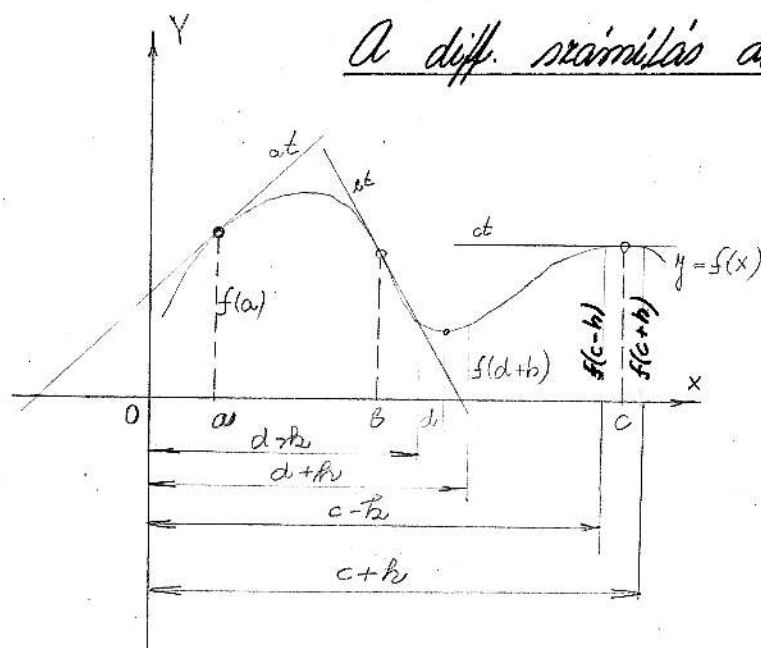
$$y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$y^{(5)} = \cos x$$

A diff. számítás alkalmazása

88 óra 1968. II. 11.



$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x)$$

ha $y'_a > 0$ a függő növekszik

$y' = f'(a) > 0$ - emelkedés

ha $y'_c < 0$ - a f. csökken

$y' = f'(c) < 0$ - csökkenés

ha $y'_c = 0$ - a f. szélső értéke

$y' = f'(c) = 0$ - extrém.

$y' = f'(d) = 0$ - extrém.

$$f(c-h) < f(c) + 0-$$

$$f(d-h) > f(d) - 0+$$

$$f(c+h) < f(c)$$

$$f(d+h) > f(d)$$

$$f(c \pm h) < f(c)$$

$$f(d \pm h) > f(d)$$

a fg. maximuma

a fg. minimuma

A dif. számítás mely fg. monotonitás vizsgálatánál és a fg. szélső értékeinek meghatározásánál alkalmazandó. Ahol az $y=f(x)$ fg. első dif. hányadosa pozitív, a fg. értéke növekszik, a görbe emelkedik. Ahol ez a dif. b. negatív, a fg. értéke csökken, a görbe aláesik; ahol a dif. b. eléri a $y'=0$, a fg.-nek szélső értéke van és pedig akkorint, amint a dif. hányados a pozitív értékektől a nullához, át a negatív értékektől, tehát a görbe az emelkedéstől az aláesés felé megát, legrosszabb, maximális értéke van.

Ha pedig a dif. hányados a negatív értékektől a nullához, át a pozitív értékektől megát, tehát a görbe az aláeséstől az emelkedés felé halad, akkor legjobban, minimális értéke van.

A fg. szélső értékeit így határozzuk meg, hogy megalkotjuk a fg. első dif. hányadosát, és azt nullával tesszük egyenlővé. A függőlen változó így nyert értékeit a fg.-egyenletbe helyettesítve, nyerjük a fg. szélsőértékeit.

Ezen értékek maximum és minimum szerint, amint a fg. második dif. hányadosa a függőlen változó megfelelő értéke mellett pozitív v. negatív.

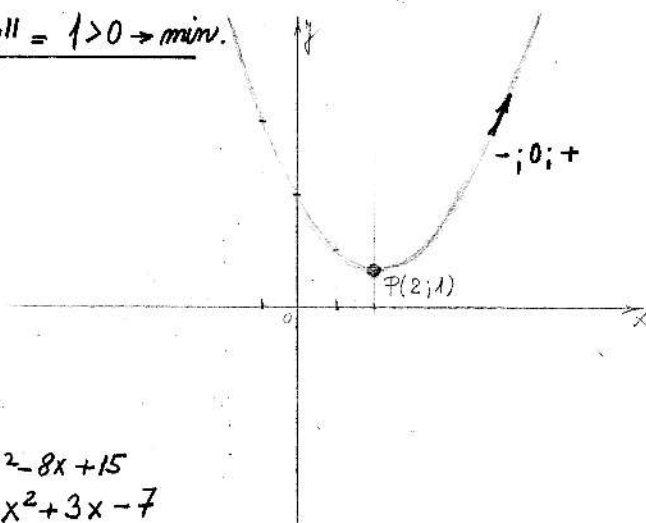
Példák:

Hat. meg a kv. fg. szélső értékeit:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

$$y' = x - 2 \quad x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad y = 2 - 4 + 3 = 1$$

$$y'' = 1 > 0 \rightarrow \text{min.}$$



x	-1	0	1	2	3
y	5.5	3	1.5	1	3

Hf.

$$y = x^2 - 8x + 15$$

$$y = -x^2 + 3x - 7$$