1, Hat. meg a függv. határhelyeit:

$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

$y' = x^2 + x - 2 = 0 \qquad x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \qquad x_{12} = 1 \,;\, -2$

$y_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 5 = \frac{2+3-12+30}{6} = \frac{24}{6} = 4$

$y_2 = -\frac{8}{3} + \frac{6}{3} + \frac{12}{3} + \frac{15}{3} = \frac{25}{3}$

$y'' = 2x + 1 \quad > 0 \quad < 0$

$P_m(1;4) \qquad P_M(-2;\frac{25}{3})$

2, $y = x^3 - 11x^2 + 35x - 10$

$y' = 3x^2 - 22x + 35 \qquad x_{12} = \frac{22 \pm \sqrt{484-420}}{6} = \frac{22 \pm 8}{6} \qquad x_{12} = 5 \,;\, \frac{7}{3}$

$y_1 = 125 - 275 + 175 - 10 = -270 + 285 = +15$

$y_2 = \frac{343}{27} - \frac{539}{9} + \frac{245}{3} - \frac{30}{3} = \frac{343}{27} - \frac{1617}{27} + \frac{2205}{27} - \frac{270}{27}$

$y_2 = \frac{2548 - 1887}{27} = \frac{661}{27} \doteq 24$

$y'' = 6x - 22 \quad > 0 \quad < 0$

$P_m(5;15) \qquad P_M(\frac{7}{3};\frac{661}{27})$

3, $y = x^3 - 2x^2 - \frac{5}{3}x + 7$

$y' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{3} = 9x^2 - 12x - 5 \qquad x_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{6} = \frac{4 \pm 6}{6} \qquad x_{12} = \frac{5}{3} \,;\, -\frac{1}{3}$

$y_1 = \frac{125}{27} - \frac{50}{9} - \frac{25}{9} + \frac{21}{3} = \frac{125 - 150 - \overset{75}{\cancel{225}} + 189}{27}$

$y_1 = \frac{+89}{27} = \frac{89}{27}$

$y_2 = -\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{63}{9} = \frac{-1 - 6 + 15 + 189}{27}$

$y_2 = \frac{197}{27}$

$y'' = 6x - 4 \quad > 0 \quad < 0$

$P_m(\frac{5}{3};\frac{89}{27}) \qquad P_M(-\frac{1}{3};\frac{197}{27})$

4.) $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$y' = 3x^2 - 12x + 11$ $\qquad x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-132}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = 2 \pm \sqrt{\frac{12}{36}} = 2 \pm \sqrt{1/3}$

$y_1 = 3\cdot\left(4 + \frac{1}{3} + 4\sqrt{1/3}\right) - 12\left(2 + \sqrt{1/3}\right) + 11$

$y_1 = 13 + 12\sqrt{1/3} - 24 + 11 - 12\sqrt{1/3} = 0$

$y_1 = (2+\sqrt{1/3})^3 - 6(2+\sqrt{1/3})^2 + 11(2+\sqrt{1/3}) - 6$

$y_1 = \underline{8} + 12\sqrt{1/3} + \underline{2} + \sqrt{\frac{1}{27}} \underline{-24} - 24\sqrt{1/3} \underline{+2} \underline{+22} + 11\sqrt{1/3} \underline{-6}$

$y_1 = 4 - \sqrt{1/3} + \sqrt{1/27}$

$y'' = 6x - 12$

$>0 \quad <0$

$\underline{P_m(2+\sqrt{1/3}\,;\ y_1) \quad P_M(2-\sqrt{1/3}\,;\ y_2)}$

20. 90/f.

$y = 5x^3 - 9x^2 + 3x - 10$

$y = 3 - x + 3x^2 - 3x^3$

$y = x^2(a-x)^2$

1.) $y = 5x^3 - 9x^2 + 3x - 10$

$y' = 15x^2 - 18x + 3 = 0$ $\qquad x_{12} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10} \qquad x_{1,2} = 1\,;\ \frac{1}{5}$

$5x^2 - 6x + 1 = 0$

$y'' = 30x - 18$ $\qquad y_1 = -11 \qquad y_2 = \frac{1}{25} - \frac{9}{25} + \frac{15}{25} - \frac{250}{25} = \frac{-243}{25} = y_2$

$\underline{\underline{P_m(1;-11) \quad P_M\left(\frac{1}{5}\,;-\frac{243}{25}\right)}}$

2.) $y = -3x^3 + 3x^2 - x + 3$

$y' = -9x^2 + 6x - 1 = 0$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+36}}{-18} = \frac{-6 \pm \sqrt{72}}{-18} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{9}}$

$y_1 = -3\left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}}\right) + 3$

$y_1 = -\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{2}{9}} - \frac{2}{3} - 3\sqrt{\frac{8}{27}} + \frac{1}{3} + 2\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{9}{3}$

$y_1 = \frac{26}{9} - \sqrt{\frac{72}{27}} = \frac{26}{9} - \sqrt{\frac{8}{3}}$

$y_2 = -\frac{1}{9} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \frac{2}{3} + 3\sqrt{\frac{8}{27}} + \frac{1}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{9}{3}$

$y_2 = \frac{26}{9} + 3\sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{26}{9} + \sqrt{\frac{8}{3}}$

$y'' = -18x + 6 \qquad <0 \qquad >0$

$\underline{\underline{P_M\left(1\,;\ \frac{26}{9} - \sqrt{\frac{8}{3}}\right) \quad P_m\left(\frac{1}{5}\,;\ \frac{26}{9} + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)}}$

3,

$$y = x^2(a-x)^2$$

$$y' = x^{2\prime}(a-x)^2 + (a-x)^{2\prime} \cdot x^2 = 2x(a-x)^2 + x^2 \cdot 2(a-x)(-1)$$

$$y' = 2xa^2 - 4ax^2 + 2x^3 - 2ax^2 + 2x^3 = 6x^3 - 6ax^2 + 2a^2x$$

$$y' = 6x^3 - 6x^2a + 2a^2x \qquad 3x^3 - 3ax^2 + a^2x = 0$$

$$x(3x^2 - 3ax + a^2) = 0 \quad \rightarrow x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 12a^2}}{6} = \frac{3a \pm ai\sqrt{3}}{6}$$

$$y_1 = \left(\frac{3a + ai\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \left(a - \frac{3a \pm ai\sqrt{3}}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{9a^2 + 6a^2 i\sqrt{3} - 3a^2}{36} \cdot \frac{6a^2 + 6a^2 i\sqrt{3} - a^2 3}{36} = \frac{(6a^2 + 6a^2 i\sqrt{3})(6a^2 + 6a^2 i\sqrt{3})}{1296} =$$

$$= \frac{6a^2(1 + i\sqrt{3}) \cdot 6a^2(1 + i\sqrt{3})}{1296} = \frac{218a^4(1 + 2i\sqrt{3} - 3)}{1296} = \frac{54a^4 i\sqrt{3} - 90a^4}{1296}$$

$$y_2 = \left(\frac{3a - ai\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \left(a - \frac{3a \pm ai\sqrt{3}}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{9a^2 - 6a^2 i\sqrt{3} + a^2 3}{36} \cdot \frac{9a^2 + 6a^2 i\sqrt{3} - 3a^2}{36} = \frac{(12a^2 - 6a^2 i\sqrt{3})(6a^2 + 6a^2 i\sqrt{3})}{1296} =$$

$$= \frac{6a^2(2 - i\sqrt{3})6a^2(1 + i\sqrt{3})}{1296} = \frac{36a^2(2 + i\sqrt{3} + 3)}{36 \cdot 36} = \frac{5a^2 + a^2 i\sqrt{3}}{36}$$

$$y'' = 18x^2 - 12ax + 2a^2$$

$$18\left(\frac{3a \pm ai\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 12a\left(\frac{3a \pm ai\sqrt{3}}{6}\right) + 2a^2 =$$

$$= \frac{9a^2 \pm 6a^2 i\sqrt{3} \mp 3a^2 - 12a^2 \mp 4ai\sqrt{3} + 4a^2}{2}; \quad \frac{-2a^2 + 2a^2 i\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{+4a^2 - 2a^2 i\sqrt{3}}{2}$$

$$+ a^2(i\sqrt{3} - 1) \equiv A \qquad a^2(2 - i\sqrt{3}) \equiv B$$

$$a \lesseqgtr 0 \rightarrow A; B > 0$$

$$P_m\left(\frac{3a + ai\sqrt{3}}{6}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{18}\right) \quad P_m\left(\frac{3a - ai\sqrt{3}}{6}; \frac{5a^2 + a^2 i\sqrt{3}}{36}\right) \quad P_m(0; 0)$$

1.)

$y = 2x^2 + 5x - 7$

$y' = 4x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{4}$ $\qquad y = 2\cdot\frac{25}{16} + 5\left(-\frac{5}{4}\right) - 7 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} - \frac{56}{8} = \frac{25-50-56}{8}$

$y'' = 4$ $\qquad P_m\left(-\frac{5}{4}; -\frac{81}{8}\right)$

2.)

$y = 6 - 3x - 5x^2$

$y' = -3 - 10x = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{10}$ $\qquad y = 6 + \frac{9}{10} - \frac{45}{100} = \frac{600+90-45}{100} = \frac{645}{100} = \frac{129}{20}$

$y'' = -10$ $\qquad P_M\left(-\frac{3}{10}; 6{,}45\right)$

3.)

$y = x^3 + 3x^2 - 5\frac{1}{3}x + 6 = x^3 + 3x^2 - \frac{16}{3}x + 6$

$y' = 3x^2 + 6x - \frac{16}{3} = 0$

$x^2 + 2x - \frac{16}{9} = 0$ $\qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = -1 \pm \frac{5}{3}$

$x_{1,2} = \frac{2}{3}; -\frac{8}{3}$

$y_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{8}{27} + \frac{12}{9} - \frac{32}{9} + \frac{54}{9}$

$y_1 = \frac{8 + 36 - 96 + 162}{27} = \frac{110}{27} \doteq 4$

$y_2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) + 6 = -\frac{512}{27} + \frac{192}{9} + \frac{128}{9} + \frac{54}{9}$

$y_2 = \frac{-512 + 576 + 384 + 162}{27} = \frac{64+384+162}{27} = \frac{510}{27} = \frac{170}{9} \doteq 19$

$y'' = 6x + 6 \quad > 0$

$P_m\left(\frac{2}{3}; \frac{110}{27}\right)$ $\qquad P_M\left(-\frac{8}{3}; \frac{170}{9}\right)$

4.)

$y = -x^3 - 4x^2 + 6\frac{2}{3}x - 8 = -x^3 - 4x^2 + \frac{20}{3}x - 8$

$y' = -3x^2 - 8x + \frac{20}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{-6} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{-6} = \frac{8 \pm 12}{6}$ $\qquad \frac{20}{6}; -\frac{4}{6}$

$y_1 = -\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{20}{3}\left(\frac{10}{3}\right) - 8 = -\frac{1000}{27} - \frac{400}{9} + \frac{200}{9} - \frac{72}{9}$

$y_1 = \frac{-1000 - 1200 + 600 - 216}{27} = \frac{-1816}{27}$

$y_2 = -\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 6\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) - 8 = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} - \frac{40}{9} - \frac{72}{9}$

$y_2 = \frac{8 - 48 - 120 - 216}{27} = \frac{-376}{27}$

$y'' = -6x - 8$

$P_M\left(\frac{10}{3}; -\frac{1816}{27}\right)$ $\qquad P_M\left(\frac{2}{3}; -\frac{376}{27}\right)$

$y = 4 - 3x - 5x^2$
$y = x^3 + 4$
$y = \frac{x}{x^2+1}$

1.) $y = 4 - 3x - 5x^2$

$y' = -3 - 5.2x \rightarrow x = -\frac{3}{10}$

$y = 4 + \frac{9}{10} - \frac{45}{100} = \frac{400 + 90 - 45}{100} = \frac{445}{100} = 4{,}45$

$y'' = -10$ $P_M(-\frac{3}{10}; 4{,}45)$

2.)

$y = x^3 + 4$

$y' = 3x^2 \rightarrow x = 0$ $y = 4$

$y'' = 6x \rightarrow 0$ nincs M; m

3.) $y = \frac{x}{x^2+1}$

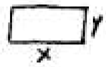
$y' = \frac{x'(x^2+1) - (x^2+1)' \cdot x}{x^2+1} = \frac{x^2+1 - 2x^2}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{x^2+1} = \frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)(x+1)} = \frac{1-x}{1+x}$

$\frac{1-x}{1+x} = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$ $y = \frac{1}{2}$

$y'' = \frac{(1-x)'(1+x) - (1+x)'(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} < 0$

$P_M(1; 0{,}5)$

4.) A kanális nyílása derékszögű paralelogramma, melynek kerülete 2a. Milyenek legyenek a méretei, ha azt akarjuk, hogy a nyílás a legnagyobb legyen!



$x + y^* = 2a \Rightarrow x = \cancel{2}a - y^*$ | $y^* = \cancel{2}a - x$

$x \cdot y^* = Max.$

$x(\cancel{2}a - x) = T$

$y = -x^2 + \cancel{2}ax$

$y' = -2x + \cancel{2}a = 0$

$x = \frac{2a}{4} = \frac{1}{2}a$ $y = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$

$x = y = \frac{1}{2}a$ ~ négyzet alakú nyílás. Területe $\frac{a^2}{4}$

2,

$y = (x-1)(x-2)(x-3)$

$y' = 1(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) + (x-1)(x-3)$

$y' = x^2-5x+6 \quad +x^2-3x+2 + x^2-4x+3$

$y' = 3x^2-12x+11 \quad = 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-132}}{6} = \dfrac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = \dfrac{6 \cdot 2 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$

$y_{1,2} = \left(\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3} - 2\right)\left(\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3} - 3\right)$

$y'' = 6x - 12 \qquad > 0 \quad < 0$

$P_m\left(\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}; y_1\right) \quad P_M\left(\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}; y_2\right)$

3,

$y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 6$

$y' = 3x^3 - 3x^2 - 6x = x(3x^2-3x-6) = 0 \qquad x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 6$

$x_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+72}}{6} = \dfrac{3 \pm 9}{6} = 2; -1$

$y_2 = 12 - 8 - 12 + 6 = -2$

$y_3 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} - \frac{12}{4} + \frac{24}{4} = \frac{19}{4}$

$y'' = 9x^2 - 6x - 6 \quad ; \le 0 \; ; > 0 \; ; > 0$

$P_M(0; 6) \qquad P_m(2; -2) \qquad P_m\left(-1; \frac{19}{4}\right)$

1.22   92 Hf.

$y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$

$y = x^4 - 12x^2$

$y = ;$ Az r sugarú körbe írt derékszögű parallelogrammák közül melyiknek a kerülete a legnagyobb.

1,

$y' = -3x^2 + 18x - 15 = 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2} = -1, -5$

$-x^2 + 6x - 5 = 0$

$y_1 = -3 - 18 - 15 = -36 \qquad y_2 = -75 - 90 - 15 = -180$

$y'' = -3x^2 + 6 \quad < 0$

$P_M(-1; -36) \qquad P_M(-5; -180)$

2.

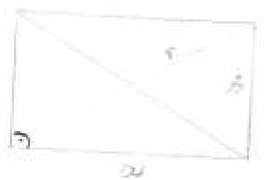
$y' = 4x^3 - 24x = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{6} \qquad x_3 = -\sqrt{6}$

$x(x^2-6) = 0 \qquad y_1 = 0 \qquad y_2 = -36 \qquad x_3 = -36$

$y'' = 12x^2 - 24 \qquad < 0 \quad > 0 \quad > 0$

$P_M(0; 0) \qquad P_m(\sqrt{6}; -36) \qquad P_m(-\sqrt{6}; -36)$

5,



$b = \sqrt{4r^2 - a^2}$

$T = a \cdot b = a \cdot \sqrt{4r^2-a^2} = a \cdot (4r^2-a^2)^{\frac{1}{2}} = y$

$\frac{dT}{da} = a' \cdot (4r^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + (4r^2-a^2)^{\frac{1}{2}'} \cdot a$

$y' = \sqrt{4r^2-a^2} + \frac{1}{2}(4r^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2a \cdot a$

$y' = \sqrt{4r^2-a^2} - a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4r^2-a^2}} = \frac{4r^2-a^2 - a^2}{\sqrt{4r^2-a^2}} = 0$

$4r^2 - 2a^2 = 0$ $\qquad b = \sqrt{4r^2-2r^2}$

$a^2 = 2r^2$ $\qquad b = \sqrt{2r^2}$

$y'' = \quad \to M(r\sqrt{2}, r\sqrt{2})$ $\qquad \underline{a = r\sqrt{2}}$ $\qquad \underline{b = r\sqrt{2}}$ $\qquad \underline{T = 2r^2}$

93. óra $\qquad$ 1968. II.

1, $y = \sin 2x$
2, $y = \sin^2 x$
3, $y = x - 2\sin x$
4, $y = 2\sin x - \sin 2x$
5, $y = 3\sin x - \sin 3x$

6, Az A számot bontsuk fel két összeadandóra úgy, hogy négyzetük összege a legkisebb legyen.

7, Melyik derékszögű paralelogramma a legkisebb kerületű ha területe T.

8, $y = (x^2+x) \cdot (x^4 - x^2 + 1)$

9, Adott a hosszúságot egy osztóponttal osszuk 2 részre, és emeljük mindkét rész fölé négyzetet. Hol kell kettéosztani az a hosszúságot, hogy a 2 négyzet együttes területe a lehető legkisebb legyen.

10, Szerkesszünk a R∢ Δ-be egy legnagyobb területű R∢-ű paralelogrammát, éspedig; egyik szöge egybeessék a ΔR∢-égével, s hat. meg a paralelogramma oldalait.

Megoldások:

1, $y = \sin 2x$
$y' = \cos 2x = 0 \to x = k\frac{\pi}{4}$
$y'' = -\sin 2x = -\sin \frac{k\pi}{4} 2 = \pm 1 \to M, m$

2, $y = \sin^2 x = [\sin x]^2$, $y' = 2 \sin x \cdot \cos x = 0 \to \sin 2x = 0 \to x = k\pi$
$y'' = \cos 2x = \cos 2k\pi = 1$

3, $y = x - 2\sin x$ $\qquad y' = 1 - 2\cos x = 0 \to \cos x = \frac{1}{2} \to x = k\frac{\pi}{3}$
$y'' = 2\sin x = 2 \sin \frac{k\pi}{3} = \pm \gtrless 0 \to M, m$

4, $2\sin x - \sin 2x$ $\qquad y' = 2\cos x - \cos 2x = 0 \to 2\cos x = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$2\cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 0 \to -2a^2 + 2a + 1 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{-4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \cos x \to x = 120°$
$y'' = -2\sin x + \sin 2x \gtrless \to m.$

5.) $y = 3\sin x - \sin 3x$

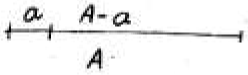
$y' = 3\cos x - \cos 3x = 0 \rightarrow 3\cos x = \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$6\cos x = 4\cos^3 x$

$6 = 4\cos^2 x$

$\frac{3}{2} = \cos^2 x$

$\cos x = \sqrt{3/2}$;

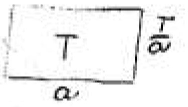
6.) 

$a^2 + (A-a)^2 = y = a^2 + A^2 - 2Aa + a^2 = 2a^2 - 2Aa + A^2$

$y' = 2a + \cancel{2(A-a) = 0}$ $\quad y' = 4a - 2A = 0$

$\cancel{2a + 2A - 2a = 0}$ $\quad 4a = 2A$

$\underline{a = 0{,}5A}$

7.) 

$K = 2\left(a + \frac{T}{a}\right) = 2a + 2\frac{T}{a}$

$K' = 2 + \frac{0.a - 1.2T}{a^2} = 2 + \frac{-2T}{a^2} = 0$

$2 = \frac{2T}{a^2}$

$2a^2 = 2T$

$a^2 = T$

$\underline{a = \sqrt{T}}$ → negyzet

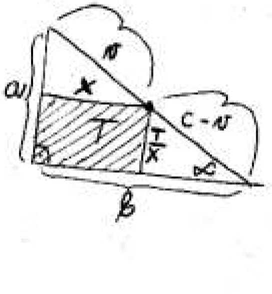
8.) $y = (x^3 + x) : (x^4 - x^2 + 1) = \frac{(x^3 + x)}{(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x(x^2+1)}{(x^4 - x^2 + 1)}$

$y' = \frac{(3x^2+1)(x^4 - x^2 + 1) - (4x^3 - 2x)(x^3 + x)}{(x^4 - x^2 + 1)^2} =$

$= \frac{3x^6 + x^4 - 3x^4 - x^2 + 3x^2 + 1 - 4x^6 + 2x^4 - 4x^4 + 2x^2}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$;

$= \frac{-x^6 - 4x^4 + 4x^2 + 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2} = \frac{-x^4(x^2+1) + (4x^2+1)}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$;

9.) ≡ 6.)

10.) 

$x = r \cdot \cos\alpha = r \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\frac{T}{x} = (c - r) \cdot \sin\alpha = (c - r)\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - r\right)$

$y = x \cdot \frac{T}{x} = r\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2} - r\right)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$y = \frac{r b . a . \sqrt{a^2 + b^2} - r b . a . r}{a^2 + b^2} = r\frac{b \cdot}{}$

5.) $y = 3\sin x - \sin 3x$

$y' = 3\cos x - \cos 3x = 0 \rightarrow 3\cos x = \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

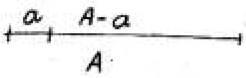
$6\cos x = 4\cos^3 x$

$6 = 4\cos^2 x$

$\frac{3}{2} = \cos^2 x$

$\cos x = \sqrt{3/2}$;

6.)



$a^2 + (A-a)^2 = y = a^2 + A^2 - 2Aa + a^2 = 2a^2 - 2Aa + A^2$

$\cancel{y' = 2a + 2(A-a) = 0}$

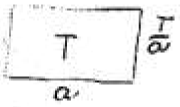
$\cancel{2a + 2A - 2a = 0}$

$y' = 4a - 2A = 0$

$4a = 2A$

$\underline{a = 0{,}5A}$

7.)



$K = 2\left(a + \frac{T}{a}\right) = 2a + 2\frac{T}{a}$

$K' = 2 + \frac{0\cdot a - 1\cdot 2T}{a^2} = 2 + \frac{-2T}{a^2} = 0$

$2 = \frac{2T}{a^2}$

$2a^2 = 2T$

$a^2 = T$

$\underline{a = \sqrt{T}} \rightarrow$ [illegible]

8.) $y = (x^3 + x) : (x^4 - x^2 + 1) = \frac{(x^3 + x)}{(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x(x^2+1)}{(x^4 - x^2 + 1)}$

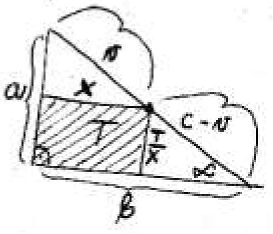
$y' = \frac{(3x^2+1)(x^4-x^2+1) - (4x^3-2x)(x^3+x)}{(x^4-x^2+1)^2} =$

$= \frac{3x^6 + x^4 - 3x^4 - x^2 + 3x^2 + 1 - 4x^6 + 2x^4 - 4x^4 + 2x^2}{(x^4-x^2+1)^2} =$

$= \frac{-x^6 - 4x^4 + 4x^2 + 1}{(x^4-x^2+1)^2} = \frac{-x^4(x^2+1) + (4x^2+1)}{(x^4-x^2+1)^2}$;

9.) $\equiv$ 6.)

10.)



$x = r\cdot\cos\alpha = r\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\frac{T}{x} = (c-r)\cdot\sin\alpha = (c-r)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\sqrt{a^2+b^2} - r\right)$

$y = x\cdot\frac{T}{x} = r\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2} - r\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$y = \frac{rb\cdot a\cdot\sqrt{a^2+b^2} - rb\cdot a\cdot r}{a^2+b^2} = r\frac{b\cdot}{}$

94. óra. **Az integrál számítás** 1968. II.

A határozatlan integrál

Van egyenes és inverz művelet.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$\underline{y = \int dy = \int f'(x)\,dx}$$

$$\boxed{y = \int dy = \int f'(x)\,dx + C}$$

$y = x^2$ $\quad y = x^2+1$ $\quad y = x^2+2$

$y' = 2x$ $\quad y' = 2x$ $\quad y' = 2x$

$y = x^2-1$ $\quad y = x^2-2$ $\quad y = x^2-3$

$y' = 2x$ $\quad y' = 2x$ $\quad y' = 2x$

$dy = f'(x).dx$ — a fg. differenciálját felírtuk, mint a fg. diff. hányadosának és a független változó diff.-jának szorzatát.

Azt a számítási eljárást, amellyel vmely fg. differenciáljából magát a függvényt meghatározhatjuk, integrál számításnak, az eredményül nyert fg.-ényt pedig az adott differenciál integrál függvényének, röviden integráljának nevezzük.

Tehát az integrál számítás a differenciál számítás megfordításának tekinthető, s így vmely fg. differenciáljának integrálja magával a függvénnyel egyenlő:

$$\underline{y = \int dy = \int f'(x)\,dx = f(x) + C}$$

$\int 5x^4\,dx = x^5 + C$ $\qquad y = x^5\,;\ y' = 5x^4$

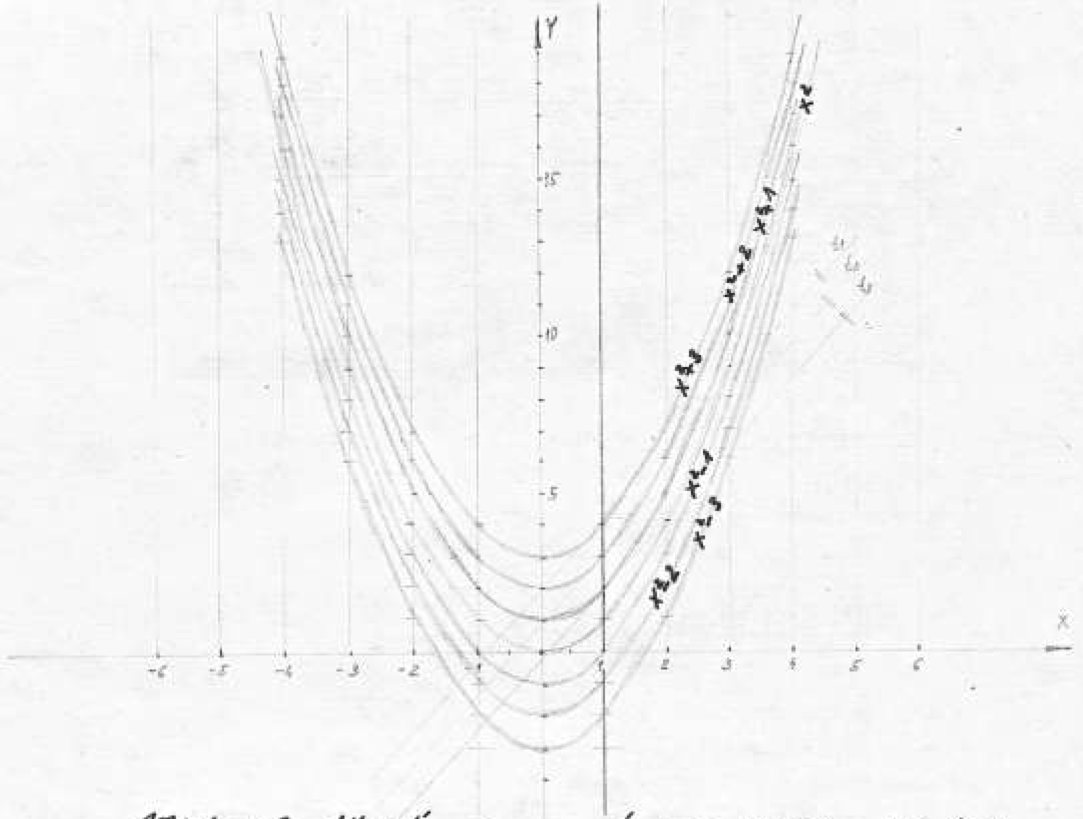
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int 8x^7\,dx = x^8 + C$

C – az integrál <u>additív állandója</u>.

Az integrál kiszámítása határozatlan feladat, mert általa nem egy fg-t, hanem a függvények végtelen nagy számát nyerjük eredményül, amelyek egymástól csak egy tetszőleges értékű állandó összeadandóban különböznek.

A határozatlan integrál geometriai jelentése.



Mivel a $\underline{C}$ állandó a $-\infty$ és $+\infty$ között fekvő" összes valós értékeket felveheti, ezért az integrál $2x\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C$ határozatlan integrál mértanilag oly végtelen nagyszámú önszeillő" parabolát, általában az $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ határozatlan pedig azoknak a végtelen nagy számú önszeillő" síkgörbéknek csoportját jelenti, amelyeket úgy nyerünk, ha a főgörbét az Y tengely mindkét irányában tetszőleges távolságra eltoljuk.

Egyszerűbb integrál-alakok

Az alapintegrálok a következők:

1. Hatvány integrálja: $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$

$$\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} + c\right]' = m+1 \cdot \frac{x^m}{m+1}$$

Hatvány integrálját nyerjük, ha az eggyel nagyobb kitevőjű hatványt az új kitevővel elosztjuk. A képlet minden m-re érvényes, kivéve ha $m = -1$.

Pl.: $\int x^6\,dx = \frac{x^7}{7} + C$

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4} = \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$\int \sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\frac{7}{4}} = \frac{4\cdot\sqrt[4]{x^7}}{7} = \frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7} + C$$

Állandó tényezővel szorzott hatvány integrálja:

$$\int a x^m\,dx = a\int x^m\,dx = a\,\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Az állandó tényezőt kiemelhetjük az integráljel elé.

Pl: $\int 6x^5\,dx = 6\int x^5\,dx = 6\cdot\frac{x^6}{6} = x^6 + C$

$\int \frac{8}{x^2}\,dx = \int 8x^{-2}\,dx = 8\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = -8\cdot x^{-1} = -\frac{8}{x} + C$

Összeg (különbség) integrálja:

$$\int [f'(x) + g'(x)] = \int f'(x)\,dx + \int g'(x)\,dx = f x + g x + C$$

Összeg (különbség) integrálját nyerjük, ha az egyes tagok integráljait összevonjuk.

Pl: $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)\,dx = \left(x^4 + x^3 - 2\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{x^1}{2}\right)\cancel{dx} + C =$

$= x^4 + x^3 - x^2 - x + C$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

III. 1.

96 - 97. *bra*

1, $\int (5x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{2}{4}} + 14x^{\frac{3}{4}} - 7x)\,dx = \int 5x^{\frac{1}{4}}dx - \int 3x^{\frac{2}{4}}dx + \int 14x^{\frac{3}{4}}dx - \int 7x\,dx =$

$= \frac{5 \cdot x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{6}{4}}}{\frac{6}{4}} + 14 \cdot \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{20}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{12}{6}x^{\frac{6}{4}} + \frac{56}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{2}x^2 =$

$= 4x\sqrt[4]{x} - 2x\sqrt{x} + 8x\sqrt[4]{x^3} - \frac{7}{2}x^2 + C.$

2, $\int (5\sin x + 3\cos x)\,dx = \int 5\sin x\,dx + \int 3\cos x\,dx = -5\cos x + 3\sin x + C$

$= 3\sin x - 5\cos x + C$

3, $\int (a\cos x - b\sin x)\,dx = \int a\cos x\,dx - \int b\sin x\,dx = a\sin x + b\cos x + C$

4, $\int (8\cos x - 5\sin x)\,dx = 8\int \cos x\,dx - 5\int \sin x\,dx = +8\sin x + 5\cos x + C$

5, $\int (3\sin x + 2\cos x)\,dx = 3\int \sin x\,dx + 2\int \cos x\,dx = -3\cos x + 2\sin x + C$

6, $\int (\sin x - \cos x)\,dx = -\cos x - \sin x + C$

7, $\int (2x^{\frac{1}{5}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 3x - 8)\,dx = \frac{2x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} - 6\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 3\frac{x^2}{2} - 8x + C =$

$= \frac{10}{6}x^{\frac{6}{5}} - \frac{18}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C =$

$= \frac{5}{3}x\sqrt[5]{x} - \frac{9}{2}x\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C$

V. 1.

$\int (3/x^4 - 2/x^2 + 5)\,dx$

$\int (3/x^3 + 5/x^2 - 4/x^4 + 6)\,dx$

$\int (x-1)(x-2)(x-3)\,dx$

$\int \sqrt[3]{x}\,dx$

4.

$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

1, $\int\left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^2}+5\right)dx = 3\cdot\frac{x^{-3}}{-3}-2\frac{x^{-1}}{-1}+5x+C = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{x}+5x+C}}$

2, $\int\left(\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^4}+6\right)dx = 3\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+5\frac{x^{-1}}{-1}-4\cdot\frac{x^{-3}}{-3}+6x+C =$

$$\underline{\underline{= -\frac{3}{2x^2}+\frac{5}{x}+\frac{4}{3x^3}+6x+C}}$$

3, $\int(x-1)(x-2)(x-3)\,dx = \int[x^2-3x+2][x-3]\,dx = \int(x^3-3x^2+2x-3x^2+9x-6)\,dx =$

$$= \int(x^3-6x^2+11x-6)\,dx = \frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^3}{3}+11\cdot\frac{x^2}{2}-6x =$$

$$\underline{\underline{= \frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{12}{2}x^2-6x+C}}$$

4, $\int\sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}}}$

5, $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int(x+1)\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C =$

$$\underline{\underline{= \frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C}}$$

98. ö [illegible]
1968. [illegible]

$\int tg^2x\,dx = \int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx = \int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx =$ $\quad / \sin^2x+\cos^2x=1$

$$= \int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int -1\,dx = \underline{\underline{tg\,x-x+C}}$$

$\int\frac{3-2\,ctg^2x}{\cos^2x}dx = \int\left(\frac{3}{\cos^2x}-2\cdot\frac{1}{\sin^2x}\right)dx = \underline{\underline{3\,tg\,x+2\,ctg\,x+C}}$

$\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx = \int\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{2}\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C}}$

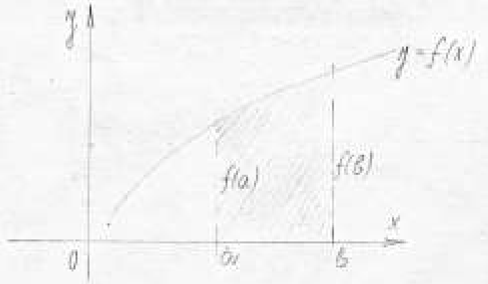
$\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2dx = \int\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C}}$

$\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx-\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x-C = \underline{\underline{\sin x+C}}$

$\int 4\sin^2\frac{x}{2}\,dx = 4\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx = 4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C\right) = \underline{\underline{2x-2\sin x+C}}$

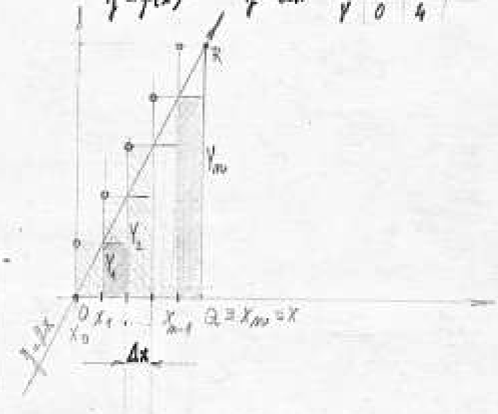
A határozott integrál fogalma

Az integrálszámítás abból a geometriai problémából származtatható, hogy mekkora a területe az $y = f(x)$ folytonos függvény, az $\underline{x}$ tengely és az $\underline{a}$, $\underline{b}$ abszcisszákhoz tartozó $f(a)$; $f(b)$ ordináták által határolt síkidomnak.



$y = f(x)$ $\qquad y = 2x$

x	0	2
y	0	4



OQR△ ter. .... P

$\Delta x = \frac{x}{n}$

$\underset{\sim\sim}{s_n}$ = az OQR △-be írt téglalapok területeinek az összege.

$\underset{\sim\sim}{S_n}$ = az OQR △-köré írt téglalapok területeinek összege.

$$s_n < P < S_n$$

Ha $n \to \infty$, akkor $\Delta x \to 0$ [és S_n; $s_n \to P$]

$$\begin{array}{lllll} X & \{x_0 = 0\} \; x_1 = \Delta x = \frac{x}{n} & \{x_2 = \frac{2x}{n}\} & x_3 = \frac{3x}{n}\} \cdots\cdots & \{x_{n-1} = \frac{(n-1) \cdot x}{n}\} \\ Y & \{y_0 = 0\} \; y_1 = \frac{2x}{n} & \{y_2 = \frac{4x}{n}\} & y_3 = \frac{6x}{n}\} \cdots\cdots & \{y_{n-1} = \frac{2(n-1) \cdot x}{n}\} \end{array}$$

$$s_n = \frac{x}{n}\left[0 + \boxed{\frac{2x}{n}} + \frac{4x}{n} + \frac{6x}{n} + \cdots\cdots \frac{2(n-1)x}{n}\right] =$$

$$= \frac{x}{n} \cdot \frac{2x}{n}\left[1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (n-1)\right] =$$

$\left| \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 1 \\ a_n = (n-1) \\ n = (n-1) \end{array} \right. \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$$= \frac{2x^2}{n^2} \cdot \left[\frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1)\right] = 2\frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) =$$

$$= \frac{x^2}{n}(n-1) = \underline{x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = s_n}$$

$$\underline{\underline{\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = x^2}}$$

X	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{x}{n}$	......	$x_{n-1} = \frac{(n-1)x}{n}$	$x_n = \frac{nx}{n}$
Y	$y_0 = \frac{2x}{n} \rightarrow$	$y_1 = \frac{4x}{n} \rightarrow$	......	$y_{n-1} = \frac{2nx}{n} \rightarrow$	$y_n = \frac{2(n+1)\cdot x}{n}$

$$S_n = \frac{x}{n}\left[\frac{2x}{n} + \frac{4x}{n} + \frac{6x}{n} \ldots\ldots \frac{2(n-1)x}{n} + \frac{2nx}{n} + \cancel{\frac{2(n+1)x}{n}}\right]$$

$$S_n = \frac{x}{n}\cdot\frac{2x}{n}\left[1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) + n\right] = \frac{2x^2}{n^2}\left[\frac{1+n}{2}\cdot(n)\right] =$$

$$= \frac{2x^2}{n^2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n = \frac{x^2(n+1)}{n} = \underline{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right). = S_n}$$

$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} x^2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x^2 + \frac{x^2}{n}\right) = x^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n < P < \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$x^2 < P < x^2 \longrightarrow P = x^2$$

s_n – alsó összeg $\qquad$ S_n - felső összeg

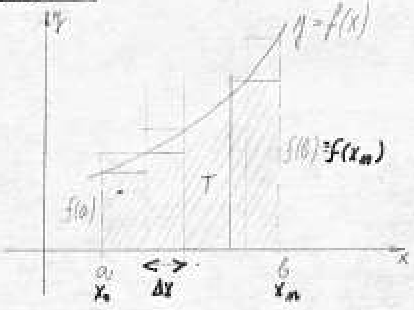
100. óra.
1968. III. 13.

<u>Általában:</u>

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad S_n > s_n$$

$$S_n > T > s_n$$

$$n\to\infty \Rightarrow \Delta x \to 0$$



a - alsó határ
b - felső határ

$$s_n = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + \ldots\ldots f(x_{n-1})\cdot\Delta x = \Delta x\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right)$$

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots\ldots f(x_n)\Delta x = \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right]$$

$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = T = \int_a^b f(x)\,dx}}$$

Ezen kép ,-ben előforduló integrál , mely most mái az a és b számadatok által teljesen meghatározott értékkel jelent , az $y = f(x)$ függvény határozott integráljának nevezzük , az a és b határok között , ahol a az integrál alsó határa , b pedig a felső határ.

Az $y = f(x)$ függvény határozott integrálját az a és b határok között megkapjuk, ha a fv. határozatlan integrálját az állandóra való tekintet nélkül kiszámítjuk és ebbe az x helyébe előbb a felső, azután az alsó határt helyettesítjük s azután az így nyert kifejezések különbségét vesszük.

Pl.: $$\int_1^2 (x^3-x+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x+C\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}+1\right) =$$

$$= (4-2+2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right) = 4+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4} =$$

$$= 3+\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\int_0^2 (3x^2+2x)\,dx = \left[x^3+x^2\right]_0^2 = 8+4 = 12$$

13. 64/11 a, b

$$\int_2^4 (4x-3)\,dx = \left[2x^2-3x\right]_2^4 = (32-12)-(8-6) = 20-2 = 18$$

$$\int_7^9 (6x^2-1)\,dx = \left[2x^3-x\right]_7^9 = (2\cdot 9^3-9)-(2\cdot 7^3-7) = 9(162-1)-7(98-1) =$$

$$= 9\cdot 161 - 7\cdot 97 = 1449 - 679 = 770$$

1968.

$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx + \int_{-2}^{0}(4-x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48}{3} - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$2\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\int_{-a}^{+a} x^5\,dx = 2\int_{0}^{a} \frac{x^6}{6} = 2\,\frac{a^6}{6} = \frac{a^6}{3}$$

$$\int_{3}^{5}(4x^3 - 3x^2 + 7)\,dx = \left[x^4 - x^3 + 7x\right]_{3}^{5} = (625 - 125 + 35) - (81 - 27 + 21) =$$

$$= 535 - 75 = 460$$

$$\int_{-3}^{2}\left(2x^3 - 3x + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 + (-x^{-1})\right]_{-3}^{2} = \left(\frac{16}{2} - \frac{3}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{16}{2} - \frac{12}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{54}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{51}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{-153 - 2}{6} = \left|-\frac{155}{6}\right| \quad = \frac{155}{6} \approx 26$$

$$\int_{1}^{2}\frac{16}{x^3}\,dx = 16\int_{1}^{2}x^{-3}\,dx = \left[16\,\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{1}^{2} = \left[-\frac{8}{x^2}\right]_{1}^{2} = \left(-\frac{8}{4}\right) - \left(-\frac{8}{1}\right) = (-1+4) = |3.2| = 6$$

$$\int_{1}^{2}\frac{2x^2+1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{2}(2x^2 - 1)\,x^{-2}\,dx = \int_{1}^{2} 2 - \frac{1}{x^2} = \left(2 - \frac{1}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{1}\right) = \frac{7}{4} = \left|-\frac{5}{4}\right|$$

$$\int_{0}^{9}\sqrt{x}\,dx = \int_{0}^{9} x^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{9} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} = \frac{2\sqrt{729}}{3} = \frac{2.27}{3} = 18$$

$$\int_{2}^{3}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{2}^{3} = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}\right]_{2}^{3} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{8} + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= \left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\sqrt{2}$$

III. 27. 102. óra

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1+1 = 2$$

IV. 2. 103. óra

A határozott integrál tulajdonságai:

1. Az állandó tényezők a hat. integráljel elé vihetők:

$$\int_a^b A f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

2. A határokat felcserélve az integrál előjele megváltozik.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Pl: $$\int_3^7 (4x+3)\,dx = \left[2x^2+3x\right]_3^7 = (98+21)-(18+9) = 119-27 = 92$$

$$= -\int_7^3 (4x+3)\,dx = -\left[(18+9)-(98+21)\right] = -(-92) = 92$$

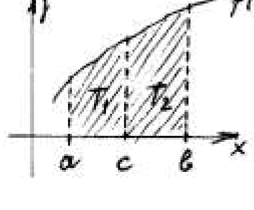
Bizonyítás: $$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x)_n\right]$$

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{a-b}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x)_n\right]$$

3. Ha az alsó és felső határ megegyezik, az integrál értéke 0.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

4. A határozott integrálok összeadhatók ill. szétválaszthatók. (Additivitás).

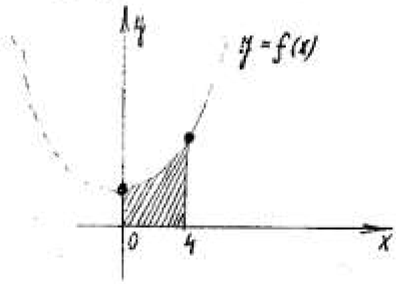


$$T_1 + T_2 = T = T_1 + T_2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

103. Házi feladat. 1968. IV.

Hat. meg az $y = 3x^2-6x+5$ parabola az x és y tengely és az $x=4$ absz. pont ordinátája által határolt területrész nagyságát:



$$T=\int_0^4 (3x^2-6x+5)\,dx = \left[x^3-3x^2+5x\right]_0^4 =$$

$$= 4^3-3\cdot4^2+5\cdot4 = 64-48+20$$

$$\underline{T = 36\ ...^2}$$

104. óra 1968. IV.

1, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{0^\circ}^{270^\circ} = \sin 270^\circ - \sin 0^\circ = -1$

$T = 3\cdot\int_{0^\circ}^{90^\circ} \sin x = 3\left[\sin\right]_0^{90} = 3(1) = \underline{\underline{3}}$

2, $\int_1^9 3\sqrt{x}\,dx = \int_1^9 3\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \left[2\cdot\sqrt{x^3}\right]_1^9 = (2\cdot27)-(2\cdot1) = \underline{\underline{52}}$

3, $\int_0^{\pi} a\sin x\,dx = a\int_0^{\pi}\sin x\,dx = a\left[-\cos\right]_{0^\circ}^{180^\circ} = a\cdot(-\cos180^\circ+\cos0^\circ) = a\cdot(1+1) = \underline{\underline{2a}}$

4, $\int_1^4 (x^2+2x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x\right]_1^4 = \left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_1^4 = \left(\frac{64}{3}+16+4\right)-\left(\frac{1}{3}+1+1\right) =$

$= \frac{63}{3}+18 = 18+21 = \underline{\underline{39}}$

5, $\int_2^4 (4x-3)\,dx = \left[2x^2-3x\right]_2^4 = (32-12)-(8-6) = 20-2 = \underline{\underline{18}}$

6, $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{90} = (\sin 90^\circ)-(\sin 0^\circ) = 1-0 = \underline{\underline{1}}$

7, $\int_0^{\pi/2} (4\cos x - 2\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx - 2\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \left[4\sin x\right]_0^{90^\circ} - \left[2\cdot-\cos x\right]_0^{90^\circ} =$

$= (4-0)-(0-1) = \underline{\underline{5}}$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(\sin 2x+\cos\frac{x}{2}\right)dx=\left[-\cos 2x\right]_{0^\circ}^{270^\circ}+\left[\sin\frac{x}{2}\right]_{0^\circ}^{270^\circ}=+1+1+1-0=3$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{90^\circ}=0+1=1$$

$$\int_2^6\frac{dx}{x^3}=\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_2^6=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_2^6=-\frac{1}{72}+\frac{1}{8}=\frac{-1+9}{72}=\frac{8}{72}=\frac{1}{9}$$

$$\int_4^6\sqrt[3]{x^2}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_4^6=\left[\frac{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}{5}\right]_4^6=\frac{3\cdot\sqrt[3]{6^5}}{5}-\frac{3\sqrt[3]{4^5}}{5}=\frac{3}{5}\left(6\sqrt[3]{36}-4\sqrt[3]{16}\right)=\frac{18}{5}\sqrt[3]{36}-\frac{12}{5}\sqrt[3]{16}$$

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1=\frac{2}{3}(1-0)=\frac{2}{3}$$

$$\int_{-3}^{2}\left(2x^3-3x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{-2}=-\left(\frac{81}{2}-\frac{27}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{16}{2}-\frac{12}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{54}{2}-\frac{1}{3}=$$
$$=-\frac{51}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{153+2}{6}=-\frac{155}{6}$$

$$\int_{-a}^{+a}x^5\,dx=2\int_0^a x^5\,dx=2\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^a=2\cdot\frac{a^6}{6}=\frac{1}{3}a^6$$

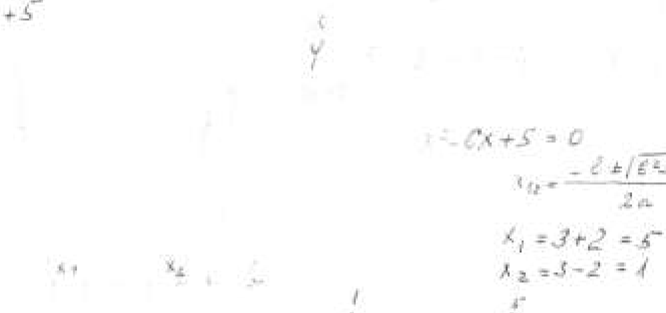
$$\int_a^b x^3\,dx=\int_a^b x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b=\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}=\frac{b^4-a^4}{4}$$

4. 9.

1,5 óra

Hat. meg az x^2-6x+5 parabolaág és az x tengely által bezárt síkrész területét a (0;6) intervallumban

$y=x^2-6x+5$



$$x^2-6x+5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}$$
$$x_1=3+2=5$$
$$x_2=3-2=1$$

$$T=\int_0^1(x^2-6x+5)dx+\int_1^5(x^2-6x+5)dx+\int_5^6(x^2-6x+5)dx$$

$$T=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+5x\right]_0^1+\left|\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right]_1^5\right|+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+5x\right]_5^6$$

$$T=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+5+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+5-\frac{125}{3}+75-25+\frac{216}{3}-\frac{216}{2}+30-\frac{125}{3}+75-25$$

Hat. meg a szinuszgörbe és az x tengely által bezárt síkrész területét a $(0; 2\pi)$ intervallumban.

$$T = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| = 4\cdot\int_{0°}^{90°} \sin x\,dx = 4\left[-\cos x\right]_{0°}^{90°}$$

$$T = 4\cdot -(-1) = \underline{\underline{4}}\ e^2$$

<u>105. Gy</u>

1965. IV. 9.

$y = x^2 - 4x + 3 \quad \langle 2;4\rangle \qquad\qquad y = \cos x \quad \langle 0; \tfrac{3}{2}\pi\rangle$

1, $y = \cos x$ $\langle 0; \tfrac{3}{2}\pi\rangle$

$$T = \int_{0°}^{270°} \cos x\,dx = \left[-\sin x\right]_{0°}^{270°} = \left[-\sin x\right]_{0°}^{180°} + \left[-\sin x\right]_{180°}^{270°} = \left|3\left[-\sin x\right]_{0°}^{90°}\right|$$

$$T = \left|3(-\sin 90°) - 3(-\sin 0°)\right| = |-3| = \underline{3}\ e^2$$

2, $y = x^2 - 4x + 3$ $\langle 2;4\rangle$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} \qquad x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$$T = \int_2^4 (x^2-4x+3)\,dx = \int_2^3 (x^2-4x+3)\,dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_2^3\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_3^4\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{27}{3} - \frac{36}{2} + 9\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{2} + 6\right)\right| + \left|\left(\frac{64}{3} - 32 + 12\right) - \left(\frac{27}{3} - 18 + 9\right)\right| =$$

$$= \left|9 - 18 + 9 - 6 + 8 - \frac{8}{3}\right| + \left|\frac{64}{3} - 32 + 12 - 9 + 18 - 9\right| =$$

$$= \left|2 - \frac{8}{3}\right| + \left|-20 + \frac{64}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2\ e^2$$

V. 16.

106. óra

1, $y = 4 - x^2$ $\underline{X}$ $T = ?$

$4 - x^2 = 0$

$-x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm 2$

$$T = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = 2\int_{0}^{2}(4 - x^2)dx = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 16$$

$$= 2\left(\frac{24-8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \underline{\frac{32}{3}}\ e^2$$

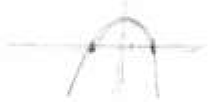
2, Határozd meg az $y = 3 - 2x - x^2$ parabolaív és az x tengely által bezárt síkrész területét

$3 - 2x - x^2 = 0$

$-x^2 - 2x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

$x_1 = -3$; $x_2 = 1$



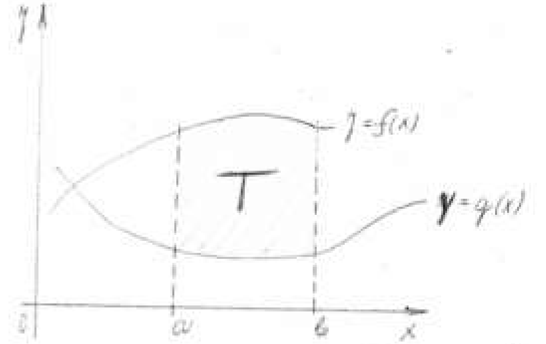
$$T = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)dx = \left[3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1}$$

$$T = \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - (-9 - 9 + 9) = 2 + 9 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{10\frac{2}{3}\ e^2}}$$

3, Számítsd ki az $y = \sin x$ görbe és x t. közti területet, $x = \langle 0; \pi \rangle$

$y = \sin x$

$$T = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos 180^\circ + \cos 0^\circ = \underline{\underline{2}}\ e^2$$



$y = f(x)$ ...... T_1

$y = g(x)$ ...... T_2

$T = T_1 - T_2$

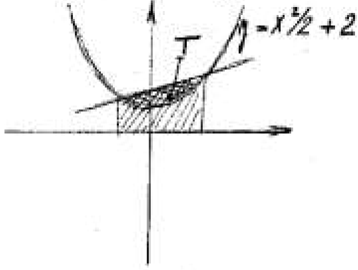
$T_1 = \int_a^b f(x)dx$

$T_2 = \int_a^b g(x)dx$

$$T = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\underline{\underline{T = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}}$$

Hat. meg azon síkidom területét melyet az $y=\frac{x^2}{2}+2$ parabola és az $x-2y+10=0$ egyenes határolnak!



$$y=\frac{x^2}{2}+2=\frac{x^2+4}{2}$$

$$x-2y+10=0 \rightarrow y=\frac{x+10}{2}$$

$$y=y \rightarrow x^2+4-x-10=0 \qquad \left(x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-56}}{2}\right)$$

$$(x^2+x+14=0)$$

$$x^2-x-6=0 \qquad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}$$

$$x_1=3\ ;\ x_2=-2$$

$$T=\int_{-2}^{3}\frac{1}{2}(x+10)\,dx-\int_{-2}^{3}\frac{1}{2}(x^2+4)\,dx$$

$$T=\frac{1}{2}\int_{-2}^{3}(x+10-x^2+4)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{3}(-x^2+x+14)\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+14x\right]_{-2}^{3}$$

$$T=\frac{1}{2}\left(\underline{-9}+\frac{9}{2}+\underline{42}+\frac{8}{3}+\underline{\frac{4}{2}}\ \underline{-28}\right)=\frac{1}{2}\left(7+\frac{8}{3}+\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{42+16+27}{6}=$$

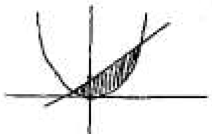
$$T=\frac{85}{12}=\underline{7\frac{1}{12}}\ o^2$$

107. óra 1968. IV. 1

Szám. ki az $y=2x+3$ és az $y=x^2$ p. által bezárt területet.

$$y=y \rightarrow 2x+3=x^2 \qquad x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$

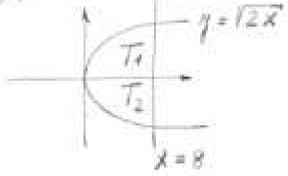
$$0=x^2-2x-3 \qquad \underline{x_1=3}\ ;\ \underline{x_2=-1}$$



$$T=T_1-T_2 \qquad T=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx=\left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$

$$T=(9+9-9)-\left(1-3+\frac{1}{3}\right)=9-\left(-1\frac{2}{3}\right)=10\frac{2}{3}\ o^2$$

Szám. ki az $y^2=2x$ parabola és az $x=8$ egyenes által bezárt síkrész területét:



$$T = T_1 + T_2$$
$$T = 2T_1$$
$$T = 2\int_0^8 \sqrt{2x}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^8$$
$$T = 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 8\cdot\sqrt{8} = \frac{32}{3}\cdot\sqrt{16} = \frac{128}{3} = \underline{42\frac{2}{3}}\ o^2$$

Szám. ki az $y=x^3+x^2-2x$ görbevonal az x tengely és az $x=-2;2$ egyenesek által határolt területét.

$$y=0$$
$$y = x^3+x^2-2x=0 \qquad x_1=0$$
$$x(x^2+x-2)=0 \qquad x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$x^2+x-2=0$$
$$x_2 = 1; \quad x_3=-2 \quad x_1=0$$

$$T = \int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx + \int_0^1(x^3+x^2-2x)\,dx + \int_1^2(x^3+x^2-2x)\,dx$$
$$T = \left|-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right)^{-2}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right)^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_1^2\right|$$
$$T = \left|-4+\frac{8}{3}+4\right| + \left|\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right| + \left|4+\frac{8}{3}-4-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right| =$$
$$= \frac{8}{3}+\frac{5}{12}+\left|1+\frac{8}{3}-\frac{7}{12}\right| = \frac{32+5+5+32}{12} = \frac{74}{12} = \underline{6\frac{1}{6}}\ o^2$$

IV. 109 f.

1, Hat. meg az $y=x^2$ görbevonal és az $y=x$ egyenes által bezárt területet.

2, Hat. meg az $y=x^3-7x^2+10x$ görbevonal és az $y=0$ egyenes által bezárt területet.

3, Hat. meg a 2 parabolaág által bezárt síkrész területét:
$y_1=[-3x] = -3+8x-2x^2$ $\quad y_2 = 6-4x+x^2$ $\quad$ [4]

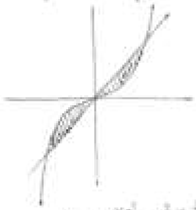
4, $y=6+x-x^2$ x-tengely [125/6]

5, Szám. ki az $y=2x+3$ egyenes az x t. és az $x=1$ és $x=4$ absz. pontokhoz tartozó ordináták által hat. síkrész területét.

6, Hat. meg a köv. fg. által jellemzett görbevonalak és az x t. által bezárt terület nagyságát a kezdőpont és a 4-absz. pont között.

$$y = x^3$$
$$y = x^3/4 + x^2/3 - x$$

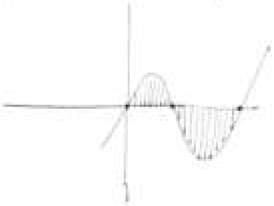
1. $y = x^3 \quad y = x$



$y = y \Rightarrow x^3 = x$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$

$$T = 2\int_0^1 x^3 dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ o^2$$

2. $y = x^3 - 7x^2 + 10x \quad y = 0$



$x(x^2 - 7x + 10) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2$

$$T = \left|\int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10x)\,dx\right| + \left|\int_2^5 (x^3 - 7x^2 + 10x)\,dx\right| =$$

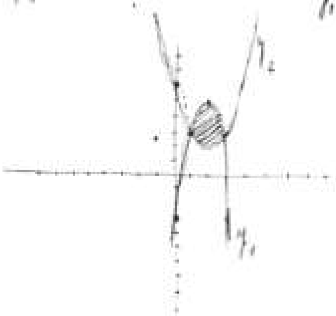
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2\right]_0^2\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2\right]_2^5\right| =$$

$$= \left|4 - \frac{56}{3} + 20\right| + \left|\frac{625}{4} - \frac{875}{3} + 125 - 4 + \frac{56}{3} - 20\right| =$$

$$= \frac{72-56}{3} + \left|101 + \frac{625}{4} - \frac{819}{3}\right| = \frac{16}{3} + \left|101 - 273 + 156\tfrac{1}{4}\right| =$$

$$= \frac{16}{3} + 15\tfrac{3}{4} = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{64 + 189}{12} = \frac{253}{12} = 21\tfrac{1}{12}\ o^2$$

3. $y_1 = -3 + 8x - 2x^2$
$y_2 = 6 - 4x + x^2$



$y_1 = y_2 \rightarrow -3 + 8x - 2x^2 = 6 - 4x + x^2$
$0 = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 1$

$$T = \int_1^3 (-3 + 8x - 2x^2 - 6 + 4x - x^2)\,dx = \int_1^3 (-9 + 12x - 3x^2)\,dx$$

$$T = \left|\left[-9x + \frac{12x^2}{2} - \frac{3x^3}{3}\right]_1^3\right| = \left|\left[-9x + 6x^2 - x^3\right]_1^3\right| =$$

$$= \left|-27 + 54 - 27 + 9 - 6 + 1\right| = 4\ o^2$$

4. $y = 6 + x - x^2$
$6 + x - x^2 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$
$x_1 = -2 \ ; \ x_2 = 3$

$$T = \left|\int_{-2}^3 (6 + x - x^2)\,dx\right| = \left|\left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^3\right| =$$

$$= \left|18 + \frac{9}{2} - 9 + 12 + 2 - \frac{8}{3}\right| = \left|19 + \frac{27-16}{6}\right| = \left|19 + 1\tfrac{5}{6}\right| = 20\tfrac{5}{6}\ o^2$$

5. $y = 2x + 3 \quad x\langle 1; 4\rangle$

$$T = \int_1^4 (2x+3)\,dx = \left[x^2 + 3x\right]_1^4 = 16 + 12 - 1 - 3 = 28 - 4 = 24\ o^2$$

6. $y = x^3 \quad x\langle 0; 4\rangle \quad T = \left|\int_0^4 x^3\,dx\right| = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{4^4}{4} = 4^3 = 64\ o^2$

$y = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} - x \quad x\langle 0; 4\rangle \quad T = \left|\int_0^4 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} - x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4\right| =$

$$= \left|16 + \frac{64}{9} - 8\right| = 8 + 7\tfrac{1}{9} = 15\tfrac{1}{9}\ o^2$$

16.

1)
$y = x^2 - 5x + 3 \qquad x\langle 0;5\rangle$

$x^2 - 5x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \qquad x_1 = 2{,}5 + \sqrt{13/4} \qquad x_2 = 2{,}5 - \sqrt{13/4}$

$x_1 \doteq 4{,}3 \qquad x_2 \doteq 0{,}7$

$$T \doteq \left|\int_0^{0,7}(x^2-5x+3)dx\right| + \left|\int_{0,7}^{4,3}(x^2-5x+3)dx\right| + \left|\int_{4,3}^{5}(x^2-5x+3)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x\right]_0^{0,7}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x\right]_{0,7}^{4,3}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x\right]_{4,3}^{5}\right| =$$

$$= \left|\frac{0{,}343}{3} - \frac{2{,}45}{2} + 2{,}1\right| + \left|\frac{79{,}5}{3} - \frac{92{,}45}{2} + 12{,}9 - \frac{0{,}343}{3} + \frac{2{,}45}{2} - 2{,}1\right| +$$

$$+ \left|\frac{125}{3} - \frac{125}{2} + 15 - \frac{79{,}5}{3} + \frac{92{,}45}{2} - 12{,}9\right| =$$

$$= \left|\overset{A}{0{,}114 - 1{,}22 + 2{,}1}\right| + \left|\overset{B}{26{,}5 - 46{,}22 + 12{,}9} - A\right| + \left|41{,}7 - 62{,}5 + 15 - B\right| =$$

$$= 0{,}994 + 7{,}814 + 12{,}6 \doteq \underline{\underline{21{,}408}}\ \text{j}^2$$

$13 : 4 = 3{,}25$
10
20

$\sqrt{3{,}25} = 1{,}8$
$225 : 28 \cdot 8$
$= 1$

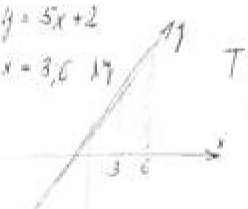
$4{,}3^2 \; 18{,}49 \cdot 4{,}3$
16 7396
249 5547
79,507

2,294
−1,22
1,994
46,22
39,40
6,82
0,994
7,814

62,5
−56,7
5,8

5,8
6,8
12,6

2)
$y = 5x + 2$
$x = 3, 6$

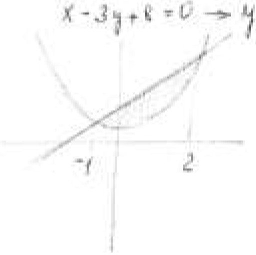


$$T = \int_3^6 (5x+2)dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 2x\right]_3^6 = \left(\frac{180}{2} + 12\right) - \left(\frac{45}{2} + 6\right) = 102 - 28{,}5 = \underline{\underline{73{,}5\ \text{j}^2}}$$

61 →

3)
$y = \frac{x^2}{3} + 2$

$x - 3y + 8 = 0 \rightarrow y = \frac{x+8}{3}$



$y = y \rightarrow \frac{x^2+6}{3} = \frac{x+8}{3}$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = +2$

$$T = \int_{-1}^{2}\left(\frac{x}{3} + \frac{8}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{6}{3}\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(7{,}5 - 3) = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5 = \underline{\underline{1{,}5\ \text{j}^2}}$$

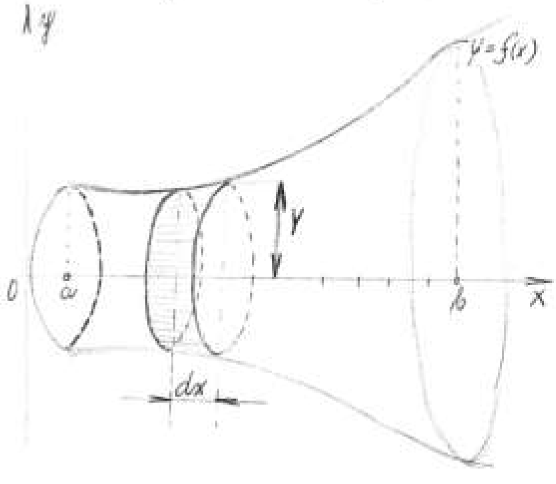
A forgástestek köbtartalmának kiszámítása

A mértani feladatok megoldásánál, a testek köbtartalmának kiszámításához felhasználhatjuk a határozott integrált.

[Ha $n \to \infty$-re és $\Delta x \to 0$-hoz tartanak az alsó ill. felső közelítő határértékek, azok megegyeznek. Ezen határértékek közös értéke az $f(x)$ függv. határozott integrálja $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$.]

Ez a művelet a kubatúra.

Csak a forgástestekkel foglalkozunk, amelyek az $y=f(x)$ függvénnyel meghatározott görbének az x tengely körüli forgásával (rotációjával) jön létre.
Azonkívül adott két az x tengelyre merőleges sík, melyek közt fekszik a forgástest adott (keresett) része.



$$\frac{b-a}{n} = dx$$

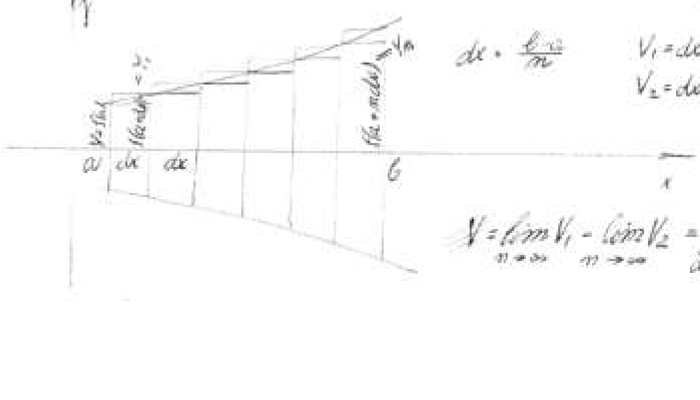
Egy térfogat-elem köbtartalma adott a dx magasságú és Y sugarú henger térfogatával: $dV = y^2\pi \cdot dx$

Tehát a keresett térfogat:
$$V = \pi\int_a^b y^2 dx$$

Az x tengellyel; az $y=f(x)$ görbe x_1 és x_2 abszcisszájú végpontjai~~val meghatározott~~ ívétől meghatározott területnek az x tengely körüli forgatásával létrejött mértani test térfogata: $V=\pi\int_a^b y^2 dx$.

Ha a test az y tengely körüli forgatással jön létre: $V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$.

[bebizonyítható, hogy $\lim_{n\to\infty} s_{nV} = \lim_{n\to\infty} S_{nV} = \pi\int_a^b y^2 dx = V$]:



$dx = \frac{b-a}{n}$

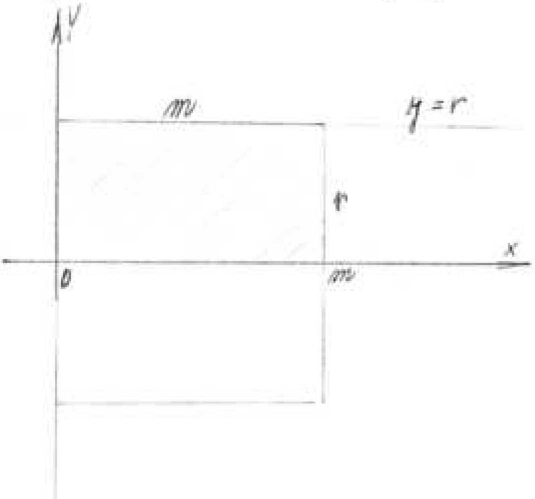
$V_1 = dx\cdot\pi(y_1^2 + \dots + y_n^2) = S_{nV}$

$V_2 = dx\,\pi(y_0^2 + y_1^2 + \dots y_{n-1}^2) = s_{nV}$

$$V_1 > V > V_2$$

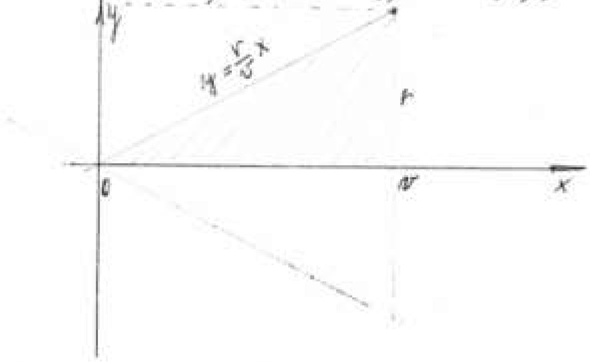
$$V = \lim_{n\to\infty} V_1 = \lim_{n\to\infty} V_2 = \int_a^b \pi y^2 dx = V$$

IV. 1, Szám. ki a forg. henger térfogatát, mely egy téglalapnak az egyik oldala körüli forgatásával keletkezik.



$$V = \pi\int_0^m r^2\,dx = \pi r^2\left[x\right]_0^m = \underline{\underline{\pi r^2 m}}$$

2, Szám. ki a forg. kúp térfogatát, mely egy derékszögű háromszögnek az egyik befogója körüli rotációjával jön létre.



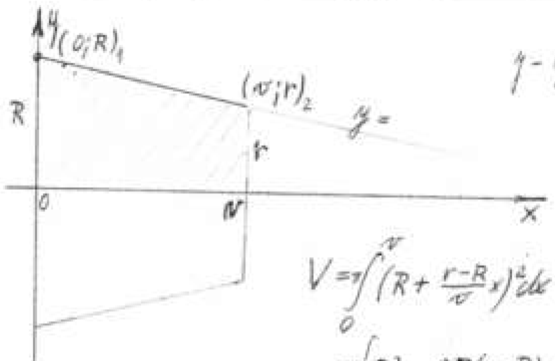
$$y = x\,tg\,\alpha = \frac{r}{v}x$$

$$dV = \pi y^2\,dx$$

$$V = \int_0^v \pi y^2\,dx = \pi\int_0^v \frac{r^2}{v^2}x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{v^2}\int_0^v x^2\,dx$$

$$V = \frac{\pi r^2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{\pi r^2 v^3}{v^2\cdot 3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}r^2\pi\cdot v}}$$

3, Szám. ki a csonkakúp térfogatának megadó képletet



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \rightarrow y - R = \frac{r-R}{v}x$$

$$\downarrow$$

$$y = R + \frac{r-R}{v}x$$

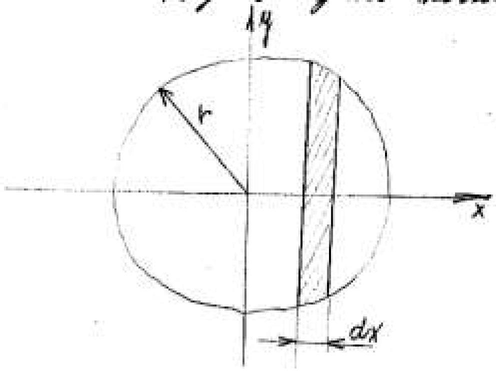
$$dV = \pi\,dx\left(R + \frac{r-R}{v}x\right)^2$$

$$V = \pi\int_0^v\left(R + \frac{r-R}{v}x\right)^2 dx = \pi\left[\int_0^v R^2\,dx + \int_0^v \frac{2R(r-R)x}{v}\,dx + \int_0^v \frac{(r-R)^2x^2}{v^2}\,dx\right]$$

$$= \pi\left[R^2 v + \frac{2R(r-R)v^2}{2v} + \frac{(r-R)^2 v^3}{3v^2}\right] =$$

$$= \pi\,\frac{3R^2v^3 + 3R(r-R)v^3 + (r-R)^2v^3}{3v^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi\cdot v\left(R^2 + Rr + r^2\right)}}$$

4. Hat. meg a gömb köbtartalmát kifejező képletet:



$$y^2+x^2=r^2 \rightarrow y^2=r^2-x^2$$

$$dV=\pi \cdot y^2 dx = \pi(r^2-x^2)dx$$

$$V=2\pi\int_0^r (r^2-x^2)dx = 2\pi r^2\Big[x\Big]_0^r - 2\pi\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^r$$

$$V=2\pi r^3 - 2\pi\frac{r^3}{3} = \frac{6}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \underline{\underline{\frac{4}{3}r^3\pi}}$$

5. A gömbszelet térfogata:

$$V=\pi\int_a^r (r^2-x^2)dx \qquad a=r-v \qquad (v - \text{a gömbsz. mag.})$$

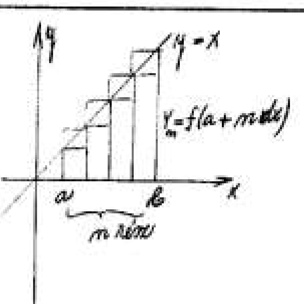
$$V=\pi\int_{r-v}^r (r^2-x^2)dx = \pi\Big[r^2x-\frac{x^3}{3}\Big]_{r-v}^r = \pi\Big[r^3-\frac{r^3}{3}-r^2(r-v)+\frac{(r-v)^3}{3}\Big]=$$

$$=\pi\frac{3r^3-r^3-3r^3+3r^2v+r^3-3r^2v+3rv^2-v^3}{3}=\frac{\pi}{3}(3rv^2-v^3)=\underline{\underline{\frac{\pi v^2}{3}(3r-v)}}$$

6. Hat meg a forgási - paraboloid köbtartalmát az $\langle a;b\rangle$ intervallumban, mely az $y^2=2px$ parabola x tengely körüli rotációjával jön létre.

$$dV=\pi y^2 dx = \pi \cdot 2px\,dx = 2p\pi \cdot x\,dx$$

$$V=2p\pi\int_a^b x\,dx = 2p\pi\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_a^b = 2p\pi\Big(\frac{b^2-a^2}{2}\Big) = \underline{\underline{p\cdot\pi(b^2-a^2)}}$$



$$V>V^*>K$$

$$V=\pi dx\big(f(a)+f(a+dx)+\dots f(a+(m-1)dx)\big)$$

$$K=\pi dx\big[f(a+dx)+\dots+f(a+m\,dx)\big]$$

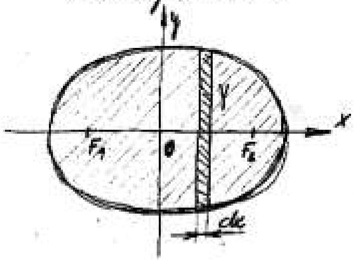
$$V=\pi dx\big[m a+(1dx+2dx+\dots+(m-1)dx)\big]=\pi dx\Big[ma+dx\frac{1+(m-1)}{2}m\Big]$$

$$K=\pi dx\big[m a+(1dx+2dx+\dots\ m\,dx)\big]=\pi dx\Big[ma+dx\frac{1+m}{2}\cdot m\Big]$$

$$V=\pi dx\, m\Big(a+\frac{m}{2}dx\Big)=\pi\frac{b-a}{m}m\Big(a+\frac{m}{2}\frac{b-a}{m}\Big)=\pi(b-a)\Big(a+\frac{b-a}{2}\Big)$$

IV. 18. 112. óra

1.) $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$



$$V = \pi\int_0^b y^2\,dx$$

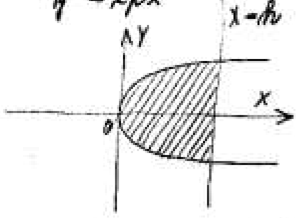
$$y^2 = \frac{a^2b^2 - x^2b^2}{a^2} = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = 2\pi\int_0^a\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx = 2\pi b^2\int_0^a dx - 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a x^2\,dx$$

$$V = 2\pi b^2 a - 2\pi\frac{b^2}{\cancel{a^2}}\frac{a^{\cancel{3}}}{3} = 2\pi b^2 a - 2\pi b^2 a : 3$$

$$\underline{V = \frac{4}{3}\pi a b^2}$$

2.) $y^2 = 2px$

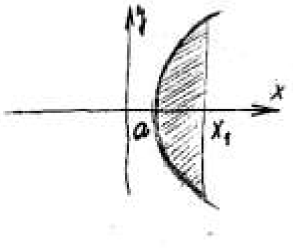


$$V = \pi\int_0^h y^2\,dx$$

$$V = \pi\int_0^h 2px\,dx = \pi 2p\int_0^h x\,dx = 2\pi p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \underline{\pi \cdot p \cdot h^2}$$

3.)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (x) $\langle a; x_1\rangle$



$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \rightarrow y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$$

$$V = \pi\int_a^{x_1}\left(\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2\right)dx = \pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) - \pi b^2 x_1 + \pi b^2 a$$

$$V = \pi b^2\left(\frac{x_1^3}{3} - x_1\right) - \pi b^2\left(\frac{a}{3} - a\right) = \pi b^2\left[\frac{x_1^3 - a}{3} + a - x_1\right]$$

$x^2 - y^2 = 4$ (y) [64/3π]
$y = \pm 2$

$x \cdot y = 4$ $x_1 = 1$ $x_2 = 4$ (x) $y = 0$ [12π]

1.)
$$x^2 - y^2 = 4$$

$$V = 2\pi\int_0^2 x^2\,dy = 2\pi\int_0^2 (4 + y^2)\,dy = 2\pi\cdot 4\cdot 2 + 2\pi\cdot\frac{8}{3} = 16\pi + 16/3\,\pi = \underline{\underline{\frac{64}{3}\pi}}$$

2.)
$$XY = 4 \quad X_1 = 1 \quad X_2 = 4$$

$$V = \pi\int_1^4 \frac{16}{x^2}\,dx = \pi\int_1^4 16x^{-2}\,dx = 16\pi\int_1^4 x^{-2}\,dx = 16\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = 16\pi\cdot\frac{-1}{4} - 16\pi\frac{-1}{1}$$

$$V = -4\pi + 16\pi = \underline{\underline{12\pi}}$$

113. óra

Axiómák, definíciók, tételek és bizonyítások 1968. IV.

<u>Az axióma</u> - alaptulajdonság. - olyan matematikai igazság, melyet bizonyítani nem kell, de nem is tudunk, könnyen beláthatók.
Az axiómák nem lehetnek ellentmondóak és nem következhet egyik a másikból ill. függetlenek egymástól. Pl:

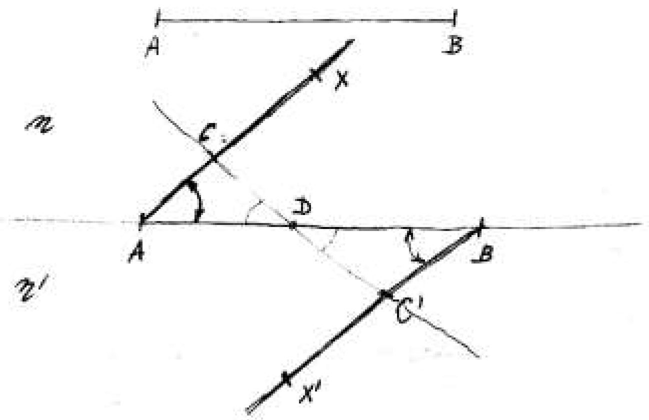
Az illeszkedés axiómái:
1. két pontra egy és csak 1 egyenes illeszkedik
2. három nem egy egyenesen "fekvő" pontra egy és csak egy sík illeszkedik.
3. Ha egy egyenes 2 pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik arra a síkra.
4. Az egyenesnek végtelen sok pontja van.
5. Egy sík bármely pontjára a síknak végtelen sok egyenese illeszkedik.
6. A tér minden pontjára végtelen sok sík illeszkedik.
7. Két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.
8. Ha egy egyenes és 1 sík nem illeszkedik egymásra, akkor legfeljebb egy közös pontjuk van.

A rendezés axiómái:
1. Az egyenesen fekvő 3 különböző pont közül mindig csak 1 fekszik a másik kettő között.
2. A tér bármely P pontja a rajta áthaladó tetszőleges g egyenest 2 részre osztja úgy, hogy ezeket a részeket g_1, g_2-vel jelölve, a g egyenes minden pontpárját a P akkor és csak akkor választja el, ha a két pont egyike g_1-hez, másik g_2-höz tartozik.

3. A tér bármely e egyenese a rajta áthaladó merőleges α síkot 2 részre osztja úgy, hogy bármely A és B pontok akkor és csak akkor tartoznak az α két különböző részéhez, ha az AB egyenes metszi e-t s, ez az metszéspont elválasztja A és B pontot.
4. A teret bármely γ sík 2 részre osztja úgy, hogy bármely A és B pontok akkor és csak akkor tartoznak a ~~tér~~ két különböző részéhez, ha az AB egyenes metszi γ-t, s ez a metszéspont elválasztja az A, B pontokat.

Definíció - meghatározás - az a gondolkodási művelet, mely a fogalom tartalmát feltárja a definíció v. meghatározás.
Pl: mi a kör, az ellipszis, parabola, gömb, ...

A tétel fogalma. - azokat a matematikai ítéleteket, melyeket bizonyítani kell, matematikai tételeknek nevezzük.
Minden matematikai tétel feltételből és következtetésből áll. A feltétel rendszerint ha szóval, a következtetés pedig akkor kifejezéssel kezdődik.
Tétel: Minden szakaszon van egy pont, mely felezi:



$BAX\sphericalangle = ABX'\sphericalangle$

$AC = BC'$

$ADC\sphericalangle = C'DB\sphericalangle$

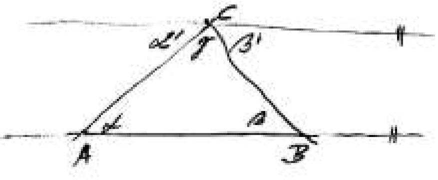
$\Downarrow$

$ADC\triangle \cong BDC'\triangle$

$\Downarrow$

$\underline{AD = BD}$

A Δ belső szögeinek összege 180°.



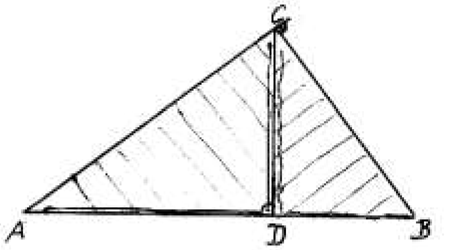
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$ $\Big/ \begin{matrix} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{matrix}$

$\underline{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

R∢Δ

A háromszög magassága a befogók vetületeinek mértani középarányosa



$CD^2 = AD.BD \qquad CD = \sqrt{AD.BD}$

$DAC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$

$ADC\triangle \sim ACB\triangle$

$ADC\triangle \sim CDB\triangle$

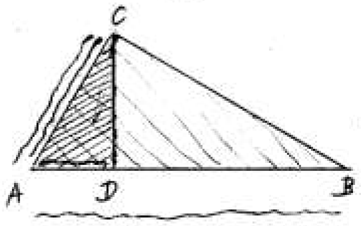
$DC : AD = BC : DC \quad / \cdot AD.DC$

$DC^2 = AD.BD$

$\underline{DC = \sqrt{AD.BD}}$

A ~~derékszögű~~ Δ befogójának emelt négyzet t. egyenlő az átfogó és az adott befogónak az átfogóra való derékszögű vetületének a szorzatával.

A R∢Δ befogója mértani középarányos az átfogó és a befogó vetületétől.



$ABC\triangle \sim ACD\triangle$

$\Downarrow$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

$AC^2 = AB.AD$

$\underline{AC = \sqrt{AB.AD}} \qquad BC = \sqrt{AB.BD}$

$ABC\triangle \sim CBD\triangle$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} \quad / BC \cdot AB$$

$AB \cdot BD = BC^2 \qquad \underline{BC = \sqrt{AB \cdot BD}}$

Pithagorasz tétele:

A R∢Δ-ben az átfogó négyzete egyenlő befogói négyzetének összegével

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

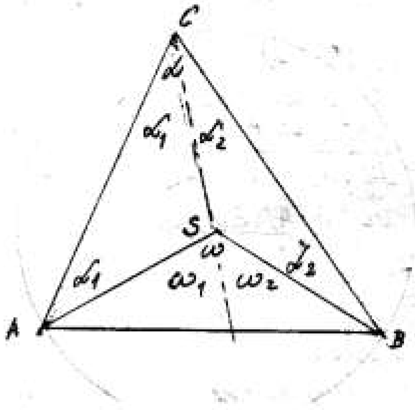
$AC^2 = AD.AB$

$BC^2 = AB.BD$

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + AB.BD = AB(AD + BD) = AB(\overbrace{AD + DB}^{AB})$$

$\underline{AC^2 + BC^2 = AB^2}$

Ugyanabban a körben bármely kerületi szög fele az ugyanazon körívhez tartozó középponti szögnek.



$\alpha = \frac{\omega}{2}$

$ASC\triangle \rightarrow AS = SC \rightarrow SCA\measuredangle = SAC\measuredangle$

$SC = SB \Rightarrow SCB\measuredangle = SBC\measuredangle$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1 - ASC\triangle \text{ külső szöge} \\ \omega_2 - BSC\triangle \text{ —"—}\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\omega_1 = 2\alpha_1 \\ \omega_2 = 2\alpha_2\end{array}$$

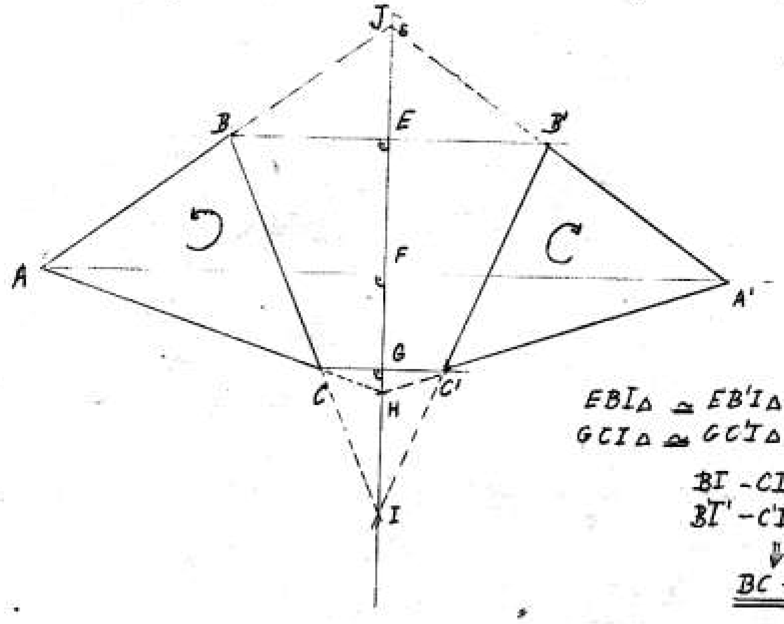
$\omega = \omega_1 + \omega_2$

$\omega = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$

$\omega = 2(\alpha_1 + \alpha_2) \quad / \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

$\underline{\omega = 2\alpha}$

A tengelyes szimmetria ellentett-járású egybevágóság.



$BE = EB'$

$CG = C'G$

$EBI\triangle \cong EB'I\triangle \rightarrow BI = B'I'$

$GCI\triangle \cong GC'I\triangle \Rightarrow CI = C'I'$

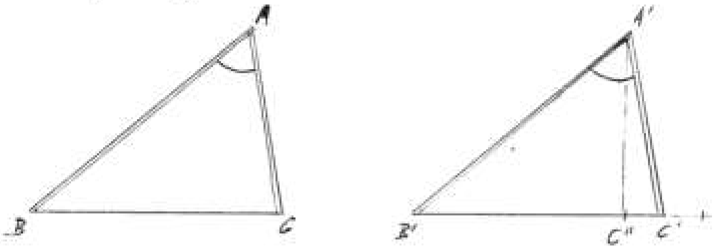
$BI - CI = CB$

$B'I' - C'I' = C'B'$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{BC = B'C'}}$

Két Δ egybevágó, ha két-két megfelelő oldala és a közbezárt szöge egyenlő



$AB = A'B'$
$AC = A'C'$
$BAC\sphericalangle = B'A'C'$

$ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$

Egyenlő oldallal szemben egyenlő szög.

$ABC\sphericalangle = A'B'C'\sphericalangle$ / $\sphericalangle\Delta = 180^\circ$

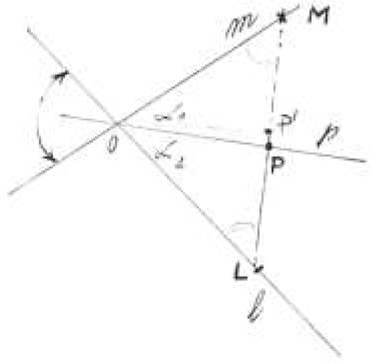
$\Downarrow$

$A'C'B'\sphericalangle = ACB\sphericalangle$

$BC = B'C'$

fordított bizonyítás: feltét, hogy $BC \neq B'C'$, de akkor kell hogy $BC = BC''$, de akkor $BAC\sphericalangle = B'A'C''$, ami nem igaz, mert $BAC\sphericalangle$ egyszerre nem azonos $B'A'C'\sphericalangle$ és $B'A'C''$ szöggel, csak ha $C' = C''$.

Szögek szögfelezője: $pm\sphericalangle = pl\sphericalangle$



felvesszük $MO = LO$ szakaszt.

~~OLMΔ – egyenlő old., egyenlő szög:~~
~~$OMP\sphericalangle = OLP\sphericalangle$~~
~~Felt., hogy $\alpha_1 = \alpha_2$ → $OPM\sphericalangle = OPL\sphericalangle$, $MP = PL$~~
~~$\Downarrow$~~
~~$OMP\Delta \cong OLP\Delta$~~

$OMP\sphericalangle = OLP\sphericalangle$ $\quad OL = OM$

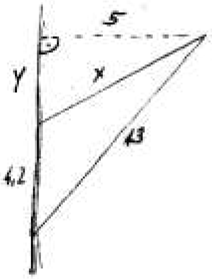
felvez. P-L: $MP = PL$; O, P-n csak 1 egyenes $\Big\}$ $OM = OL$, $OP = OP$, $MP = LP$

$\Downarrow$

$OMP\Delta \cong OLP\Delta$

$$\underbrace{OMP\sphericalangle = OLP\sphericalangle \quad MPO\sphericalangle = LPO\sphericalangle}_{\alpha_1 = \alpha_2}$$

1. Egy falra szerelt fogódzón álló létrája 13 m-es és a létra végpontjának távolsága a tengelytől 5 m. Mekkora a felső rész hossza, ha a létra tengelyre fogó talpai 4,2 m-re vannak egymástól.



(1) $25+Y^2=X^2$

$25+(Y+4{,}2)^2=169$

$25+Y^2+8{,}4Y+17{,}6=169$

$Y^2+8{,}4Y=127{,}4$

$Y^2+8{,}4Y-127{,}4=0$

$Y_{1,2}=\frac{-8{,}4\pm\sqrt{70{,}5+509{,}6}}{2}=\frac{-8{,}4+\sqrt{580{,}1}}{2}$

$Y=-4{,}2+12\doteq7{,}8.$

$X^2=25+Y^2\doteq25+61=86$

$\underline{\underline{X\doteq9{,}3\text{ m}}}$

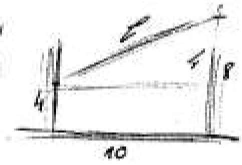
2. Két gyárépület között anyagszállításhoz légicsúszdát építettek. Határozzuk meg a csúszda hosszát, ha a gy. épületek távolsága 10 m és a cs. végeit 8 ill. 4 m magasan kötjük el.

3. Az űrhajó 302 km magasba emelkedett Földünk felszínéről. Földgömbünk azt a részét, melyet ebből a magasságból látott, gömbsüvegnek mondják. Számítsd ki e földgömbsüveg magasságát és a Földgömbnek azt a részét, melyet a magasból látott.

4. Szerk. adott téglalappal egyenlő területű négyzetet.

Kidolg.:

(2)



$l^2=10^2+4^2$

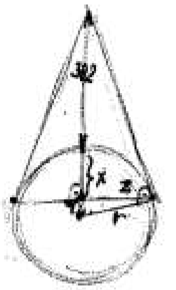
$l=\sqrt{100+16}$

$l=\sqrt{116}$

$\underline{\underline{l\doteq10{,}8\text{ m}}}$

(4)

(3)



$r\doteq6370\text{ km}=x+Y\longrightarrow Y\doteq6370-x$

$z^2=r^2-Y^2=Y\cdot(302+x)$

$r^2-Y^2=302Y+xY$

$r^2-(6370-x)^2=302(6370-x)+x(6370-x)$

$\cancel{6370^2}-\cancel{6370^2}+12740x+x^2=302\cdot6370-302x+6370x-x^2$

$2x^2+6672x-1923700=0$

$x^2+3336x-961850=0$

$x=-1668+\sqrt{2780000-961850}\doteq-1668+\sqrt{1818150}$

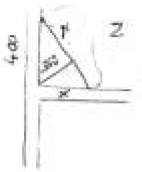
$X\doteq-1668+1348\doteq-320$

főrendezés + számozás.

5\. Két egyenes országút derékszögben keresztezi egymást. Az egyiktől 400 m-re a kereszteződéstől gyalogút ágazik el a másik úthoz. A gyalogút legkisebb távolsága az útkereszteződéstől 350 m. Milyen hosszú a gyalogút és hol csatlakozik a másik úthoz?

6\. Egy csavaranya oldala 2,5 cm hosszú, milyen x nyílású csavarkulcs kell hozzá, ha a csavar és a csavarkulcs között 0,5 mm hézagra is szükség van. [4,4cm]

5.



$x : 350 = 400 : Y \rightarrow x = \frac{400 \cdot 350}{Y}$

$Y = \sqrt{400^2 - 350^2} = \sqrt{100^2 4^2 - 100^2 3{,}5^2} = 100\sqrt{16 - 12{,}25} = 100\sqrt{3{,}25}$

$Y = 100 \cdot 1{,}8 \doteq \underline{180\ m}$

$x = \frac{140000}{180} = \frac{7000}{9} = \underline{777{,}7\ m}$

$Z = \sqrt{400^2 + x^2} = \sqrt{100^2(4^2 + 7{,}77^2)} = 100\sqrt{16 + 60{,}8}$

$Z = 100\sqrt{76{,}8}$

$Z \doteq 100 \cdot 8{,}76 = \underline{876}$

$\underline{876\ m \quad 778\ m}$

6.

$t = 2\sqrt{2{,}5^2 - 1{,}25^2} + 0{,}1 = 2\sqrt{6{,}25 - 1{,}56} + 0{,}1 = 2\sqrt{4{,}69} + 0{,}1$

$t = 2 \cdot 2{,}165 + 0{,}1 = 4{,}33 + 0{,}1 = \underline{4{,}43\ cm}$

A valószínűségszámítás elemei

A vsz. fogalma, az „egyszerű" valószínűség

A mindennapi életben valamely eseménynek bekövetkezését valószínűnek v. valószínűtlennek mondjuk aszerint, amint az az esemény „megegyező" körülmények mellett általában véve gyakran v. ritkán szokott bekövetkezni.

A matematikában az esemény bekövetkezésének valószínűségét oly törtszám fejezi ki, amelynek számlálója az esemény bekövetkezésére nézve „kedvező" esetek számát, nevezője pedig az összes lehetséges esetek számát jelenti. Az így kifejezett valószínűséget „egyszerű" v. abszolut valószínűségnek nevezzük.

$$v=\frac{k}{l}$$

v – abszolut valószínűség
k – kedvező esetek
l – összes lehetséges esetek száma

Pl: Mennyi annak a vsz., hogy egy kockával 5-nél kisebb számot dobunk?

$$l=6,\quad k=4 \rightarrow v=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=0,\dot{6}$$

Az „egyszerű" valószínűséget mindig valódi törtszám fejezi ki. Ha a vsz.-et kifejező tört értéke az egység, vagyis:

$$v=\frac{k}{l}=1 \rightarrow k=l$$

akkor a valószínűség bizonyossággá válik.
Ebben az esetben az összes lehetséges eset kedvező is.
Pl: kockával 7-nél kisebb számot dobni.

Ha ellenben a vsz. értékét kif. tört értéke 0:

$$v=\frac{k}{l}=0 \rightarrow k=0,$$

azaz kedvező eset egyáltalán nincsen a vsz-ég tehát lehetetlenséggé válik.

Aszerint hogy $v \gtreqless \frac{1}{2}$ az esemény bekövetkezését valószínűnek, bizonytalannak ill. valószínűtlennek nevezzük.
A valószínűtlenség tehát nem ellentéte a valószínűségnek, hanem annak csak alacsonyabb foka.
Pl. Hogy kockával 1 dobásra páros számot dobunk – bizonytalan,
-"- 5-nél kisebb számot dobunk – valószínű,
hogy éppen 2-t dobjunk – valószínűtlen.
Ha valamely esemény l eset közül k kedvező esetben bekövetkezik, akkor $l-k$ esetben az ún. kedvezőtlen esetekben nem következik be. A be nem következés valószínűsége tehát $v_1=\frac{l-k}{l}$

Melyet az eredeti valószínűség ellentett valószínűségének nevezünk.

$$v + v_1 = v + 1 - v = 1 \qquad v_1 = \frac{\ell}{\ell} - \frac{k}{\ell} = 1 - v$$

Az ellentett valószínűségek összege az egység.

1,) $$1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{Y}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{Y}{3Y+1}} = 1+\frac{1}{\frac{6Y+2+Y}{3Y+1}} = 1+\frac{3Y+1}{7Y+2} = \frac{7Y+2+3Y+1}{7Y+2} = \frac{10Y+3}{7Y+1}$$

2,) $$\frac{\frac{x}{4}-\frac{x-1}{5}}{\frac{x+1}{6}-\frac{x-1}{10}} = \frac{\frac{5x-4x+4}{20}}{\frac{10x+10-6x+6}{60}} = \frac{\frac{x+4}{20}}{\frac{4x+16}{60}} = \frac{60(x+4)}{20.4(x+4)} = \frac{3}{4}$$

3,) $$\frac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{2-\frac{1+b^2}{b}}{\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b}+1} = \frac{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}}{\frac{a^2-b^2-a^2-b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{\frac{2b-1-b^2}{b}}{\frac{1-2b+b^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2-b^2-a^2-b^2)} \cdot \frac{b^2(2b-1-b^2)}{b(1-2b+b^2)} =$$

$$= \frac{4ab}{-2b^2} \cdot \frac{b.-(1-b)^2}{(1-b)^2} = \frac{-4ab^2}{-2b^2} = 2a.$$

1968. V. 9.

$$\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{16-11} + \frac{(3-\sqrt{7})}{9-7} - \frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} =$$

$$= \frac{20+5\sqrt{11}}{5} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} - \frac{6\sqrt{7}+12}{3} - \frac{\sqrt{7}-5}{2} = \frac{120+30\sqrt{11}+45-15\sqrt{7}-60\sqrt{7}-120-15\sqrt{7}+75}{30} =$$

$$= \frac{30\sqrt{11} - 90\sqrt{7} + 120}{30} = \sqrt{11} - 3\sqrt{7} + 4$$

$$\frac{1}{(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[6]{x^5}}{\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)^{-2}}$$

[illegible]

$$x + \frac{4x-7}{9} = \frac{x}{6} - \frac{10}{3} \quad /\cdot 18$$

$$18x + 8x - 14 = 3x - 60$$

$$23x = -46$$

$$x = -2$$

[illegible]

V.

$|x-4| \leqq 3$

$x-4 \geqq 0 \longrightarrow |x-4| = x-4$

$x-4 \leqq 3$

$x \leqq 7$

$x-4 < 0 \longrightarrow |x-4| = 4-x$

$4-x \leqq 3$

$-x \leqq -1$

$x \geqq 1$

$x^2-3x+2 > 0$

$(x-1)(x-2) > 0$

$x-1 > 0 \rightarrow x > 1$

$x-2 > 0 \rightarrow x > 2$

$x < 1$

$x < 2$

A teljes és viszonylagos valószínűség

A lehetséges esetek száma l és ezek közül több egymást kizáró kedvező esetek száma $k_1, k_2, k_3 \dots$, akkor annak valószínűsége, hogy a kedvező esetek valamelyike bekövetkezik:

$$v = \frac{k_1+k_2+k_3 \dots}{l} = \frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{l} + \frac{k_3}{l} + \dots +$$

$$v = v_1+v_2+v_3+ \dots$$

Annak valószínűségét tehát, hogy több egymást kizáró kedvező eset közül valamely bekövetkezik úgy kapjuk meg, hogy az egyes kedvező esetek valószínűségének összegét vesszük.

Az egymást kizáró esetek valószínűségét teljes v. totális valószínűségnek is nevezik.

pl.: Mi a vsz. annak, hogy 2 kockával összesen 6-ot v. 7-et v. 8-at dobunk.

$l = V_6^{i,2} = 6^2 = 36$

6	$k_1 = 5$	7	$k_2 = 6$	8	$k_3 = 5$
1,5		1,6		2,6	
2,4		2,5		3,5	
3,3		3,4		4,4	
4,2		4,3		5,3	
5,1		5,2		6,2	
		6,1			

$$v = v_1+v_2+v_3 = \frac{k_1}{l}+\frac{k_2}{l}+\frac{k_3}{l}$$

$$v = \frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Ha viszont azt keressük, hogy mi a vsz.-e annak, hogy két „bekövetkezhető" kedvező eset közül az egyik előbb köv. be, mint a [illegible], akkor [illegible] fajta relatív v. viszonylagos vsz.-nek nevezzük.

A viszonylagos vsz. mértékének megállapításánál tulajdonképpen csak az esetekkel, melyek nem kedvezők, figyelmen kívül is hagyhatjuk, mert ezek az eredményre befolyással nincsenek.

Mivel az „összes kedvező" esetek száma $k_1+k_2+k_3+\dots$ azért annak vsz.-e, hogy a k_1 eset előbb követ. be

$$v = \frac{k_1}{k_1+k_2+k_3+\dots}$$

hogy ezt az eredményt is az egyes esetek vsz.-ével kifejezhessük, elosztjuk a tört számlálóját és nevezőjének minden tagját a lehetséges esetek számával, akkor

$$v = \frac{\frac{k_1}{l}}{\frac{k_1}{l}+\frac{k_2}{l}+\frac{k_3}{l}+\dots} = \underbrace{\frac{v_1}{v_1+v_2+v_3\dots} = v}$$

A viszonylagos vsz. tehát a kiemelt kedvező eset egyszerű vsz.-ségének és az összes kedvező esetek egyszerű vsz.-ségéből alkotott összegnek hányadosával egyenlő.

pl.: mi a vsz annak, hogy 2 kockával előbb dobunk 7-et, mint 6-ot v. 8-at?

$l = 36$
$k_6 = 5$
$k_7 = 6$
$k_8 = 5$

$$v = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{5+5+6}{36}} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{16}{36}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

A vsz. számítás elméletét Kolmogorov szovj. matematikus 1933-ban megjelent könyvében fektette le.

Egy urnában 12 fehér és bizonyos számú fekete golyó van. Mennyi a fekete golyók száma, ha annak valószínűsége, hogy feketét húzunk: 2/5

x fekete golyó — kedvező eset
lehető eset $x+12$

$$\frac{x}{12+x} = \frac{2}{5}$$
$$5x = 24 + 2x$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

$y = x^2 - 6x + 5$ par. ág és az x teng ált. bezárt síkr. ter. $(0;6)$

$y = \frac{x^2}{2} + 2$ p. és az $x - 2y + 10 = 0$ egy. ált. hat. ter.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ h. az $\underline{x}$ t. körül való forg. szárm. test köbt.
$(a;2a)$ $[4/3\pi ab^2]$

$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$ ell. az $\underline{x}$. t. k. v. f. sz. t. köbtartalmát
$[4/3\pi ab^2]$

Bólyai. Geo. II. 147/2
148/3
154/2

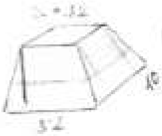
Egy virággyűjtő medence ....

4.) Csonkagúla alakú 65 cm magas négyzetes fenekének éle 32 cm, fedőéle 52 cm. Mennyit nyom a benne levő föld, ha a ládát 50 cm magasságig tölti meg. ($1 m^3$ f. súlya 1400 kp). [112]

5.) Öntöttvasból készült szabályos négyoldalú gúla súlya 1012,2 kp, alapéle 45 cm. Mekkora a magassága. $\rho = 7,5$. [19,99 dm]

6.) Egy szabályos négyoldalú, homokkőből faragott gúla súlya 4620 kp, magassága 2,4 dm, alapéle 7 dm-rel hosszabb, mint az oldaléle. Mekkorák az élek és az oldalfelszín. [a 44,06 dm ; b 41,06 dm ; O_f 3200 dm²]

4.)



65 : 10 = 50 : x

$x = \frac{500}{65} = \frac{10}{13} \cdot \frac{33}{3} = 8,3 = 7,7$

$B = 32 + 2 \cdot 8,3 = 32 + 16,6 = 48,6$

$b = 32 + 2 \cdot 7,7 = 32 + 15,4 = 47,4$

$V = \frac{m}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot a_2} + a_2)$

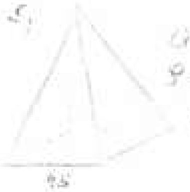
$V = 21,7(2250 + 1100 + \sqrt{2475000})$

$V = 21,7(3350 + 1573) = 21,7 \cdot 4923$

$V = 106500\ cm^3 = 0,1\ m^3$

$G = \rho V = 1400 \cdot 0,1 = 140\ kp.$

5.)



$G = 1012,2\ kp.$

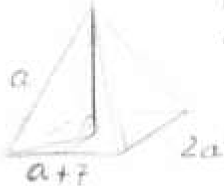
$\rho = 7,5$

$m = ?$

$V = \frac{G}{\rho} = \frac{1012,2}{7,5} = 136 = \frac{m}{3} A_1$

$m = \frac{3 \cdot 136}{45^2} = \frac{408}{2025} = 20\ dm$

6.)



$G = 4620\ kp$

$m = 2,4\ dm$

$a^2 = 2,4^2 + \sqrt{2} \cdot \frac{a+7}{2}$

$2a^2 - 2 \cdot 5,76 - \sqrt{2}(a+7) = 0$

$2a^2 - a\sqrt{2} - 11,52 - 7\sqrt{2} = 0$

$2a^2 - a\sqrt{2} - 21,39 = 0$

$2,4^2 = 5,76$
4,8
16
$1,41 \cdot 7$
9,87
11,52
21,39

$a_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 89,56}}{4} = \frac{1,41 \pm 9,5}{4}$

$a = 11\ dm$

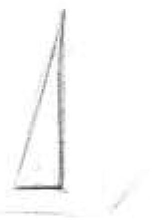
$\rho = 1,9 - 2,7$

$V = \frac{G}{\rho} = \frac{4620}{1,9} = 2430\ dm^3$ $= \frac{4620}{2,7} = 1715\ dm^3$ $V = \frac{m}{3} A_t$

$A_t = \frac{3V}{m} = \frac{7290}{2,4} = 3035$ $= \frac{5145}{2,4} = 46,1$

$a = \sqrt{A_t} = 55$ $b = 48\ dm$ $a = 46,4$ $b = 39,4\ dm$

$a = 48{,}06\,dm$
$m = 2{,}4\,dm$



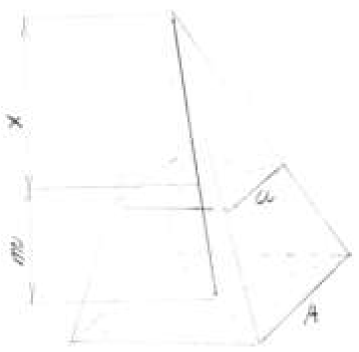
$m^2 + (a:2)^2 = a_1^2$

$5{,}76 + 576 = a_1^2$

$\sqrt{581{,}76} = a_1$

$a_1 = 24{,}1$

$Q_f = 4 \cdot a \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 48 \cdot 24 = 230\ dm^2$



A csonkagúla és csonkakúp köbtartalma

$V = V_1 - V_2$

$V = \frac{(m+x)\,A_t}{3} - \frac{x \cdot a_t}{3}$

$A_t : a_t = A^2 : a^2$

$A^2 : a^2 = (m+x)^2 : x^2$

$\sqrt{A_t} : \sqrt{a_t} = (m+x) : x$

$x \cdot \sqrt{A_t} = m\sqrt{a_t} + x\sqrt{a_t}$

$x = \frac{\sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}$

$$V = \frac{\left(m + \frac{\sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}\right) A_t - \frac{\sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}\, a_t}{3}$$

$$V = \frac{\frac{A_t \cdot m \cdot (\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}) + A_t\sqrt{a_t} \cdot m - a_t \cdot \sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}}{3}$$

$$V = \frac{m}{3} \cdot \frac{A_t \cdot \sqrt{A_t} - A_t \cdot \sqrt{a_t} + A_t\sqrt{a_t} - a_t\sqrt{a_t}}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}$$

$$V = \frac{m}{3} \cdot \frac{\sqrt{A_t}^3 - \sqrt{a_t}^3}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}$$

$A^3 - B^3 = A - B(A^2 + AB + B^2)$

$$\underline{\underline{V = \frac{m}{3} \cdot \left(A_t + \sqrt{A_t \cdot a_t} + a_t\right)}}$$

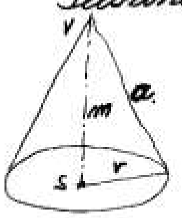
A kúp.

Kúpfelületet ír le az olyan egyenes, amely egy adott görbe mentén mozog olymódon, hogy közben egyik pontja állandóan rögzített marad. Ezt az egyenest minden helyzetében alkotónak nevezzük.

A kúp olyan test, amelyet egy zárt síkgörbéjű kúpfelület és egy a kúpfelület minden alkotóját átmetsző sík határol. A csúcsot és az alap középpontját összekötő egyenes a kúp tengelye. A csúcsnak az alaptól való távolsága a kúp magassága.

Ha a kúp tengelye merőleges az alapra, akkor a kúp egyenes, ellenkező esetben ferde. Az olyan egyeneskúpot, melynek tengelyét tartalmazó keresztmetszete egyenlőoldalú háromszög, egyenlőoldalú kúpnak nevezzük.

Felszíne:



az egyenes körkúp felszínét úgy kapjuk meg, hogy az alapterülethez hozzáadjuk a palást területét:

$F = A_t + P$.

A palást lefejtve olyan körcikk, mely íve a kúp alapjának kerületével, sugara pedig az alkotó hosszával egyenlő. Tehát a palást területe:

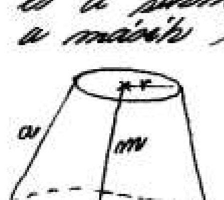
$$P = \frac{2}{2}\pi r \cdot a = a\pi r$$

$$F = a\pi \cdot r + r^2\pi = \underline{\underline{r\pi(a+r)}} = F$$

Köbtartalma: -t megkapjuk, ha az alapterület és magasság szorzatát elosztjuk hárommal.

$$V = \frac{A_t \cdot m}{3} = \underline{\underline{\frac{r^2\pi \cdot m}{3} = V}}$$

A csonkakúp. Ha a kúpot az alappal párhuzamos síkkal metszük két testet kapunk. A kúpnak az alap és a síkmetszet között levő része a csonkakúp, a másik része a kiegészítő kúp.



Az egyenes csonkakúp felszínét megkapjuk, ha az alap és fedőlap területéhez hozzáadjuk a palást területét:

$$\underline{\underline{F = A_t + a_t + P}}$$

$$F = R^2\pi + r^2\pi + P$$

A palást lefejtve körgyűrűcikk, mely két íve az alsó ill. felső alapkör kerülete ($2R\pi$; $2r\pi$) és szélessége a csonkakúp oldala (a). Tehát területe:

$$P = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot a = \pi a \cdot (R+r)$$

$$F = R^2\pi + r^2\pi + \pi a(R+r)$$
$$F = R^2\pi + r^2\pi + \pi a R + \pi a r$$
$$\underline{\underline{F = \pi\left[R^2 + r^2 + a(R+r)\right]}}$$

<u>A csonkakúp köbtartalma:</u>

$$\underline{\underline{V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left[R^2 + R \cdot r + r^2\right]}}$$ levezetni

Példák: 1.) Egy egyenes vaskúpnak a súlya 444,6 kp. Fajsúlya: 7,8 p/cm³. Alapkörének átmérője 4 dm. Mekkora a felszíne. [98,81 dm²]

2.) Számítsuk ki, hogy egy tölcsér alakú tál elkészítéséhez hány dm² lemez szükséges. Hány l víz fér bele.

3.) A forg. kúp magassága 5,7 cm, az alkotó az alap síkjával $\alpha = 42°40'$ szöget zár be. Hat. meg a kúp köbtartalmát.

4.) Geo. II. 189 – 196 1–7 p.

11.) Egy sátorlap 8 m², az egyenes körkúp alakú sátor alapkörének átmérője 2,2 m. Milyen magas a sátor? [2,037 m]

12.) Egy ólomból készült egyenes körkúp súlya 936,86 kp. Nyílásszöge 64°14'. Mekkora a kúp felszíne, (fajsúly 11,4)! [121,7 dm²]

13.) A kiöntött homok egyenes körkúp alakú, mely alkotói az alappal 31°-os szöget zárnak be. Milyen magas és széles az a homokkúp, amelyben 15 m³ homok van. [1,73 m , 2r = 5,76 m]

14.) Egy egyenes-csonkakúp alakú vízgyűjtő felső átmérője 102 cm, az alsó átmérője 84 cm. Magassága 72 cm. Hány l. víz fér bele? [490,6 l]

15.) Egy parkban 5 egyenlő csonkakúp alakú virágágyat készítenek. Az alapkör sugara 5,2 m, a fedőlap sugara 4,8 m, magassága 0,4 m. Hány m³ földet kell hozatni! [157,13]

16.) Egy egyenes csonkakúp alakú bádogvödör alapjának átmérője 26 cm, felső körének átmérője 42 cm, a magassága 38 cm.
Mennyi víz fér bele, mennyi bádog kell az elkészítéséhez? [35 l ; 50 dm²]

7)

$Q = 444{,}6\ kp$
$\rho = 7{,}8\ kp/dm^3$
$r = 2\ dm$
$F = ?$

$F = r^2\pi + 2r\pi \cdot a \cdot \frac{1}{2} = r\pi(r+a)$

$V = \frac{r^2\pi \cdot m}{3} \rightarrow m = \frac{3V}{r^2\pi}$

$V = \frac{Q}{\rho} = \frac{444{,}6}{7{,}8} = \frac{4446}{78} = 57\ dm^3$

$m = \frac{3V}{r^2\pi} = \frac{171}{4\pi} = \frac{171}{12{,}56} \doteq 13{,}6$

$a = \sqrt{13{,}6^2 + 2^2}$

$a = \sqrt{185{,}0 + 4} = \sqrt{22{,}54} = 43) \doteq \sqrt{189} \doteq 13{,}75$

$F = r\pi(r+a) = 2 \cdot 3{,}14(2 + 13{,}7) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}7 \doteq \underline{\underline{86}}$

4) ...

9)

$V = \frac{r^2\pi m}{3}$, $tg\,\alpha = \frac{5{,}7}{r} \rightarrow r = \frac{5{,}7}{tg\,\alpha} = \frac{5{,}7}{0{,}92} \doteq 6{,}2$

$V = \frac{38{,}2\pi \cdot 5{,}7}{3} = \underline{\underline{230\ cm^3}}$

11)

$F = 8\ m^2$
$r = 1{,}1\ m$
$m = ?$

$F = r\pi r + r\pi a \rightarrow a = \frac{F - r^2\pi}{r\pi} = \frac{8 - 3{,}85}{3{,}47} = \frac{4{,}15}{3{,}47} \doteq 1{,}2$

$m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{1{,}44 - 1{,}21}$

$F = r\pi \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{r\pi} \doteq \frac{8}{3{,}47} = 2{,}3$

$m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{5{,}3 - 1{,}21} = \sqrt{4{,}09} \doteq \underline{\underline{2{,}1}}$

12)

$Q = 936{,}86$
$\gamma = 64°14'$
$\rho = 11{,}4$
$F = ?$

$F = r\pi(r + a)$

$V = \frac{Q}{\rho} = \frac{936{,}86}{11{,}4} = 82\ kp$

$V = \frac{r^2\pi m}{3} \rightarrow r^2 = \frac{3V}{\pi m}$

$r^2 \doteq \frac{78{,}3}{m}$

$tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{m} = 0{,}63 \rightarrow r^2 = m^2 \cdot 0{,}397$

$r^2 = r^2 = \frac{78{,}3}{m} = m^2\ 0{,}397$

$m^3 = \frac{78{,}3}{0{,}397} = 198{,}5$

$m = \sqrt[3]{198{,}45} \doteq \underline{5{,}85\ dm}$

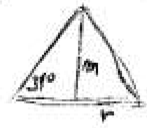
$r = 0{,}63\ m$
$r = 0{,}63 \cdot 5{,}85 \doteq 3{,}68$

$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{5{,}85^2 + 3{,}68^2}$

$a = \sqrt{34{,}2 + 13{,}6} = \sqrt{47{,}8} \doteq 6{,}9$

$F = r\pi(r + a) = 3{,}68 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}58 \doteq \underline{\underline{122\ dm^2}}$

13.) $\alpha = 31°$ $V = 15\,m^3$



$$V \doteq \frac{r^2\pi . m}{3} \rightarrow r^2 m = \frac{3V}{\pi} \doteq \frac{45}{\pi} \doteq 14{,}18 \rightarrow m = \frac{14{,}18}{r^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{m}{r} \quad tg\,31° = \frac{m}{r} \doteq 0{,}6 \rightarrow m = 0{,}6r$$

$$0{,}6r = \frac{14{,}18}{r^2}$$

$$\frac{14{,}18}{0{,}6} \doteq r^3 \doteq 23{,}95 \rightarrow r \doteq 2{,}88\,m \rightarrow 2r = 5{,}76\,m = d$$

$$m \doteq 0{,}6r \doteq 1{,}73\,m = m$$

14.) $\varnothing_1 = 102\,cm$
$\varnothing_2 = 84\,cm$
$m = 72\,cm$
$V = ?$

$$V = \frac{m\pi}{3}\left[R^2 + Rr + r^2\right]$$

$$V = \frac{72.\pi}{3}\left[51^2 + 51.42 + 42^2\right] \quad [cm^3]$$

$$V = 24\pi(2600 + 1762 + 2140)$$

$$V \doteq 24\pi \cdot 6502 \doteq 49000\,cm^3 \doteq 490\,l = V$$

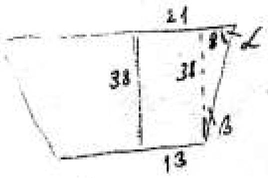
15.) 5 dib
$d_1 = 5{,}2\,m$
$d_2 = 4{,}8\,m$
$m = 0{,}4\,m$
$V \doteq ?$

$$V' = \frac{m\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

$$V \doteq 5\frac{0{,}4.\pi}{3}(6{,}75 + 5{,}75 + 6{,}24) \doteq \frac{2.\pi}{3}(18{,}74) \doteq 39{,}3\,m^3$$

16.) $d_1 = 42\,cm$
$d_2 = 26\,cm$
$m = 38\,cm$

$V = ?$
$F' = ?$



$$V = \frac{38.\pi}{3}(440 + 169 + 271{,}5) \doteq \frac{38\pi}{3} \cdot 880{,}5 \doteq 3520\,cm^3$$

$$V \doteq 35\,l$$

$$F = \pi[R^2 + r^2 + a(R + r)]$$

$$tg\,\beta = \frac{8}{38} = 0{,}21 \qquad \sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

$$\sin\beta \doteq \frac{0{,}21}{\sqrt{1 + 0{,}21^2}} \doteq \frac{0{,}21}{\sqrt{1 + 0{,}441}} \doteq \frac{0{,}21}{\sqrt{1{,}441}} \doteq \frac{0{,}21}{1{,}2} \doteq 0{,}175$$

$$\sin\beta = \frac{8}{a} = 0{,}175 \rightarrow a = \frac{8}{0{,}175}$$

$$a = \sqrt{38^2 + 8^2} = \sqrt{1440 + 64} = \sqrt{1504} \doteq 38{,}92$$

$$F = 3{,}14(440 + 169 + 38{,}9[34]) = 3{,}14(440 + 169 + 1320)$$

$$(F \doteq 3{,}14 \cdot 1929 \doteq 6)$$

$$F \doteq 3{,}14 \cdot 1489 \doteq 4680\,cm^2 \doteq 42\,dm^2 = F$$

$$V_á = \frac{m}{3}\left[A_t + \sqrt{A_t a_t} + a_t\right] \qquad / A_t = R^2\pi \quad a_t = r^2\pi$$

$$V_{cs.k} = \frac{m}{3}\left(R^2\pi + \sqrt{R^2 r^2 \pi^2} + r^2\pi\right)$$

$$\underline{V_{cs.k} = \frac{\pi \cdot m}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)}$$

1968. III. 1.

Gömb

Gömbfelület akkor keletkezik, ha egy félkört átmérője körül addig forgatunk, míg eredeti helyzetébe vissza nem tér. A gömbfelülettel határolt testet gömbnek nevezzük.

Az a pont, melytől a gömbfelületnek minden egyes pontja egyenlő távolságra van, a gömb középpontja.

A gömbfelület középponttól való távolsága a gömb sugara.

A gömbfelület két pontját összekötő egyenes darab a gömb húrja. A középponton átmenő húr a gömb átmérője. Ennek végpontjai a gömbfelület átellenes pontjai.

A gömbnek minden síkmetszete kör. Ennek sugara annál nagyobb, minél közelebb van síkja a gömb középpontjához.

Ha a sík keresztülmegy a gömb középpontján, akkor kapjuk a legnagyobb sugarú kört, melyet főkörnek nevezünk. Ennek sugara a gömbfelület sugarával egyenlő és középpontja egybeesik a gömbfelület középpontjával.

A gömb felszíne: $F = 4r^2\pi$

A gömb felszíne egy főkör területének négyszeresével egyenlő.

Térfogata: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

A gömb köbtartalma a gömb felszínének és a sugár harmadának szorzatával egyenlő.

Pl. 1 40cm átmérőjű, belül üres vasgolyó felényire merül el a vízben. Mekkora a golyó falvastagsága, ha a vas fajsúlya 7,4 p/cm³.
Szám. ki a golyó külső felszínét is.

[0,45 cm   50,272 dm²]

2.) Számítsuk ki 1 kp súlyú sárgarézgömb átmérőjét, ha fajsúlya 8,5 p/cm³! [d = 61 mm]

3.) Mekkora a területe annak a körnek, amelyet egy r sugarú gömbből metsz ki egy olyan sík, mely a gömb középpontjától fele akkora távolságra van, mint a gömb sugarának hosszúsága. [$3/4 \cdot r^2\pi$]

4.) Mekkora a gömb síkmetszetének sugara, ha a gömb sugara 3,49 cm, a metszősíknak a gömb középpontjától való távolsága 1,8 cm. [2,99 cm]

5.) Mekkora területet tesz ki a földön a szárazföld. r = 6370 km. A szárazföld a felszín $\frac{1}{3}$ része. [$170 \cdot 10^6$ km²]

6.) Hány %-al csökken a csapágygolyó felszíne, ha az átmérője a kopás következtében 0,8 mm-rel rövidebb lett és eredetileg 12 mm volt! [13%]

7.) A vasbádog cm²-ének súlya ½ kp. Mekkorának kell lennie a belőle készült üreggömbnek, hogy a vízben ússzék! [r = ¾ dm]

8.) Hány csepp köd képződik 1 cm³ vízből, ha egy ködcsepp átmérője $3 \cdot 10^{-2}$ mm.

1.) $F = 4r^2\pi = 4 \cdot \pi \cdot 20^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 400 = 5030\ cm^2 = 50\ dm^2$

$\downarrow \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi \rho_{vas}$

$\uparrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \rho_{víz}$

$\frac{4}{3}\pi \rho_{vas} (R^3 - r^3) = \frac{4}{6} R^3 \pi \rho_{víz}$

$\frac{4}{3} \cdot 7{,}4 (20^3 - r^3) = \frac{2}{3} \cdot 20^3 \cdot 1$

$2 \cdot 7{,}4 \cdot 8000 - 2 \cdot 7{,}4 \cdot r^3 = 8000$

$118500 - 8000 = 14{,}8\, r^3$

$110500 = 14{,}8\, r^3$

$r^3 = 7450 \rightarrow r = 19{,}5$

2.) $V = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad Q = V\rho = \frac{4}{3} r^3 \pi \rho \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3Q}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3\ kp\ dm^3}{4\pi \cdot 8500\ kp}}$

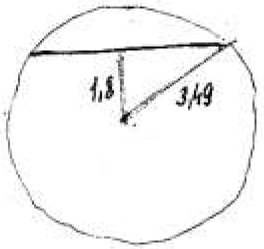
$r = \sqrt[3]{\frac{3}{107000}} = \sqrt[3]{0{,}00003} = 0{,}31\ dm$

d = 62 mm

3. 

$$\rho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4r^2 - r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

$$T = r^2\pi = \rho^2\pi = \frac{3r^2}{4}\pi$$

4. 

$$\rho = \sqrt{3{,}49^2 - 1{,}8^2} = \sqrt{12{,}2 - 3{,}24} \doteq \sqrt{9}$$

$$\rho \doteq 3$$

5. $F = 4r^2\pi = 4 \cdot \pi \cdot 6370^2 \text{ km}^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 40450000 \doteq 507500000 \text{ km}^2$

$F_{02} = F/3 \doteq 170900.000 \text{ km}$

6. $F_1 = 4r_1^2\pi = 4 \cdot 12^2 \cdot \pi$

$F_2 = 4r_2^2\pi = 4 \cdot 11{,}2\pi$

$F_1 : 100 = F_2 : x$

$F_1 x = 100 F_2$

$x = \frac{100 F_2}{F_1} = \frac{100 \cdot \cancel{4} \cdot 11{,}2^2 \cancel{\pi}}{\cancel{4} \cdot 12^2 \cdot \cancel{\pi}}$

$x \doteq \frac{100 \cdot 111{,}4}{144} \doteq \frac{11140}{144} \doteq 78\,\%$

$\alpha = 100 - x \doteq 100 - 78 \doteq 12\,\%$

7. $F_t = F_g$

$\frac{4}{3} R^3 \pi \cdot \rho_v = \frac{4}{\cancel{3}} R^2 \pi \frac{1}{12}$

$\frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{1}{3} R^2 \pi$

$4R^3 = R^2 \cdot 1$

$4R = 1$

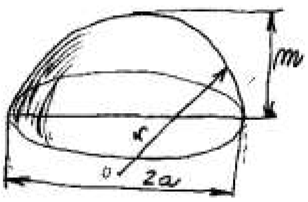
$R = 1/4 \text{ dm}$

8. $V = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}003 \text{ mm}^3 = 4\pi \cdot 0{,}001 = \pi \cdot 0{,}004 \doteq 0{,}01256 \text{ mm}^3$

$a = \frac{V^*}{V} = \frac{1000}{0{,}01256} \doteq \frac{100000000}{1256} \doteq 79500$

A gömb részei

Gömbszelet: A gömbnek vmely síkkal lemetszett része a gömbszelet v. gömbszegmentum.
A gömbszeletet a körlap és a lemetszett gömbfelület – a gömbsüveg – határolja.

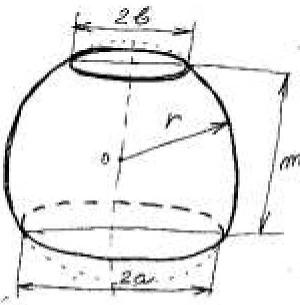


$$F_{gsz} = \pi(2rm + a^2) = \pi m(4r - m)$$

$$V_{gsz} = \frac{\pi m^2}{3}(3r - m)$$

$$F_s = 2\pi r m$$

Gömbréteg v. gömbkorong: A gömb két párhuzamos síkkal kimetszett része a gömbkorong v. gömbréteg.
A gömbfelületnek a két párhuzamos sík közé eső része a gömböv.

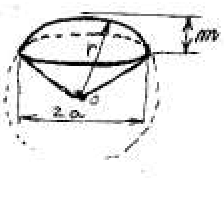


$$F_{gk} = \pi(2rm + a^2 + b^2)$$

$$V_{gk} = \frac{\pi m}{6}(3a^2 + 3b^2 + m^2)$$

$$F_{gö} = 2\pi r m \qquad [(m = \sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - b^2})]$$

Gömbcikk: a gömbnek az a része, amely egy gömbszeletből és egy olyan kúpból van összetéve, amelynek alapja a gömbszelet alapjával, csúcsa pedig a gömb középpontjával esik egybe: a gömbcikk v. gömbszektor.



$$F_{gc} = \pi r(2m + a) \qquad [(a^2 = 2rm - m^2)]$$

$$V_{gc} = \frac{2}{3}\pi r^2 m = \frac{1}{6}\pi d^2 m$$

Egy gömböt a középponttól 4,5 m távolságban egy síkkal metszünk. Mekkora a kisebbik gömbsüveg felszíne, ha a gömbi kör sugara 3,6 m.

Hány m^2 selyem szükséges egy ejtőernyőhöz, ha az olyan gömbsüvegnek „tekinthető”, melynek magassága 3,4 m, és alapkörének sugara 6 m. 149,4 m^2.

Milyen magas az a gömböv, amelynek felszíne a gömb felszínének negyedrésze! $m = \frac{r}{2}$

Egy gömbszelet alapkörének átmérője megegyezik a magasságával. Mekkora a gömb sugara, ha a gömbszelet térfogata 200 cm^3!

Egy kétszeresen domború üveglencse átmérője 8 cm, vastagsága a közepén 7,3 mm, az üveglencsét bezáró két gömbszelet egybevágó. Mekkora a lencse súlya, ha az üveg fajsúlya 2,6? 47,83 p

Egy 20 cm sugarú gömböt középpontjának ugyanazon az oldalán két párh. síkkal metszünk, amelyek a középponttól 9 és 15 cm távolságra vannak. Mekkora a kimetszett gömbréteg felszíne és térfogata? 23,06 dm^2 4,769 dm^3

Egy 5 cm sugarú 45°-os középponti szögű körcikket az egyik sugara körül megforgatunk. Mekkora lesz a kelt gömbcikk térfogata! 76,67 cm^3

Mekkora a gömbcikk felszíne és térfogata, ha: a gömb sugara 19 cm, a hozzátartozó szelet magassága 6 cm.! 15,435 dm^2 4,537 dm^3

1,) [149,4 ~126]