

1. Hat. meg a függ. helyértékét.

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

$$y' = x^2 + x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad x_{1,2} = 1; -2$$

$$y_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 5 = \frac{2+3-12+30}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$y_2 = -\frac{8}{3} + \frac{6}{3} + \frac{12}{3} + \frac{15}{3} = \frac{25}{3}$$

$$y'' = 2x + 1 > 0 < 0$$

$$\underline{P_m(1; 4) \quad P_M(-2; \frac{25}{3})}$$

2.

$$y = x^3 - 11x^2 + 35x - 10$$

$$y' = 3x^2 - 22x + 35$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 420}}{6} = \frac{22 \pm 8}{6} \quad x_{1,2} = 5; \frac{7}{3}$$

$$y_1 = 125 - 275 + 175 - 10 = -270 + 285 = +15$$

$$y_2 = \frac{343}{27} - \frac{539}{9} + \frac{245}{3} - \frac{30}{3} = \frac{343}{27} - \frac{1617}{27} + \frac{2205}{27} - \frac{240}{27}$$

$$y_2 = \frac{2548 - 1887}{27} = \frac{661}{27} \approx 24$$

$$y'' = 6x - 22 > 0 < 0$$

$$\underline{P_m(5; 15) \quad P_M(\frac{7}{3}; \frac{661}{27})}$$

3.

$$y = x^3 - 2x^2 - \frac{5}{3}x + 7$$

$$y' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{3} = 9x^2 - 12x - 5 \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{6} = \frac{4 \pm 6}{6} \quad x_{1,2} = \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{125}{27} - \frac{50}{9} - \frac{25}{9} + \frac{21}{3} = \frac{125 - 150 - 275 + 189}{27}$$

$$y_1 = \frac{89}{27}$$

$$y_2 = -\frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{63}{9} = \frac{-1 - 6 + 15 + 189}{27}$$

$$y_2 = \frac{197}{27}$$

$$y'' = 6x - 4 > 0 < 0$$

$$\underline{P_m(\frac{5}{3}; \frac{89}{27}) \quad P_M(-\frac{1}{3}; \frac{197}{27})}$$

$$4.) \quad y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 11$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = 2 \pm \sqrt{\frac{12}{36}} = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$y_1 = 3 \cdot \left(4 + \frac{1}{3} + 4\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - 12 \left(2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + 11$$

$$y_1 = 13 + 12\sqrt{\frac{1}{3}} - 24 + 11 - 12\sqrt{\frac{1}{3}} = 0$$

$$y_1 = \left(2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - 6 \left(2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + 11 \left(2 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) - 6$$

$$y_1 = 8 + 12\sqrt{\frac{1}{3}} + 2 + \sqrt{\frac{1}{27}} - 24 - 24\sqrt{\frac{1}{3}} + 2 + 22 + 11\sqrt{\frac{1}{3}} - 6$$

$$y_1 = 4 - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{27}}$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$> 0 \quad < 0$$

$$P_m(2 + \sqrt{\frac{1}{3}}; y_1) \quad P_m(2 - \sqrt{\frac{1}{3}}; y_2)$$

20. 90%

$$y = 5x^3 - 9x^2 + 3x - 10$$

$$y' = 15x^2 - 18x + 3$$

$$y = x^2(a - x)^2$$

$$1.) \quad y = 5x^3 - 9x^2 + 3x - 10$$

$$y' = 15x^2 - 18x + 3 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$y'' = 30x - 18$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10} \quad x_{1,2} = 1; \frac{1}{5}$$

$$y_1 = -11 \quad y_2 = \frac{1}{25} - \frac{9}{25} + \frac{15}{25} - \frac{250}{25} = \frac{-243}{25} = y_2$$

$$P_m(1; -11) \quad P_m\left(\frac{1}{5}; -\frac{243}{25}\right)$$

$$2.) \quad y = -3x^3 + 3x^2 - x + 3$$

$$y' = -9x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 36}}{-18} = \frac{-6 \pm \sqrt{72}}{-18} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$y_1 = -3 \left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}}\right)^3 + 3 \left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}}\right) + 3$$

$$y_1 = -\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{2}{9}} - \frac{2}{3} - 3\sqrt{\frac{8}{27}} + \frac{1}{3} + 2\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{9}{3}$$

$$y_1 = \frac{26}{9} - \sqrt{\frac{72}{27}} = \frac{26}{9} - \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$y_2 = -\frac{1}{9} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \frac{2}{3} + 3\sqrt{\frac{8}{27}} + \frac{1}{3} - 2\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{9}{3}$$

$$y_2 = \frac{26}{9} + 3\sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{26}{9} + \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$y'' = -18x + 6 \quad < 0 \quad > 0$$

$$P_m\left(1; \frac{26}{9} - \sqrt{\frac{8}{3}}\right) \quad P_m\left(\frac{1}{5}; \frac{26}{9} + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$$

3,

$$y = x^2(a-x)^2$$

$$y' = x^2(a-x)^2 + (a-x)^2 \cdot x^2 = 2x(a-x)^2 + x^2 \cdot 2(a-x) \cdot (-1)$$

$$y' = 2xa^2 - 4ax^2 + 2x^3 - 2ax^2 + 2x^3 = 6x^3 - 6ax^2 + 2a^2x$$

$$y' = 6x^3 - 6ax^2 + 2a^2x \quad 3x^3 - 3ax^2 + a^2x = 0$$

$$x(3x^2 - 3ax + a^2) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 12a^2}}{6} = \frac{3a \pm ai\sqrt{3}}{6}$$

$$y_1 = \left(\frac{3a + ai\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot \left(a - \frac{3a + ai\sqrt{3}}{6} \right)^2$$

$$= \frac{9a^2 + 6a^2i\sqrt{3} - 3a^2}{36} \cdot \frac{6a^2 + 6a^2i\sqrt{3} - a^2 \cdot 3}{36} = \frac{(6a^2 + 6a^2i\sqrt{3})(6a^2 + 6a^2i\sqrt{3})}{1296}$$

$$= \frac{6a^2(1+i\sqrt{3}) \cdot 6a^2(1+i\sqrt{3})}{1296} = \frac{2 \cdot 18a^4(1+2i\sqrt{3}-3)}{1296} = \frac{54a^4i\sqrt{3} - 90a^4}{1296}$$

$$y_2 = \left(\frac{3a - ai\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot \left(a - \frac{3a - ai\sqrt{3}}{6} \right)^2$$

$$= \frac{9a^2 - 6a^2i\sqrt{3} + a^2 \cdot 3}{36} \cdot \frac{6a^2 + 6a^2i\sqrt{3} - 3a^2}{36} = \frac{(12a^2 - 6a^2i\sqrt{3})(6a^2 + 6a^2i\sqrt{3})}{1296}$$

$$= \frac{6a^2(2-i\sqrt{3}) \cdot 6a^2(1+i\sqrt{3})}{1296} = \frac{36a^4(2+i\sqrt{3}+3)}{36 \cdot 36} = \frac{54a^4 + a^4i\sqrt{3}}{36}$$

$$y'' = 18x^2 - 12ax + 2a^2$$

$$18 \left(\frac{3a + ai\sqrt{3}}{6} \right)^2 - 12a \left(\frac{3a + ai\sqrt{3}}{6} \right) + 2a^2 =$$

$$= \frac{9a^2 + 6a^2i\sqrt{3} - 3a^2}{2} - \frac{12a^3 + 4a^2i\sqrt{3}}{2} + \frac{2a^2}{2} =$$

$$+ a^2(i\sqrt{3} - 1) = A$$

$$a^2(2 - i\sqrt{3}) = B$$

$$a \leq 0 \rightarrow A, B > 0$$

$$P_m \left(\frac{3a + ai\sqrt{3}}{6}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{18} \right) \quad P_m \left(\frac{3a - ai\sqrt{3}}{6}, \frac{5a^2 + a^2i\sqrt{3}}{36} \right) \quad P_m(0; 0)$$

21.

91. dia.

1.)

$$y = 2x^2 + 5x - 7$$

$$y' = 4x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{4}$$

$$y = 2 \cdot \frac{25}{16} + 5 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 7 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} - \frac{56}{8} = \frac{25 - 50 - 56}{8}$$

$$y'' = 4$$

$$P_m\left(-\frac{5}{4}; -\frac{51}{8}\right)$$

2.)

$$y = 6 - 3x - 5x^2$$

$$y' = -3 - 10x = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{10}$$

$$y = 6 + \frac{9}{10} - \frac{45}{100} = \frac{600 + 90 - 45}{100} = \frac{645}{100} = \frac{129}{20}$$

$$y'' = -10$$

$$P_M\left(-\frac{3}{10}; \frac{645}{100}\right)$$

3.)

$$y = x^3 + 3x^2 - 5\frac{1}{3}x + 6 = x^3 + 3x^2 - \frac{16}{3}x + 6$$

$$y' = 3x^2 + 6x - \frac{16}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = -1 \pm \frac{5}{3}$$

$$x^2 + 2x - \frac{16}{9} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{3}; -\frac{8}{3}$$

$$y_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{8}{27} + \frac{12}{9} - \frac{32}{9} + \frac{54}{9}$$

$$y_1 = \frac{8 + 36 - 96 + 162}{27} = \frac{110}{27} = 4$$

$$y_2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) + 6 = -\frac{512}{27} + \frac{192}{9} + \frac{128}{9} + \frac{54}{9}$$

$$y_2 = \frac{-512 + 576 + 384 + 162}{27} = \frac{64 + 384 + 162}{27} = \frac{-510}{27} = \frac{170}{9}$$

$$y'' = 6x + 6 > 0$$

$$P_m\left(\frac{2}{3}; \frac{110}{27}\right)$$

$$P_M\left(-\frac{8}{3}; \frac{170}{9}\right)$$

4.)

$$y = -x^3 - 4x^2 + 6\frac{2}{3}x - 8 = -x^3 - 4x^2 + \frac{20}{3}x - 8$$

$$y' = -3x^2 - 8x + \frac{20}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{-6} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{-6} = \frac{8 \pm 12}{-6} = \frac{20}{6}; -\frac{4}{6}$$

$$y_1 = -\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{20}{3}\left(\frac{10}{3}\right) - 8 = -\frac{1000}{27} - \frac{400}{9} + \frac{200}{9} - \frac{72}{9}$$

$$y_1 = \frac{-1000 - 1200 + 600 - 216}{27} = \frac{-1816}{27}$$

$$y_2 = -\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 6\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) - 8 = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} - \frac{40}{9} - \frac{72}{9}$$

$$y_2 = \frac{8 - 48 - 120 - 216}{27} = \frac{-376}{27}$$

$$y'' = -6x - 8$$

$$P_M\left(\frac{10}{3}; -\frac{1816}{27}\right)$$

$$P_M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{376}{27}\right)$$

91. sz.

1968. 11.

$$y = 4 - 3x - 5x^2$$

$$y = x^3 + 4$$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

1.

$$y = 4 - 3x - 5x^2$$

$$y' = -3 - 5 \cdot 2x \rightarrow x = -\frac{3}{10}$$

$$y = 4 + \frac{9}{10} - \frac{45}{100} = \frac{400 + 90 - 45}{100} = \frac{445}{100} = 4,45$$

$$y'' = -10$$

$$P_M(-\frac{3}{10}; 4,45)$$

2.

$$y = x^3 + 4$$

$$y' = 3x^2 \rightarrow x = 0 \quad y = 4$$

$$y'' = 6x = 0 \quad \text{minimális } M_{\min}$$

3.

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$y' = \frac{x'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{x^2 + 1} = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)(x+1)} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1-x}{1+x} = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1 \quad y = \frac{1}{2}$$

$$y'' = \frac{(1-x)'(1+x) - (1+x)'(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} < 0$$

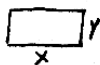
$$P_M(1; 0,5)$$

92. óra

1968. 11. 2.

4.

A kisméretű nyílászáró derékszögű paralelogramma, melynek kerülete $2a$. Milyenek legyenek a méretei, ha azt akarjuk, hogy a nyílászáró a legnagyobb legyen!



$$x + y = 2a \rightarrow x = 2a - y \quad y = 2a - x$$

$$x \cdot y = \text{Max.}$$

$$x(2a - x) = T$$

$$y = -x^2 + 2ax$$

$$y' = -2x + 2a = 0$$

$$x = \frac{2a}{2} = \frac{1}{2}a \quad y = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$$

$$x = y = \frac{1}{2}a \sim \text{négyzet alakú nyílászáró. Területe } \frac{a^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad y &= (x-1)(x-2)(x-3) \\
 y' &= 1(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) + (x-1)(x-3) \\
 y' &= x^2 - 5x + 6 + x^2 - 3x + 2 + x^2 - 4x + 3 \\
 y' &= 3x^2 - 12x + 11 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6.2 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} \\
 y_{1,2} &= \left(\frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(\frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} - 2\right)\left(\frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} - 3\right) \\
 y'' &= 6x - 12 > 0 < 0 \\
 &\underline{P_m\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}; y_1\right)} \quad \underline{P_m\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}; y_2\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad y &= \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 6 \\
 y' &= 3x^3 - 3x^2 - 6x = x(3x^2 - 3x - 6) = 0 \quad x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 6 \\
 &\quad x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6} = \frac{3 \pm 9}{6} = 2, -1 \\
 y_2 &= 12 - 8 - 12 + 6 = -2 \\
 y_3 &= \frac{3}{4} + \frac{4}{4} - \frac{12}{4} + \frac{24}{4} = \frac{19}{4} \\
 y'' &= 9x^2 - 6x - 6 \quad ; \quad x < 0; > 0; \geq 0 \\
 &\underline{P_m(0; 6)} \quad \underline{P_m(2; -2)} \quad \underline{P_m(-1; \frac{19}{4})}
 \end{aligned}$$

1.22.

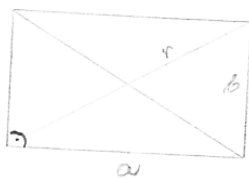
92 ff.

$$\begin{aligned}
 y &= -x^3 + 9x^2 - 15x + 7 \\
 y &= x^4 - 12x^2 \\
 y &= i \quad \text{Az } r \text{ sugarú körbe írt derékszögű paralelogrammák közül} \\
 &\quad \text{melyiknek a területe a legnagyobb.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad y' &= -3x^2 + 18x - 15 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = -1, -5 \\
 &\quad -x^3 + 6x - 5 = 0 \\
 y_1 &= -3 - 18 - 15 = -36 \quad y_2 = -75 - 90 - 15 = -180 \\
 y'' &= -3x^2 + 6 < 0 \\
 &\underline{P_m(-1; -36)} \quad \underline{P_m(-5; -180)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad y' &= 4x^3 - 24x = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{6} \quad x_3 = -\sqrt{6} \\
 &\quad x(x^2 - 6) = 0 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = -36 \quad y_3 = -36 \\
 y'' &= 12x^2 - 24 < 0 > 0 > 0 \\
 &\underline{P_m(0; 0)} \quad \underline{P_m(\sqrt{6}; -36)} \quad \underline{P_m(-\sqrt{6}; -36)}
 \end{aligned}$$

5,



$$b = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$T = a \cdot b = a \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} = a \cdot (4r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = y$$

$$\frac{dT}{da} = a' \cdot (4r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + (4r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot a'$$

$$y' = \sqrt{4r^2 - a^2} + \frac{1}{2} \cdot (4r^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2a \cdot a'$$

$$y' = \sqrt{4r^2 - a^2} - a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{4r^2 - a^2 - a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = 0$$

$$4r^2 - 2a^2 = 0$$

$$b = \sqrt{4r^2 - 2r^2}$$

$$a^2 = 2r^2$$

$$b = \sqrt{2r^2}$$

$$a = r\sqrt{2}$$

$$b = r\sqrt{2}$$

$$T = 2r^2$$

$$y'' = -M(r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$$

93. óra

1968. II.

$$1.) y = \sin 2x$$

$$2.) y = \sin^2 x$$

$$3.) y = x - 2 \sin x$$

$$4.) y = 2 \sin x - \sin 2x$$

$$5.) y = 3 \sin x - \sin 3x$$

6.) Az A minimál pontnak fel kell ismernünk, hogy meggyőződik benne a legkisebb legyen.

7.) Melyik derékszögű paralelogramma a legkisebb területű ha terület T.

$$8.) y = (x^2 + x) \cdot (x^2 - x^2 + 1)$$

9.) Adott a körvonal egy ortogonális csomópont 2. részre, és emeljük mindkét rész felé meggyőződik. Ha kell kelleim-
ben az a körvonal, hogy a 2. részre együttes terület
a lehet legkisebb legyen.

10.) Szekesszint a $R \times \Delta$ -ba egy legnagyobb területű $R \times$ -ű
paralelogrammát, derékszögű, együttes négy egyenesen a
 $\Delta R \times$ -igével, a hat. meg a paralelogramma oldalait.

Megoldások:

$$1.) y = \sin 2x$$

$$y' = \cos 2x = 0 \rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$y' = -\sin 2x = -\sin 2k\pi = \pm 0 \rightarrow M, m$$

$$2.) y = \sin^2 x = [\sin x]^2, y' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k \cdot \pi$$

$$y'' = \cos 2x = \cos 2k\pi = 1$$

$$3.) y = x - 2 \sin x, y' = 1 - 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$y'' = 2 \sin x = 2 \sin \frac{k\pi}{3} = \pm \neq 0 \rightarrow M, m$$

$$4.) 2 \sin x - \sin 2x, y' = 2 \cos x - \cos 2x = 0 \rightarrow 2 \cos x = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2 \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 0 \rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{-4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \cos x \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$y'' = -2 \sin x + \sin 2x \rightarrow 0 \rightarrow m.$$

$$5.) y = 3 \sin x - \sin 3x$$

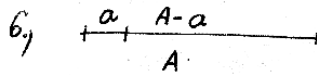
$$y' = 3 \cos x - \cos 3x = 0 \Rightarrow 3 \cos x = \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$6 \cos x = 4 \cos^3 x$$

$$6 = 4 \cos^2 x$$

$$\frac{3}{2} = \cos^2 x$$

$$\cos x = \sqrt{3/2}$$



$$a^2 + (A-a)^2 = y' = a^2 + A^2 - 2Aa + a^2 = 2a^2 - 2Aa + A^2$$

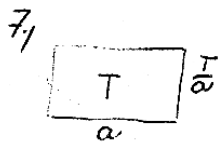
$$y' = 2a + 2(A-a) = 0$$

$$2a + 2A - 2a = 0$$

$$y' = 4a - 2A = 0$$

$$4a = 2A$$

$$a = 0.5A$$



$$K = 2(a + \frac{T}{a}) = 2a + \frac{2T}{a}$$

$$K' = 2 + \frac{0 \cdot a - 1 \cdot 2T}{a^2} = 2 + \frac{-2T}{a^2} = 0$$

$$2 = \frac{2T}{a^2}$$

$$2a^2 = 2T$$

$$a^2 = T$$

$$a = \sqrt{T} \Rightarrow \text{neggiel}$$

8.)

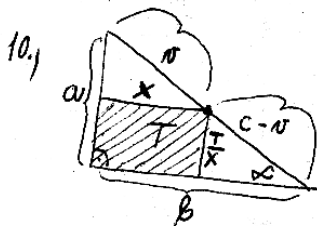
$$y = (x^3 + x) : (x^4 - x^2 + 1) = \frac{(x^3 + x)}{(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x(x^2 + 1)}{(x^4 - x^2 + 1)}$$

$$y' = \frac{(3x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) - (x^3 + x)(4x^3 - 2x)}{(x^4 - x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^6 + x^4 - 2x^4 - x^2 + 3x^2 + 1 - 4x^6 + 2x^4 + 4x^4 + 2x^2}{(x^4 - x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{-x^6 - 4x^4 + 4x^2 + 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2} = \frac{-x^4(x^2 + 1) + (4x^2 + 1)}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$$

9.) = 6.)



$$x = n \cdot \cos \alpha = n \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{T}{x} = (c - n) \cdot \sin \alpha = (c - n) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sqrt{a^2 + b^2} - n)$$

$$y = x \cdot \frac{T}{x} = n \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sqrt{a^2 + b^2} - n)$$

$$y = \frac{n b \cdot a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - n b \cdot a \cdot n}{a^2 + b^2} = n b \cdot$$

$$5, \quad y = 3 \sin x - \sin 3x$$

$$y' = 3 \cos x - \cos 3x = 0 \Rightarrow 3 \cos x = \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$6 \cos x = 4 \cos^3 x$$

$$6 = 4 \cos^2 x$$

$$\frac{3}{2} = \cos^2 x$$

$$\cos x = \sqrt{3/2}$$

$$6, \quad \begin{array}{c} a \quad A-a \\ \hline A \end{array}$$

$$a^2 + (A-a)^2 = y' = a^2 + A^2 - 2Aa + a^2 = 2a^2 - 2Aa + A^2$$

$$y' = 2a + 2(A-a) = 0$$

$$2a + 2A - 2a = 0$$

$$y' = 4a - 2A = 0$$

$$4a = 2A$$

$$a = 0,5A$$

7,

$$\begin{array}{c} T \\ \hline a \end{array} \quad \frac{T}{a^2}$$

$$K = 2\left(a + \frac{T}{a}\right) = 2a + 2\frac{T}{a}$$

$$K' = 2 + \frac{0 \cdot a - 1 \cdot 2T}{a^2} = 2 + \frac{-2T}{a^2} = 0$$

$$2 = \frac{2T}{a^2}$$

$$2a^2 = 2T$$

$$a^2 = T$$

$$a = \sqrt{T} \Rightarrow \text{neggiel}$$

8,

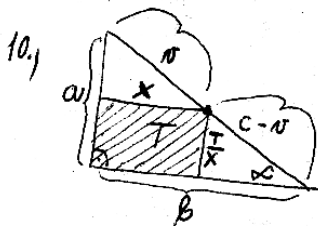
$$y = (x^3 + x) : (x^4 - x^2 + 1) = \frac{(x^3 + x)}{(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x(x^2 + 1)}{(x^4 - x^2 + 1)}$$

$$y' = \frac{(3x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) - (4x^3 - 2x)(x^3 + x)}{(x^4 - x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^6 + x^4 - 3x^4 - x^2 + 3x^2 + 1 - 4x^6 + 2x^4 - 4x^4 + 2x^2}{(x^4 - x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{-x^6 - 4x^4 + 4x^2 + 1}{(x^4 - x^2 + 1)^2} = \frac{-x^4(x^2 + 1) + (4x^2 + 1)}{(x^4 - x^2 + 1)^2}$$

9, = 6,



$$x = n \cos \angle = n \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{T}{x} = (c-n) \cdot \sin \angle = (c-n) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sqrt{a^2 + b^2} - n)$$

$$y = x \cdot \frac{T}{x} = n \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a \cdot (\sqrt{a^2 + b^2} - n)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y = \frac{n b \cdot a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - n b \cdot a \cdot n}{a^2 + b^2} = n b \cdot$$

94. óra.

Az integrál számítás

1968. II.

A határozatlan integrál

Van egyenlő és inverz művelet.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) dx$$

$$y = \int dy = \int f'(x) dx$$

$$\underline{\underline{y = \int dy = \int f'(x) dx + C}}$$

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$y = x^2 - 1$$

$$y' = 2x$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y' = 2x$$

$$y = x^2 - 2$$

$$y' = 2x$$

$$y = x^2 + 2$$

$$y' = 2x$$

$$y = x^2 - 3$$

$$y' = 2x$$

$dy = f'(x) dx$ — a fg. differenciálját felírjuk, mint a fg.

diff. hányadosának és a független változó diff.-jának szorzatát.

Art a számítás: ebből, amelyet mely fg. differenciál-jából, majd a függvényt meghatározhatjuk, integrál számításnak, az eredményül nyert fg.-nyt pedig az adott differenciál integrál függvényének, röviden integráljának nevezzük.

Tehát az integrál számítás a differenciál számítás megfordításának tekinthető, s így mely fg. differenciál-jának integrálja magával a függvényt egyenlő:

$$\underline{\underline{y = \int dy = \int f'(x) dx = f(x) + C}}$$

$$\int 5x^4 dx = x^5 + C$$

$$y = x^5; y' = 5x^4$$

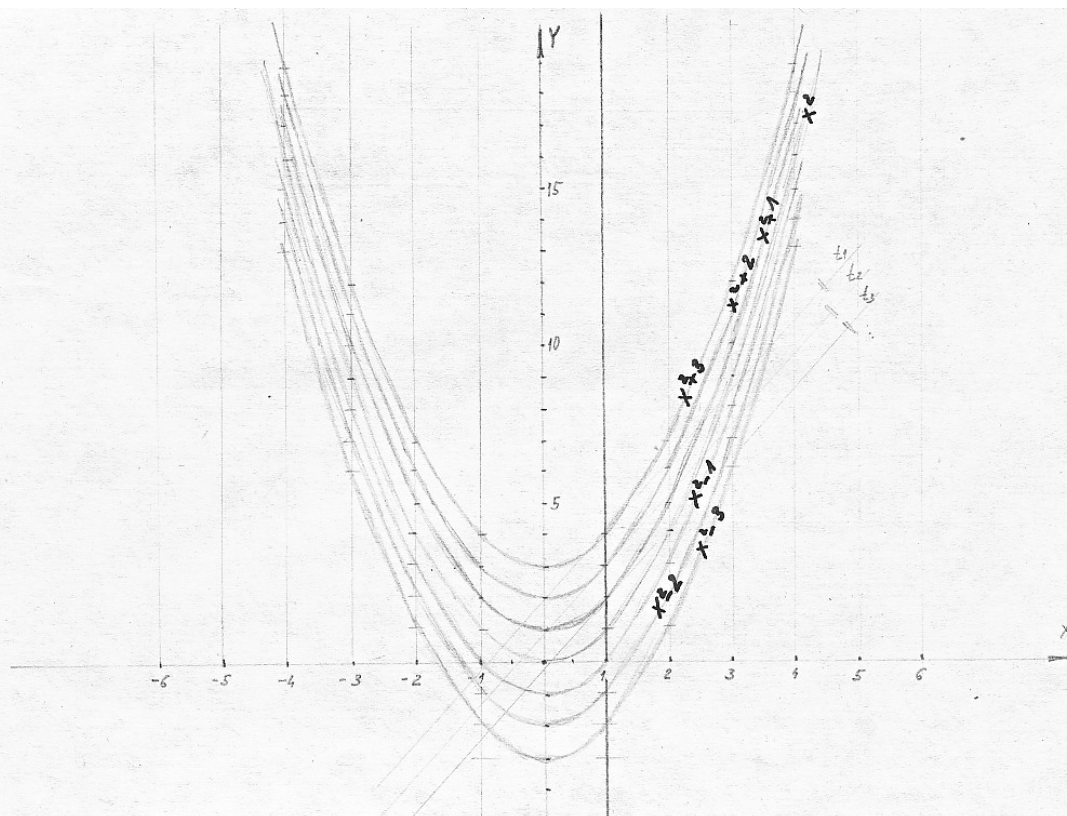
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

C — az integrál additív állandója.

$$\int 8x^7 dx = x^8 + C$$

Az integrál kiszámítása határozatlan feladat, mert állata nem egy fg.-t, hanem a függvények végtelen nagy számát nyújtja eredményül, amelyet egymáshoz csak egy tetszőleges értékű állandó összeadandóval különböztetünk.

A határozatlan integrál geometriai jelentése.



Mivel a C állandó a $-\infty$ és $+\infty$ között folyó összes
valós értékeket felveheti, ezért az integrál $2x dx = \int 2x dx =$
 $= x^2 + C$ határozatlan integrál mintamint egy végtelen
magyságú "összeálló" parabolák családja, az $\int f(x) dx = f(x) + C$
határozatlan pedig az összes végtelen nagy számú
"összeálló" függvények családját jelenti, amelyeket úgy
nyerünk, ha a függvény az x tengely mindkét irányában
elöljáró "közvetlen" ellentét.

Egyszerűbb integrál-alakok

Az alapintegrálok a következők:

1. Hatalmí integrálja:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

$$\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \right]' = m+1 \cdot \frac{x^m}{m+1}$$

Hatalmí integrálját nyerjük, ha az eggyel nagyobb
kitevőjű hatalmí az új kitevővel eloszlunk. A képlet
minden n -re érvényes, kivéve ha $n = -1$.

Pé: $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} = \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$\int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\frac{7}{4}} = \frac{4 \cdot \sqrt[4]{x^7}}{7} = \frac{4x \sqrt[4]{x^3}}{7} + C$$

Állandó tényezővel rendelkező hatvány integráljai:

$$\int a x^m dx = a \int x^m dx = a \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Av állandó tényezővel kiemelhető az integrálandó elé:

Pl: $\int 6x^5 dx = 6 \int x^5 dx = 6 \cdot \frac{x^6}{6} = x^6 + C$

$$\int \frac{8}{x^2} dx = \int 8x^{-2} dx = 8 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -8 \cdot x^{-1} = -\frac{8}{x} + C$$

Összeg (különbség) integráljai:

$$\int [f'(x) + g'(x)] dx = \int f'(x) dx + \int g'(x) dx = f(x) + g(x) + C$$

Összeg (különbség) integráljait megadjuk, ha az egyes tagok integráljait ismerjük.

Pl: $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx = \left(x^4 + x^3 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^1}{1} \right) + C =$
 $= x^4 + x^3 - x^2 + x + C$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

III. 1.

96-97. пров

$$\begin{aligned}
 1, \quad \int (5x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 14x^{\frac{3}{4}} - 7x) dx &= \int 5x^{\frac{1}{2}} dx - \int 3x^{\frac{2}{3}} dx + \int 14x^{\frac{3}{4}} dx - \int 7x dx = \\
 &= \frac{5 \cdot x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 14 \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{20}{5} x^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{6} x^{\frac{5}{3}} + \frac{56}{7} x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{2} x^2 = \\
 &= \underline{\underline{4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{3}} + 8x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{2}x^2 + C.}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2, \quad \int (5 \sin x + 3 \cos x) dx &= \int 5 \sin x dx + \int 3 \cos x dx = -5 \cos x + 3 \sin x + C \\
 &= \underline{\underline{3 \sin x - 5 \cos x + C}}
 \end{aligned}$$

$$3, \quad \int (a \cos x - b \sin x) dx = \int a \cos x dx - \int b \sin x dx = \underline{\underline{a \sin x + b \cos x + C}}$$

$$4, \quad \int (8 \cos x - 5 \sin x) dx = 8 \int \cos x dx - 5 \int \sin x dx = \underline{\underline{8 \sin x + 5 \cos x + C}}$$

$$5, \quad \int (3 \sin x + 2 \cos x) dx = 3 \int \sin x dx + 2 \int \cos x dx = \underline{\underline{-3 \cos x + 2 \sin x + C}}$$

$$6, \quad \int (\sin x - \cos x) dx = \underline{\underline{-\cos x - \sin x + C}}$$

$$\begin{aligned}
 7, \quad \int (2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{2}{3}} + 3x - 8) dx &= \frac{2 \cdot x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 6 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 8x + C = \\
 &= \frac{10}{6} x^{\frac{3}{2}} - \frac{18}{4} x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} x^2 - 8x + C = \\
 &= \underline{\underline{\frac{5}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} x^2 - 8x + C}}
 \end{aligned}$$

IV. 1.

4.

$$\int (3/x^4 - 2/x^2 + 5) dx$$

$$\int (3/x^3 + 5/x^2 - 4/x^4 + 6) dx$$

$$\int (x-1)(x-2)(x-3) dx$$

$$\int \sqrt{x} dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

$$1, \int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 5 \right) dx = 3 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} - 2 \frac{x^{-1}}{-1} + 5x + C = \underline{\underline{-\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + 5x + C}}$$

$$2, \int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^4} + 6 \right) dx = 3 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 5 \frac{x^{-1}}{-1} - 4 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + 6x + C =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{3}{2x^2} + \frac{5}{x} + \frac{4}{3x^3} + 6x + C}}$$

$$3, \int (x-1)(x-2)(x-3) dx = \int [x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6] dx = \int (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 11 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x =$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C}}$$

$$4, \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}}}$$

$$5, \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (1+1) \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3} x \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + C}}$$

98. d
1968. 1

$$\int \lg x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int -1 dx = \underline{\underline{\lg x - x + C}}$$

$$\int \frac{3 - 2 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2 \cdot 1}{\sin^2 x} \right) dx = \underline{\underline{3 \lg x + 2 \cot x + C}}$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2} \right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C}}$$

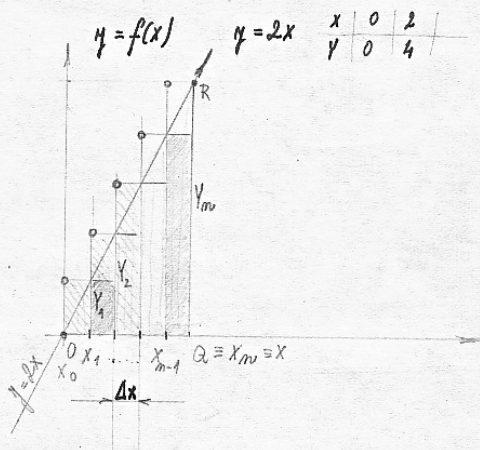
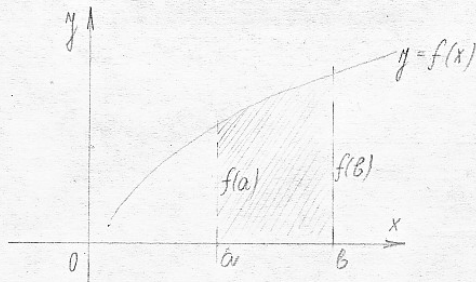
$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2} \right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C}}$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx - \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C - \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C \right) = \underline{\underline{-\sin x}}$$

$$\int 4 \sin^2 \frac{x}{2} dx = 4 \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = 4 \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C \right) = \underline{\underline{2x - 2 \sin x + C}}$$

A határozott integrál fogalma

Az integrálbevezetés abból a geometriai problémából származtatható, hogy mekkora a terület az $y = f(x)$ függvény az x tengely és az a, b abszcisszákhoz tartozó $f(a); f(b)$ ordináták által határolt síkidomnak.



$OQR \Delta$ ter ... P

$$\Delta x = \frac{x}{m}$$

Δ_m = az $OQR \Delta$ -be írt téglalapok területének az összege.

S_m = az $OQR \Delta$ -köré írt téglalapok területének összege.

$$\Delta_m < P < S_m$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\Delta x \rightarrow 0$ [és $S_m; \Delta_m \rightarrow P$]

$$\begin{matrix} X & \{x_0=0, x_1=\Delta x=\frac{x}{m}, x_2=\frac{2x}{m}, x_3=\frac{3x}{m}, \dots, x_{m-1}=\frac{(m-1)x}{m}\} \\ Y & \{y_0=0, y_1=\frac{2x}{m}, y_2=\frac{4x}{m}, y_3=\frac{6x}{m}, \dots, y_{m-1}=\frac{2(m-1)x}{m}\} \end{matrix}$$

$$\Delta_m = \frac{x}{m} \left[0 + \frac{2x}{m} + \frac{4x}{m} + \frac{6x}{m} + \dots + \frac{2(m-1)x}{m} \right] =$$

$$= \frac{x}{m} \cdot \frac{2x}{m} [1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)] =$$

$$= \frac{2x^2}{m^2} \cdot \left[\frac{1 + (m-1)}{2} \cdot (m-1) \right] = 2 \frac{x^2}{m^2} \cdot \frac{m}{2} \cdot (m-1) =$$

$$= \frac{x^2}{m} (m-1) = x^2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) = \Delta_m$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = \lim_{m \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) = x^2$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \\ a_m = (m-1) \\ m = (m-1) \end{cases}$$

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m$$

$$\left. \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{2x}{m} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{x}{m} \\ y_1 = \frac{4x}{m} \end{array} \right. \rightarrow \dots \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{m-1} = \frac{(m-1)x}{m} \\ y_{m-1} = \frac{2mx}{m} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_m = \frac{mx}{m} \\ y_m = \frac{2(m+1)x}{m} \end{array} \right.$$

$$S_m = \frac{x}{m} \left[\frac{2x}{m} + \frac{4x}{m} + \frac{6x}{m} + \dots + \frac{2(m-1)x}{m} + \frac{2mx}{m} + \frac{2(m+1)x}{m} \right]$$

$$S_m = \frac{x}{m} \cdot \frac{2x}{m} [1 + 2 + 3 + \dots + (m-1) + m] = \frac{2x^2}{m^2} \cdot \left[\frac{1+m}{2} \cdot (m) \right] = \frac{2x^2}{m^2} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot m = \frac{x^2(m+1)}{m} = x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) = S_m$$

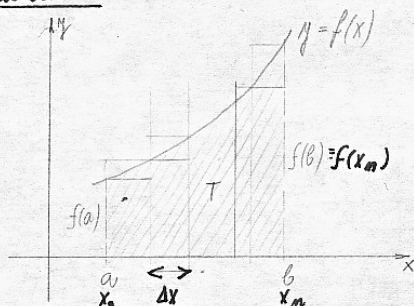
$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(x^2 + \frac{x^2}{m}\right) = x^2$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m < P < \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$$

$$x^2 < P < x^2 \rightarrow P = x^2$$

S_m - alsó összeg S_m - felső összeg

Állításom:



$$\Delta x = \frac{b-a}{m}$$

$$S_m > S_m$$

$$S'_m > T > S_m$$

$$m \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$$

a - alsó határ

b - felső határ

$$\Delta m = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{m-1}) \cdot \Delta x = \Delta x [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{m-1})]$$

$$S_m = f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_m) \Delta x = \Delta x [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_m)]$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = T = \int_a^b f(x) dx$$

Ezen kép, -ben előforduló integrál, mely most máris az a és b számok között állal teljesen meghatározott értékkel jelent, az $y=f(x)$ függvény határolt integráljának nevezzük, az a és b határok között, ahol a az integrál alsó határa, b pedig a felső határ.

100. óra.

1968. III. 13.

Am $y=f(x)$ függvény határozott integrálját az a és b határok között megkapjuk, ha a fgg. határozatlan integrálját az állandóval való lehatárolás nélkül kihasználjuk és ebbe az x helyett először a felvesszük, azután az alsó határt helyettesítjük b azután az így megert kifejezések különbségét vesszük.

$$\begin{aligned} \text{Pl.: } \int_1^2 (x^3 - x + 1) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} + 1 \right) = \\ &= (4 - 2 + 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \right) = 4 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{4} = \\ &= 3 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{13}{4}}} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x) dx = \left[x^3 + x^2 \right]_0^2 = 8 + 4 = \underline{\underline{12}}$$

64/11 a,b

13.

$$\int_2^4 (4x - 3) dx = \left[2x^2 - 3x \right]_2^4 = (32 - 12) - (8 - 6) = 20 - 2 = \underline{\underline{18}}$$

$$\begin{aligned} \int_7^9 (6x^2 - 1) dx &= \left[2x^3 - x \right]_7^9 = (2 \cdot 9^3 - 9) - (2 \cdot 7^3 - 7) = 9(162 - 1) - 7(98 - 1) = \\ &= 9 \cdot 161 - 7 \cdot 97 = 1449 - 679 = \underline{\underline{770}} \end{aligned}$$

$$\int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \int_0^2 (4-x^2) dx + \int_{-2}^0 (4-x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 =$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48}{3} - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\int_{-a}^a x^5 dx = 2 \int_0^a \frac{x^6}{6} = 2 \frac{a^6}{6} = \frac{a^6}{3}$$

$$2 \int_0^2 (4-x^2) dx = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\int_3^5 (4x^3 - 3x^2 + 7) dx = \left[x^4 - x^3 + 7x \right]_3^5 = (625 - 125 + 35) - (81 - 27 + 21) =$$

$$= 535 - 75 = 460$$

$$\int_{-3}^2 \left(2x^3 - 3x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 + (-x^{-1}) \right]_{-3}^2 = \left(\frac{16}{2} - \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{16}{2} - \frac{12}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} - \frac{54}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{51}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{-153 - 2}{6} = -\frac{155}{6} \quad -\frac{155}{6} \approx 25$$

$$\int_1^2 \frac{16}{x^3} dx = 16 \int_1^2 x^{-3} dx = \left[16 \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 = \left[-\frac{8}{x^2} \right]_1^2 = \left(-\frac{8}{4} \right) - \left(-\frac{8}{1} \right) = (-1 + 1) = 0$$

$$\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x^2} dx = \int_1^2 (2x^2+1)x^{-2} dx = \int_1^2 2 - \frac{1}{x^2} = \left(2x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{1} \right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} = \frac{2\sqrt{729}}{3} = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$$

$$\int_2^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_2^3 = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} \right]_2^3 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{3} \right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{8} + 2\sqrt{2} \right)$$

$$= (2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) - \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \right) = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\sqrt{2}$$

III. 27.

102. óra

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

IV. 2.

103. óra

A határozott integrál tulajdonságai:

1. Az állandó tényező a hat. integrált elöl kihelyezhető:

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$$

2. A határozott felsőérték és integrál előjele megváltozik:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

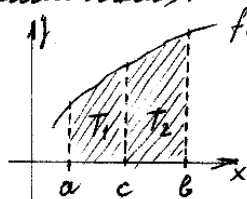
$$\begin{aligned} \text{Pl.: } \int_3^7 (4x+3) dx &= \left[2x^2 + 3x \right]_3^7 = (98+21) - (18+9) = 119-27 = 92 \\ &= - \int_7^3 (4x+3) dx = - \left[(18+9) - (98+21) \right] = -(-92) = 92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bemegyezés: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x)_n] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x)_n] \end{aligned}$$

3. Ha az alsó és felső határ megegyezik, az integrál értéke 0.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

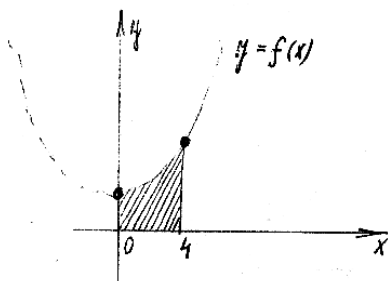
4. A határozott integrál additivitása ill. mérhetősége.
(Additivitás).



$$T_1 + T_2 = T = T_1 + T_2$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Hál. meg az $y = 3x^2 - 6x + 5$ parabola az x és y tengely és az $x = 4$ abszc. ment ordinátáján által határolt területének nagyságát.



$$T = \int_0^4 (3x^2 - 6x + 5) dx = \left[x^3 - 3x^2 + 5x \right]_0^4 =$$

$$= 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 = 64 - 48 + 20 =$$

$$T = 36 \text{ m}^2$$

104. óra

$$1, \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \sin 270^\circ - \sin 0^\circ = -1$$

$$T = 3 \cdot \int_0^{90^\circ} \sin x = 3 \left[-\cos x \right]_0^{90^\circ} = 3(1 - 0) = 3$$

$$2, \int_1^9 3\sqrt{x} dx = \int_1^9 3x^{\frac{1}{2}} dx = \left[3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \left[2\sqrt{x^3} \right]_1^9 = (2 \cdot 27) - (2 \cdot 1) = 52$$

$$3, \int_0^\pi a \sin x dx = a \int_0^\pi \sin x dx = a \left[-\cos x \right]_0^\pi = a \cdot (-\cos 180^\circ + \cos 0^\circ) = a \cdot (1 + 1) = 2a$$

$$4, \int_1^4 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x \right]_1^4 = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_1^4 = \left(\frac{64}{3} + 16 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 + 1 \right) =$$

$$= \frac{63}{3} + 18 - 18 + 21 = 39$$

$$5, \int_2^4 (4x - 3) dx = \left[2x^2 - 3x \right]_2^4 = (32 - 12) - (8 - 6) = 20 - 2 = 18$$

$$6, \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = (\sin 90^\circ) - (\sin 0^\circ) = 1 - 0 = 1$$

$$7, \int_0^{\pi/2} (4 \cos x - 2 \sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} 2 \cos x dx - 2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \left[4 \sin x \right]_0^{\pi/2} - \left[2(-\cos x) \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= (4 - 0) - (0 - 1) = 5$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\sin 2x + \cos \frac{x}{2}) dx = [-\cos 2x]_0^{270^\circ} + [\sin \frac{x}{2}]_0^{270^\circ} = +1 + 1 + 1 - 0 = 3$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^{90^\circ} = 0 + 1 = 1$$

$$\int_2^6 \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{x^{-2}}{2} \right]_2^6 = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_2^6 = -\frac{1}{72} + \frac{1}{8} = \frac{-1+9}{72} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

$$\int_4^6 \sqrt[3]{x^2} dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_4^6 = \left[\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}}{5} \right]_4^6 = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{6^5}}{5} - \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4^5}}{5} = \frac{3}{5} (\sqrt[3]{36^2} - 4 \sqrt[3]{16}) = \frac{18}{5} \sqrt[3]{36} - \frac{12}{5} \sqrt[3]{16}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (1 - 0) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-3}^2 (2x^3 - 3x + \frac{1}{x^2}) dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} \right]_{-3}^2 = \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{16}{2} - \frac{12}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{54}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{51}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{152+2}{6} = -\frac{155}{6}$$

$$\int_{-a}^{+a} x^5 dx = 2 \int_0^a x^5 dx = 2 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^a = 2 \cdot \frac{a^6}{6} = \frac{1}{3} a^6$$

$$\int_a^b x^3 dx = \int_a^b x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_a^b = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{b^4 - a^4}{4}$$

1.9.

105.óra

Kís. meg az $x^2 - 6x + 5$ parabola és az x tengely által bezárt síkbeli területet a $(0;6)$ intervallumban.

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline y & 5 & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 5 \end{array}$$

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}$$

$$x_1 = 3 + 2 = 5$$

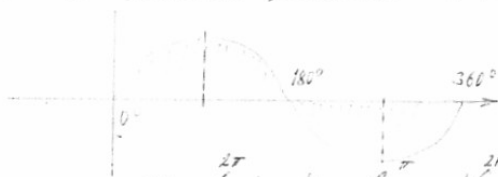
$$x_2 = 3 - 2 = 1$$

$$T = \int_0^1 (x^2 - 6x + 5) dx + \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx + \int_5^6 (x^2 - 6x + 5) dx$$

$$T = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x \right]_1^5 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x \right]_5^6$$

$$T = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 5 - \frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{216}{3} - \frac{216}{2} + 30 - \frac{125}{3} + 75 - 25$$

Ad. meg a sinuszgörbe és az x tengely által
 bekorlátolt síkbeli területet $\alpha(0; 2\pi)$ intervallummal.



$$T = \int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 4 \cdot \int_0^{90^\circ} \sin x dx = 4 \left[-\cos x \right]_0^{90^\circ}$$

$$T = 4 \cdot (-1) = \underline{\underline{4}} \text{ c}^2$$

105. H

1968. IV. 9.

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \langle 2; 4 \rangle$$

$$y = \cos x \quad \langle 0; \frac{3}{2}\pi \rangle$$

$$1.) \quad y = \cos x \quad T = \int_0^{270^\circ} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{270^\circ} = \left[\sin x \right]_0^{180^\circ} + \left[\sin x \right]_{180^\circ}^{270^\circ} = \left| 3 \left[\sin x \right]_0^{90^\circ} \right|$$

$$\langle 0; \frac{3}{2}\pi \rangle \quad T = \left| 3(-\sin 90^\circ) - 3(-\sin 0^\circ) \right| = \left| -3 \right| = \underline{\underline{3}} \text{ c}^2$$

$$2.) \quad y = x^2 - 4x + 3 \quad \langle 2; 4 \rangle$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$$T = \int_2^4 (x^2 - 4x + 3) dx = \int_2^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x \right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_3^4 =$$

$$= \left| \left(\frac{27}{3} - \frac{36}{2} + 9 \right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{2} + 6 \right) \right| + \left| \left(\frac{64}{3} - 32 + 12 \right) - \left(\frac{27}{3} - 18 + 9 \right) \right| =$$

$$= \left| 9 - 18 + 9 - 6 + 8 - \frac{8}{3} \right| + \left| \frac{64}{3} - 32 + 12 - 9 + 18 - 9 \right| =$$

$$= \left| 2 - \frac{8}{3} \right| + \left| -20 + \frac{64}{3} \right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}} \text{ c}^2$$

1) $y = 4 - x^2$ x $T = ?$

$$T = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 12$$

$$= 2 \left(\frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ m}^2$$

$4 - x^2 = 0$
 $-x^2 + 4 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x_{1,2} = \pm 2$

2) Hat meg az $y = 3 - 2x - x^2$ parabolaig és az x tengely által
 korlátolt sírkészület területét

$$3 - 2x - x^2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \quad x_1 = -3; \quad x_2 = 1$$

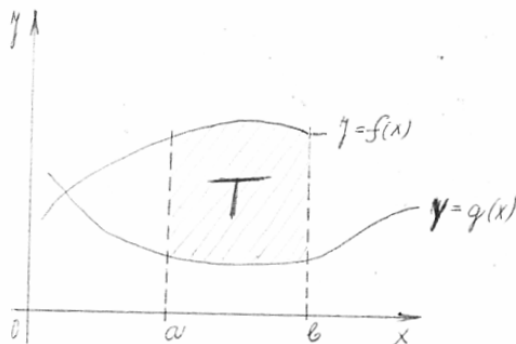


$$T = \int_{-3}^1 (3 - 2x - x^2) dx = \left[3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1$$

$$T = \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-9 - 9 + 9 \right) = 2 + 9 - \frac{1}{3} = 10 \frac{2}{3} \text{ m}^2$$

3) Hatn be az $y = \sin x$ görbe és az x L. körüli sírkészület, $x \in \langle 0; \pi \rangle$

$$y = \sin x \quad T = \int_0^\pi \sin x dx = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos 180^\circ + \cos 0^\circ = 2 \text{ m}^2$$



$$y = f(x) \dots \dots T_1$$

$$y = g(x) \dots \dots T_2$$

$$T = T_1 - T_2$$

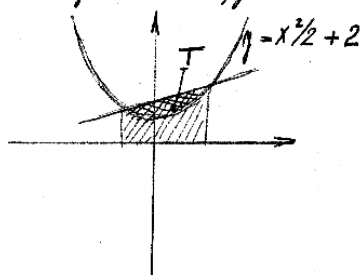
$$T_1 = \int_a^b f(x) dx$$

$$T_2 = \int_a^b g(x) dx$$

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$T = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Hat. meg az az síkidom területét melyet az $y = \frac{x^2}{2} + 2$ parabola és az $x - 2y + 10 = 0$ egyenes határolnak!



$$y = \frac{x^2}{2} + 2 = \frac{x^2 + 4}{2}$$

$$x - 2y + 10 = 0 \rightarrow y = \frac{x + 10}{2}$$

$$y = y \rightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = x + 10 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \quad \left(x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 56}}{2} \right)$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2$$

$$T = \int_{-2}^3 \frac{1}{2}(x + 10) dx - \int_{-2}^3 \frac{1}{2}(x^2 + 4) dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{-2}^3 (x + 10 - x^2 - 4) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^3$$

$$T = \frac{1}{2} \left(-9 + \frac{9}{2} + 18 + \frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12 \right) = \frac{1}{2} \left(7 + \frac{8}{3} + \frac{9}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{42 + 16 + 27}{6}$$

$$T = \frac{85}{12} = 7 \frac{1}{12} \text{ m}^2$$

107.óra

1968. IV. 11

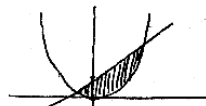
Leír. ki az $y = 2x + 3$ és az $y = x^2$ p. által berakott területet.

$$y = y \rightarrow 2x + 3 = x^2$$

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$$

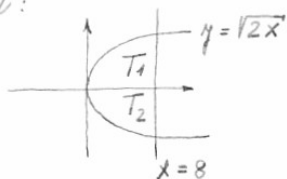


$$T = T_1 - T_2$$

$$T = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3$$

$$T = (9 + 9 - 9) - \left(1 - 3 + \frac{1}{3} \right) = 9 - \left(-\frac{2}{3} \right) = 9 \frac{2}{3} \text{ m}^2$$

Grán. ki az $y^2=2x$ parabola és az $x=8$ egyenes által berakott síkterület:



$$T = T_1 + T_2$$

$$T = 2 T_1$$

$$T = 2 \int_0^8 \sqrt{2x} dx = 2 \cdot \sqrt{2} \int_0^8 x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \sqrt{2} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^8$$

$$T = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{8} = \frac{32}{3} \cdot \sqrt{16} = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3} \text{ o}^2$$

Grán. ki az $y = x^3 + x^2 - 2x$ görbevonalt az x tengely és az $x = -2; 2$ egyenesek által határolt területet.

$$y = 0$$

$$y = x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_2 = 1; x_3 = -2 \quad x_1 = 0$$



$$T = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x) dx$$

$$T = \left| -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right) \right|_0^1 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right) \right|_1^2$$

$$T = \left| -4 + \frac{8}{3} + 4 \right| + \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right| + \left| 4 + \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right| =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \left| 1 + \frac{8}{3} - \frac{7}{12} \right| = \frac{32+5+5+32}{12} = \frac{74}{12} = 6\frac{1}{6} \text{ o}^2$$

IV. 109. sz.

1. Hat meg az $y = x^2$ görbevonalt és az $y = x$ egyenes által berakott területet.

2. Hat meg az $y = x^2 - 7x^2 + 10x$ görbevonalt és az $y = 0$ egyenes által berakott területet.

3. Hat meg a 2 parabolaq által berakott síkterület területét:

$$y_1 = [-3x] = -3 + 8x - 2x^2 \quad y_2 = 6 - 4x + x^2 \quad [4]$$

$$y = 6 + x - x^2 \quad x\text{-tengely} \quad [125/6]$$

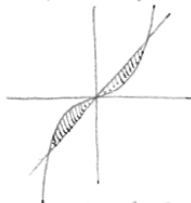
5. Grán. ki az $y = 2x + 3$ egyenes az x t. és az $x = 1$ és $x = 4$ absz. pontokhoz tartozó ordináták által hat. síkterület területét.

6. Hat meg a kör. fg. által jellemezett görbevonalt és az x t. által berakott terület nagyságát a kezdőpont és a 4-absz. pont. körözl.

$$y = x^3$$

$$y = x^3/4 + x^2/3 - x$$

1. $y = x^3$ $y = x$



$y = y \rightarrow x^3 = x$
 $x^3 - x = 0$
 $x(x^2 - 1) = 0$
 $x = \pm 1$

$$T = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 0^2$$

2. $y = x^3 - 7x^2 + 10x$ $y = 0$

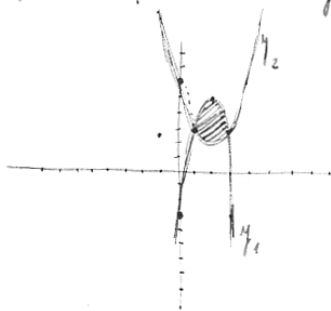


$x(x^2 - 7x + 10) = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 2$

$$\begin{aligned} T &= \left| \int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10x) dx \right| + \left| \int_2^5 (x^3 - 7x^2 + 10x) dx \right| = \\ &= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 \right]_2^5 \right| = \\ &= \left| 4 - \frac{56}{3} + 20 \right| + \left| \frac{625}{4} - \frac{875}{3} + 125 - 4 + \frac{56}{3} - 20 \right| = \\ &= \frac{72 - 56}{3} + \left| 101 + \frac{625}{4} - \frac{875}{3} \right| = \frac{16}{3} + \left| 101 - 273 + 156 \frac{1}{4} \right| = \\ &= \frac{16}{3} + 15 \frac{3}{4} = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{64 + 189}{12} = \frac{253}{12} = 21 \frac{1}{12} \cdot 0^2 \end{aligned}$$

3. $y_1 = -3 + 8x - 2x^2$
 $y_2 = 6 - 4x + x^2$



$y_1 = y_2 \rightarrow -3 + 8x - 2x^2 = 6 - 4x + x^2$

$0 = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 1$

$$\begin{aligned} T &= \int_1^3 (-3 + 8x - 2x^2 - 6 + 4x - x^2) dx = \int_1^3 (-9 + 12x - 3x^2) dx \\ T &= \left| \left[-9x + \frac{12x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} \right]_1^3 \right| = \left| \left[-9x + 6x^2 - x^3 \right]_1^3 \right| = \\ &= \left| -27 + 54 - 27 + 9 - 6 + 1 \right| = 4 \cdot 0^2 \end{aligned}$$

4. $y = 6 + x - x^2$

$6 + x - x^2 = 0$
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$

$x_1 = -2; x_2 = 3$

$T = \left| \int_{-2}^3 (6 + x - x^2) dx \right| = \left| \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 \right| =$

$= \left| 18 + \frac{9}{2} - 9 + 12 - 2 - \frac{8}{3} \right| = \left| 19 + \frac{27 - 16}{6} \right| = \left| 19 + 1 \frac{11}{6} \right| = 20 \frac{5}{6} \cdot 0^2$

5. $y = 2x + 3 \quad x \in [1; 4]$

$T = \int_1^4 (2x + 3) dx = \left[x^2 + 3x \right]_1^4 = 16 + 12 - 1 - 3 = 28 - 4 = 24 \cdot 0^2$

6. $y = x^3 \quad x \in [0; 4]$

$T = \left| \int_0^4 x^3 dx \right| = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{4^4}{4} - 0^4 = 64 \cdot 0^2$

$y = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} - x \quad x \in [0; 4]$ $T = \left| \int_0^4 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} - x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 \right| =$
 $= \left| 16 + \frac{64}{9} - 8 \right| = 8 + 7 \frac{1}{9} = 15 \frac{1}{9} \cdot 0^2$

16.

10.000.

1)

$$y = x^2 - 5x + 3 \quad x \in (0; 5)$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = 2,5 + \sqrt{13}/4$$

$$x_2 = 2,5 - \sqrt{13}/4$$

$$x_1 \approx 4,3$$

$$x_2 \approx 0,7$$

$$T = \left| \int_0^{0,7} (x^2 - 5x + 3) dx \right| + \left| \int_{0,7}^{4,3} (x^2 - 5x + 3) dx \right| + \left| \int_{4,3}^5 (x^2 - 5x + 3) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x \right]_0^{0,7} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x \right]_{0,7}^{4,3} \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x \right]_{4,3}^5 \right| =$$

$$= \left| \frac{0,343}{3} - \frac{2,45}{2} + 2,1 \right| + \left| \frac{79,5}{3} - \frac{92,45}{2} + 12,9 - \frac{0,343}{3} + \frac{2,45}{2} - 2,1 \right| +$$

$$+ \left| \frac{125}{3} - \frac{125}{2} + 15 - \frac{79,5}{3} + \frac{92,45}{2} - 12,9 \right| =$$

$$= \left| \frac{A}{3} - \frac{2,45}{2} + 2,1 \right| + \left| \frac{79,5}{3} - \frac{92,45}{2} + 12,9 - \frac{A}{3} + \frac{2,45}{2} - 2,1 \right| +$$

$$+ \left| \frac{125}{3} - \frac{125}{2} + 15 - \frac{79,5}{3} + \frac{92,45}{2} - 12,9 \right| =$$

$$= 0,994 + 7,814 + 12,6 = \underline{\underline{21,408}} \text{ } \circ^2$$

$$13:4 = 3,25$$

$$\sqrt{3,25} = 1,8$$

$$2,25 \cdot 28,8$$

$$\begin{array}{r} 4,3^2 18,49 \cdot 4,3 \\ 16 \quad 7396 \\ 249 \quad 5547 \\ \hline 79,507 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,214 - 56,5 \\ -1,222 \quad 5,8 \\ \hline -0,994 \end{array}$$

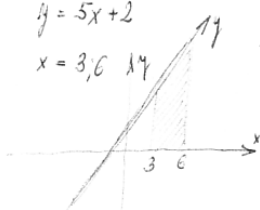
$$\begin{array}{r} 46,22 \quad 5,8 \\ -39,40 \quad 6,8 \\ \hline -6,82 \quad 1,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6,82 \quad 1,0 \\ 10,994 \\ \hline 7,814 \end{array}$$

2)

$$y = 5x + 2$$

$$x = 3,6$$



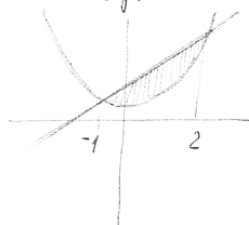
$$T = \int_3^6 (5x + 2) dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 2x \right]_3^6 = \left(\frac{180}{2} + 12 \right) - \left(\frac{45}{2} + 6 \right) = 102 - 28,5 = \underline{\underline{73,5}} \text{ } \circ^2$$

68 →

3)

$$y = \frac{x^2}{3} + 2$$

$$x - 3y + 8 = 0 \rightarrow y = \frac{x+8}{3}$$



$$y = y \rightarrow \frac{x^2 + 6}{3} = \frac{x + 8}{3}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

$$T = \int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{3} + \frac{8}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} \right) dx = \int_{-1}^2 \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (7,5 - 3) = \frac{1}{3} \cdot 4,5 = \underline{\underline{1,5}} \text{ } \circ^2$$

A forgátestek köbtartalmainak kiszámítása

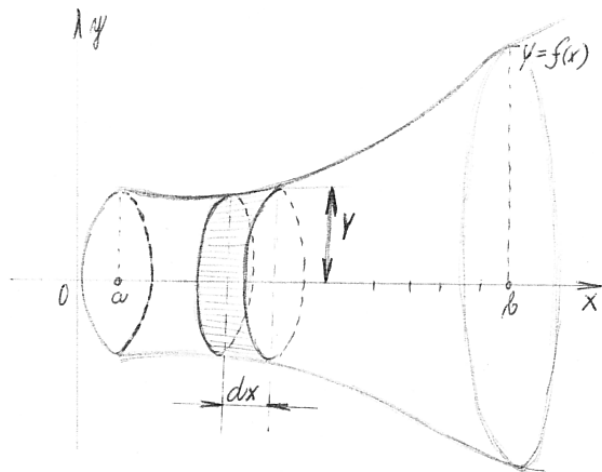
A mérési feladatok megoldásánál, a testek köbtartalmainak kiszámításakor felhasználhatjuk a határozott integrált.

[Ha $n \rightarrow \infty$ -re és $\Delta x \rightarrow 0$ -hoz tartunk az alábbi felírt határozott integrál, mely meggyűnik. Ezen határozott integrál között van az $f(x)$ függvény határozott integrálja: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S_n = \int_a^b f(x) dx$.]

És a művel a kubaturára.

Csak a forgátestekkel foglalkozunk, amelyek az $y=f(x)$ függvényről meghatározott görbén az x tengely körüli forgással (rotációval) jön létre.

Azonkivül adott két az x tengelyre merőleges sík, melyek közepén fekszik a forgástest adott (kerekelt) része.



$$\frac{b-a}{n} = dx$$

Egy térfogat-elem köbtartalma adott a dx magasságú és y sugarú henger térfogatával: $dV = y^2 \pi \cdot dx$

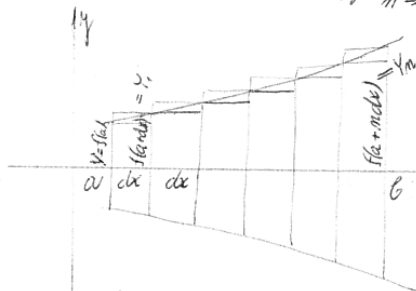
Tehát a keresett térfogat:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Az x tengellyel; az $y=f(x)$ görbe x_1 és x_2 abszcisszájú végpontjai-
val meghatározott ívvel meghatározott területnek x tengely
körüli forgatással létrejött mérési test térfogata: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

Ha a test az y tengely körüli forgással jön létre: $V = \pi \int_a^b x^2 dy$.

[bebizonyítható, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mV} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mV} = \pi \int_a^b y^2 dx = V$]:



$$dx = \frac{b-a}{n}$$

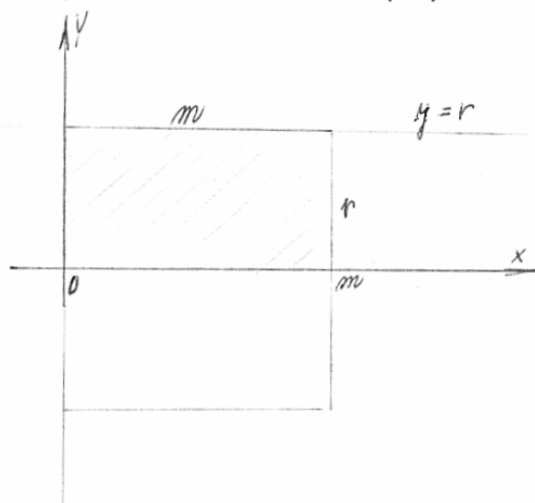
$$V_1 = dx \cdot \pi (y_1^2 + \dots + y_m^2) = S_{mV}$$

$$V_2 = dx \cdot \pi (y_a^2 + y_1^2 + \dots + y_{m-1}^2) = S_{mV}$$

$$V_1 \geq V \geq V_2$$

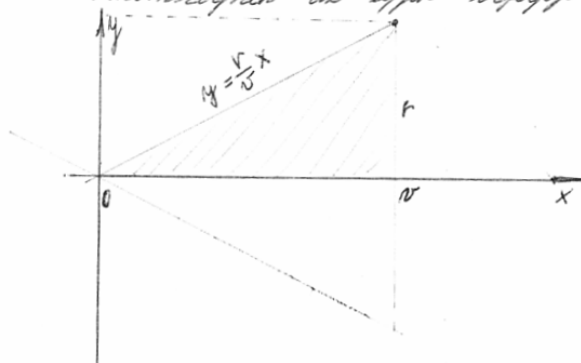
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} V_2 = \int_a^b \pi y^2 dx = V$$

12. 1.) Szám. ki a forg. heng. térfogatát, mely egy téglalapnak az egyik oldalát körüli forgatással keletkezik.



$$V = \pi \int_0^m r^2 dx = \pi r^2 \left[x \right]_0^m = \underline{\underline{\pi r^2 m}}$$

- 2.) Szám. ki a forg. kúp térfogatát, mely egy derékszögű háromszögnek az egyik befogóját körüli rotációjával jön létre.



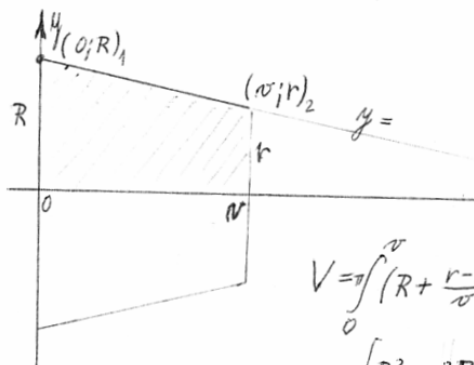
$$y = x \tan \alpha = \frac{r}{n} x$$

$$dV = \pi y^2 dx$$

$$V = \int_0^n \pi y^2 dx = \pi \int_0^n \frac{r^2}{n^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{n^2} \int_0^n x^2 dx$$

$$V = \frac{\pi r^2}{n^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^n = \frac{\pi r^2 n^3}{n^2 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi r^2 n}}$$

- 3.) Szám. ki a csőhüvely kötéscsalánál megadott képletet:



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \rightarrow y - R = \frac{r - R}{n} x$$

$$y = R + \frac{r - R}{n} x$$

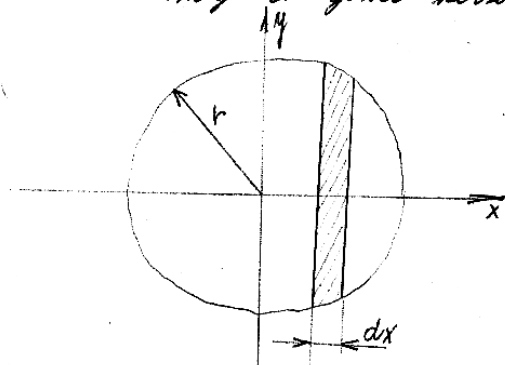
$$dV = \pi dx \left(R + \frac{r - R}{n} x \right)^2$$

$$V = \int_0^n \left(R + \frac{r - R}{n} x \right)^2 dx = \pi \left[\int_0^n R^2 dx + \int_0^n \frac{2R(r - R)x}{n} dx + \int_0^n \frac{(r - R)^2 x^2}{n^2} dx \right]$$

$$= \pi \left[R^2 n + \frac{2R(r - R)n^2}{2n} + \frac{(r - R)^2 n^3}{3n^2} \right] =$$

$$= \pi \frac{3R^2 n^3 + 3R(r - R)n^3 + (r - R)^2 n^3}{3n^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi n (R^2 + Rr + r^2)}}$$

4. Hat meg a gömb kötérszámát hifjéno képlettel:



$$y^2 + x^2 = r^2 \rightarrow y^2 = r^2 - x^2$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi (r^2 - x^2) dx$$

$$V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi r^2 \left[x \right]_0^r - 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$V = 2\pi r^3 - 2\pi \frac{r^3}{3} = \frac{6}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5. A gömbrebel képfogata:

$$V = \pi \int_a^r (r^2 - x^2) dx$$

$$a = r - r \quad (r - a \text{ gömben. mag.})$$

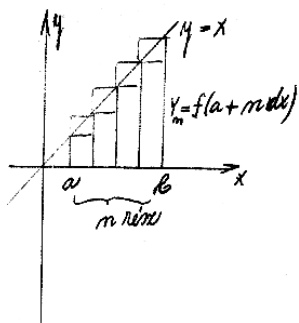
$$V = \pi \int_{r-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-r}^r = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r-r) + \frac{(r-r)^3}{3} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{3r^3 - r^3 - 3r^2r + 3r^2r + r^3 - 3r^2r + 3r^2r - r^3}{3} \right] = \frac{\pi}{3} (3r^2r - r^3) = \frac{\pi r^2}{3} (3r - r)$$

6. Hat meg a forgási - paraboloid kötérszámát V , mely az $\langle a; b \rangle$ intervallumban az $y^2 = 2px$ parabola x tengely körüli rotációjával jön létre.

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \cdot 2px dx = 2p\pi \cdot x dx$$

$$V = 2p\pi \int_a^b x dx = 2p\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = 2p\pi \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) = p\pi (b^2 - a^2)$$



$$V > V^* > K$$

$$V = \pi dx [f(a) + f(a+dx) + \dots + f(a+(m-1)dx)]$$

$$K = \pi dx [f(a+dx) + \dots + f(a+mdx)]$$

$$V = \pi dx [ma + (1+dx+2dx+\dots+(m-1)dx)] = \pi dx \left[ma + dx \frac{1+(m-1)}{2} m \right]$$

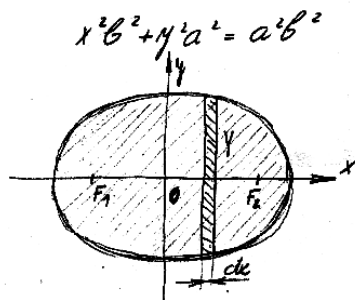
$$K = \pi dx [ma + (1dx+2dx+\dots+mdx)] = \pi dx \left[ma + dx \frac{1+m}{2} m \right]$$

$$V = \pi dx m \left(a + \frac{m-1}{2} dx \right) = \pi \frac{b-a}{m} m \left(a + \frac{m-1}{2} \frac{b-a}{m} \right) = \pi (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right)$$

11. 18.

11. 18.

1.)



$$V = \pi \int_0^b y^2 dx$$

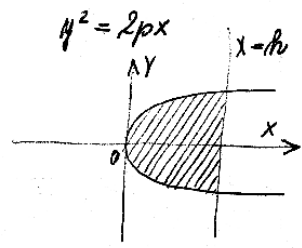
$$y^2 = \frac{a^2 b^2 - x^2 b^2}{a^2} = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$V = 2\pi \int_0^a (b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2) dx = 2\pi b^2 \int_0^a dx - 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx$$

$$V = 2\pi b^2 a - 2\pi \frac{b^2}{a^2} \frac{a^3}{3} = 2\pi b^2 a - 2\pi b^2 a : 3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

2.)

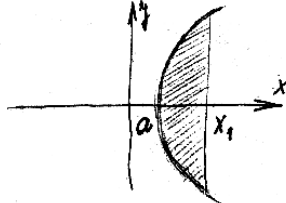


$$V = \pi \int_0^h y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^h 2px dx = 2\pi p \int_0^h x dx = 2\pi p \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^h = \pi p h^2$$

3.)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x) \quad (a; x_1)$$



$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \rightarrow y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$$

$$V = \pi \int_a^{x_1} (\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2) dx = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) - \pi b^2 x_1 + \pi b^2 a$$

$$V = \pi b^2 \left(\frac{x_1^3}{3} - x_1 \right) - \pi b^2 \left(\frac{a^3}{3} - a \right) = \pi b^2 \left[\frac{x_1^3}{3} - x_1 - \frac{a^3}{3} + a \right]$$

$$x^2 - y^2 = 4 \quad (y) \quad [64/3\pi]$$

$$y = \pm 2$$

$$x \cdot y = 4 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4 \quad (x) \quad y = 0 \quad [12\pi]$$

1.)

$$x^2 - y^2 = 4$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x^2 dy = 2\pi \int_0^2 (4 + y^2) dy = 2\pi \cdot 4 \cdot 2 + 2\pi \cdot \frac{8}{3} = 16\pi + \frac{16}{3}\pi = \underline{\underline{\frac{64}{3}\pi}}$$

2.)

$$XY = 4 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4$$

$$V = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = \pi \int_1^4 16x^{-2} dx = 16\pi \int_1^4 x^{-2} dx = 16\pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = 16\pi \cdot \frac{1}{4} - 16\pi \cdot \frac{1}{1}$$

$$V = -4\pi + 16\pi = \underline{\underline{12\pi}}$$

Axiómák, definíciók, tételek és bizonyítások.

Az axióma - alapigazság. - olyan matematikai igazság, mely bizonyítani nem kell, de nem is lehetne, könnyen belátható.
Az axiómák nem lehetnek ellentmondásosak és nem következhetnek egyik a másikból vs. függetlenek egymástól. Pp.

Az illeszkedés axiómái:

1. Két pontra egy és csak 1 egyenes illeszkedik.
2. Három nem egy egyenesen fekvő pontra egy és csak egy sík illeszkedik.
3. Ha egy egyenes 2 pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik arra a síkra.
4. Az egyenesnek végtelen sok pontja van.
5. Egy sík bizony pontjaira a síkban végtelen sok egyenes illeszkedik.
6. A sík minden pontjára végtelen sok sík illeszkedik.
7. Két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.
8. Ha egy egyenes és 1 sík nem illeszkedik egymásra, akkor legfeljebb egy közös pontjuk van.

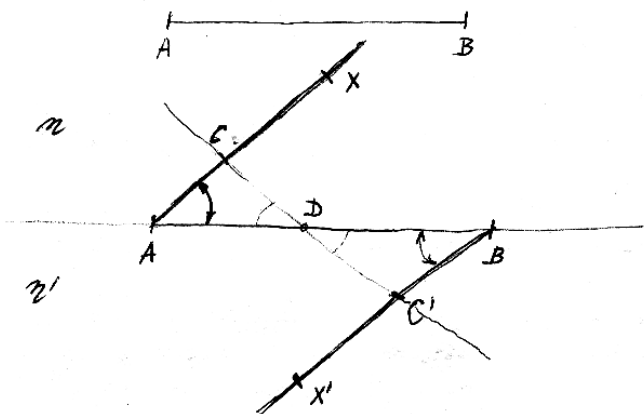
A rendezés axiómái:

1. Az egyenesen fekvő 3 különböző pont közül mindig csak 1 fekszik a másik kettő között.
2. A tér bizony P pontja a rajta áthaladó fektőlőleges g egyenes 2 részre osztja úgy, hogy ezeket a részeket g_1 , g_2 vel jelölve, a g egyenes valamely pontjaira a P akkor és csak akkor vonatkozik el, ha a két pont egyike g_1 -ben, másik g_2 -ben fekszik.

3. A kör amely L egyenesre a rajta áthaladó
 kétszögletű L síkhoz L síkba esője úgy, hogy
 mely A és B pontok akkor és csak akkor
 tartoznak az L két különböző részéhez,
 ha az AB egyenes metszi L -t, és az metszéspont
 elválasztja A és B pontot.
4. A kör amely L sík L síkba esője úgy,
 hogy mely A és B pontok akkor és csak akkor
 tartoznak a két különböző részéhez, ha
 az AB egyenes metszi L -t, és a metszéspont
 elválasztja az A, B pontokat.

Definíció - meghatározás - az a gondolatban művelet,
 mely a fogalom halmazát
 jellemző definíció r. meghatározás.
 Pl: má a kör, az ellipszis, parabola, gömb, ...

A tétele fogalma. - az az a matematikai állítás,
 melyet bizonyítani kell,
 matematikai tételeknek nevezzük.
 Minden matematikai tétel állításból és következtetésből
 áll. A tétel rendszereit ha össze, a következtetés
 pedig akkor kifejezésre kerülő.
 Tétel: Minden matematikai tétel egy tétel, melyből.



$$\angle BAX = \angle ABX'$$

$$AC = BC'$$

$$ADC = C'DB$$

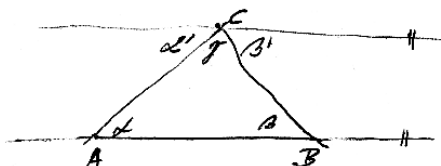
$$\downarrow$$

$$ADC \cong BDC'$$

$$\downarrow$$

$$AD = BD$$

A Δ belső szögének összege 180° .

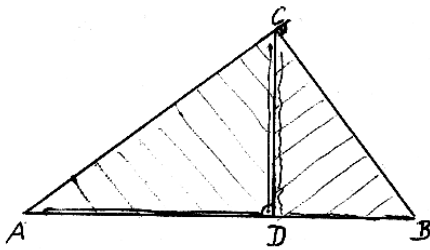


$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ \quad \left| \begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \end{array} \right.$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$R \neq \Delta$
A háromszög magassága a befogók vetületeinek mértani középértéke



$$CD^2 = AD \cdot BD \quad CD = \sqrt{AD \cdot BD}$$

$$\angle DAC = \angle BAC$$

$$\triangle ADC \sim \triangle ACB$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CDB$$

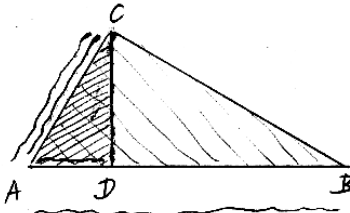
$$DC : AD = BC : DC \quad | \cdot AD \cdot DC$$

$$DC^2 = AD \cdot BD$$

$$DC = \sqrt{AD \cdot BD}$$

A befogóval Δ befogóra emelt merőleges egyenlő az átfogó és az adott befogóval az átfogóra való merőleges vetületeinek a szorzatával.

A $R \neq \Delta$ befogói mértani középértéke az átfogó és a befogó vetülete.



$$\triangle ABC \sim \triangle ACD$$

↓

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD} \quad BC = \sqrt{AB \cdot BD}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB} \quad | \cdot BC \cdot AB$$

$$AB \cdot BD = BC^2 \quad BC = \sqrt{AB \cdot BD}$$

Pythagorasz tétel:

A $R \neq \Delta$ -ben az átfogó négyzete egyenlő a befogók négyzetének összegével.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

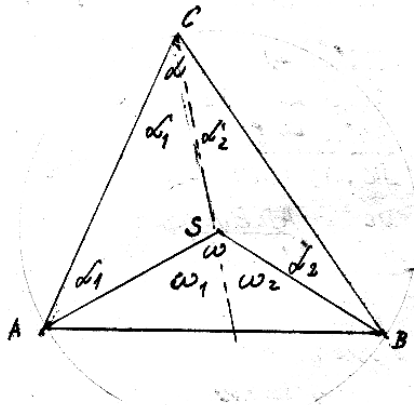
$$AC^2 = AD \cdot AB$$

$$BC^2 = AB \cdot BD$$

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + AB \cdot BD = AB(AD + BD) = AB(AD + DB)$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

*Ajgarmatksan a kőben baromely korallai mag felt az ujjammaron
korimua latoró kőigymali mognak.*



$$\alpha = \frac{\omega}{2}$$

$$\begin{aligned} ASC \Delta &\rightarrow AS = SC \Rightarrow SCA_{\Delta} = SAC_{\Delta} \\ SC = SB &\Rightarrow SCB_{\Delta} = SBC_{\Delta} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 - \text{ASCA} \text{ kullu} \text{ möge} \\ \omega_2 - \text{BSCA} \text{ — " —} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_1 = 2\omega_1 \\ \omega_2 = 2\omega_2 \end{array}$$

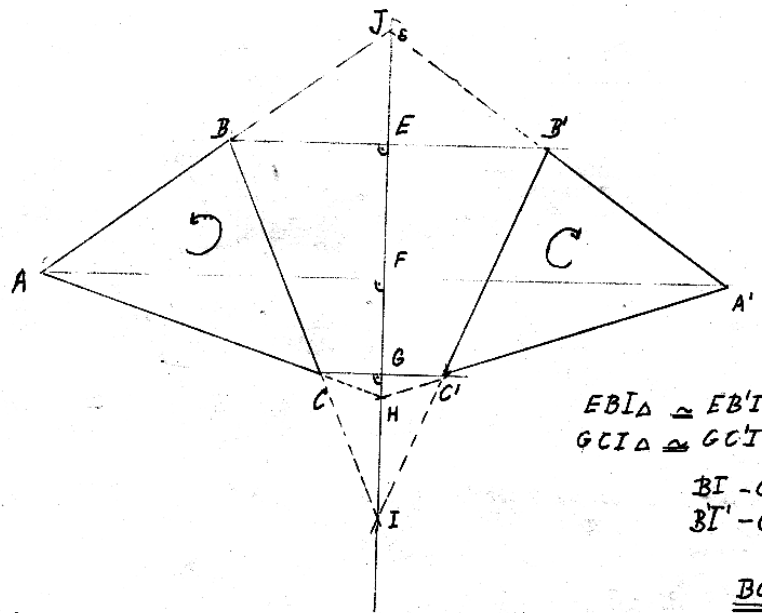
$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega = 2\phi_1 + 2\phi_2$$

$$\omega = 2(\alpha_1 + \alpha_2) \quad / \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$\omega = 2\mathcal{L}$$

A longelys nimmetria ellenkerő-júciú egyvagyong.



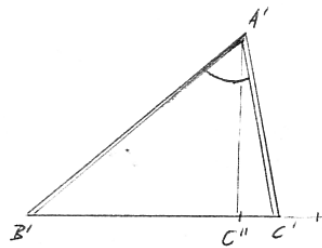
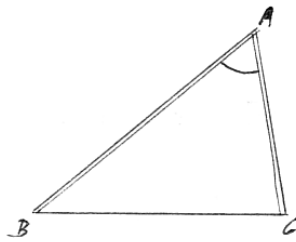
$$\begin{aligned} BE &= EB' \\ CG &= C'G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EBI\Delta &\cong EB'I\Delta \rightarrow BE = B'I' \\ GCI\Delta &\cong GC'I\Delta \Rightarrow CI = C'I'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BI - CI &= CB \\ BI' - CI' &\stackrel{||}{=} C'B' \end{aligned}$$

$$\underline{BC = B'C'}$$

Két Δ egybevágó, ha két-két megfelelő oldaluk és a közbeeső szög egyenlő



$$\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \\ \angle BAC &= \angle B'A'C' \\ \hline ABC \Delta &\cong A'B'C' \Delta \end{aligned}$$

Egyenlő oldalúak minden egyenlő szög.

$$\angle ABC = \angle A'B'C' \quad \angle A = 180^\circ$$

↓

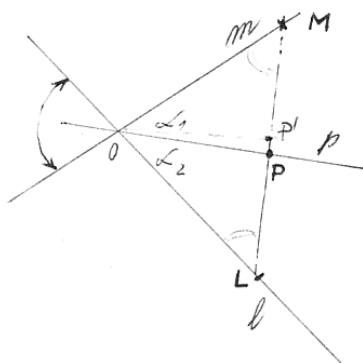
$$\angle A'CB' = \angle ACB$$

$$BC = B'C'$$

fordított következtetés

feltét, hogy $BC \neq B'C'$, de ekkor kell
hogy $BC = B'C''$, de ekkor $\angle BAC = \angle B'A'C''$,
ami nem igaz, mert
 $\angle BAC$ egyenlő nem azonos
 $\angle B'A'C'$ és $\angle B'A'C''$ szöggel, csak ha $C' = C''$

Lehet-e megfelelő félreértés: $\angle PM = \angle PL$



feltevésként $MO = LO$ feltevésként.

OLMA - egyenlő oldal. egyenlő szög:

$$\angle OMP = \angle OLP$$

$$\text{Felt., hogy } \angle L_1 = \angle L_2 \Rightarrow \angle OPM = \angle OPL$$

$$\angle OMP \Delta \cong \angle OLP \Delta$$

$$\angle OMP = \angle OLP$$

$$OL = OM$$

feltev. P.L: $MP = PL$; O, P - n csak 1 egyenes

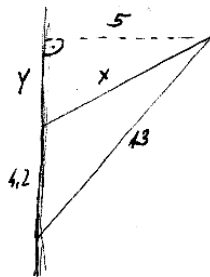
$$\left. \begin{aligned} OM &= OL \\ OP &= OP \\ MP &= PL \end{aligned} \right\} \downarrow$$

$$\angle OMP \Delta \cong \angle OLP \Delta$$

$$\angle OMP = \angle OLP \quad \angle MPO = \angle LPO$$

$$\angle L_1 = \angle L_2$$

1. Egy felhő árnyékának alján mértéke 13m -re és a föld felszínéhez képest a felhő 5m. Mekkora a felhő árnyékának mérete, ha a föld felszínéhez képest 4,2m -re van a felhő?



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 25 + y^2 = x^2 \\ & 25 + (y + 4,2)^2 = 169 \\ & 25 + y^2 + 8,4y + 17,64 = 169 \\ & y^2 + 8,4y = 123,4 \\ & y^2 + 8,4y - 123,4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-8,4 \pm \sqrt{70,56 + 4936}}{2} = \frac{-8,4 \pm \sqrt{5006,56}}{2} \\ y &= -4,2 + 12 = 7,8 \\ x^2 &= 25 + y^2 = 25 + 61 = 86 \\ x &= 9,3 \text{ m} \end{aligned}$$

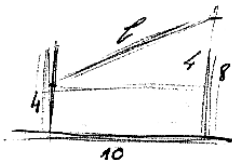
2. Két gépészeti munkás egymással szembe fordítva állnak. A munkások közötti távolság 10m és a cs. végén 8 ill. 4m magasan helyezkednek el.

3. A munkások 302km magasan emelkedett felhő felől néznek. A felhő felől a munkások közötti távolság 10m és a cs. végén 8 ill. 4m magasan helyezkednek el. A felhő felől a munkások közötti távolság 10m és a cs. végén 8 ill. 4m magasan helyezkednek el.

4. Két munkás egymással szembe fordítva állnak. A munkások közötti távolság 10m és a cs. végén 8 ill. 4m magasan helyezkednek el.

Kérdés:

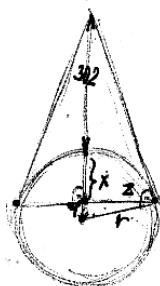
②



$$\begin{aligned} l^2 &= 10^2 + 4^2 \\ l &= \sqrt{100 + 16} \\ l &= \sqrt{116} \\ l &= 10,8 \text{ m} \end{aligned}$$

④

③



$$r = 6370 \text{ km} = x + y \rightarrow y = 6370 - x$$

$$z^2 = r^2 - y^2 = x(302 + x)$$

$$r^2 - y^2 = 302y + xy$$

$$r^2 - (6370 - x)^2 = 302(6370 - x) + x(6370 - x)$$

$$6370^2 - 6370^2 + 12740x + x^2 = 302 \cdot 6370 - 302x + 6370x - x^2$$

$$2x^2 + 12740x - 1923000 = 0$$

$$x^2 + 3336x - 961850 = 0$$

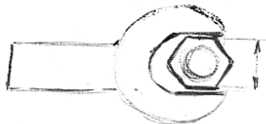
$$x = -1668 \pm \sqrt{2780000 - 961850} = -1668 \pm \sqrt{1818150}$$

$$x = -1668 + 1348 = -320$$

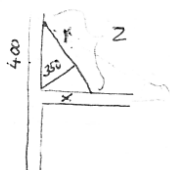
főmunkás + asszony.

⑤. Két egyenes csövet átvezetünk keresztben egymás mellett. Az egyiket 400 mm-re a keresztmetszéstől egyenesen ágasítjuk el a másikba illeszkedően. A csövet legkisebb károsodás az illesztésnél 350 mm. Milyen hosszú a cső a csatlakozásig, a másik félre?

⑥. Egy csőcsatlakozás átmérője 2,5 mm hosszú, melyben x mélyedési csőcsatlakozás kell lennie, ha a csőcsatlakozás köré 0,5 mm károsodás és mélység van. [4,4 cm]



5.



$$x \cdot 350 = 400 \cdot y \rightarrow x = \frac{400 \cdot 350}{y}$$

$$y = \sqrt{400^2 - 350^2} = \sqrt{100 \cdot 4^2 - 100 \cdot 3,5^2} = 100 \sqrt{16 - 12,25} = 100 \sqrt{3,75}$$

$$y = 100 \cdot 1,8 = 180 \text{ mm}$$

$$x = \frac{140000}{180} = \frac{7000}{9} = 777,77 \text{ mm}$$

$$z = \sqrt{400^2 + x^2} = \sqrt{100^2(4^2 + 7,77^2)} = 100 \sqrt{16 + 60,8}$$

$$z = 100 \sqrt{76,8}$$

$$z = 100 \cdot 8,76 = 876$$

$$\underline{876 \text{ mm} \quad 778 \text{ mm}}$$

6.

$$t = 2\sqrt{2,5^2 - 1,25^2} + 0,1 = 2\sqrt{6,25 - 1,56} + 0,1 = 2\sqrt{4,69} + 0,1$$

$$t = 2 \cdot 2,165 + 0,1 = 4,33 + 0,1 = \underline{4,43 \text{ cm}}$$

A valószínűségelméleti elemek

A voss. fogalma, az egyszerű valószínűség.

A mindennapi életben sokszor események bekövetkezését valószínűsítjük v. valószínűtlenségnek mondjuk azokat, amiket az az esemény megegyező "hülmények" mellett általában kevés gyakorran v. ritkán szokott bekövetkezni.

A matematikában az esemény bekövetkezésének valószínűsége az történés jele π , amelynek mértékegysége az esemény bekövetkezésének "néhány kedvező" esetek száma, pontosan pedig az összes lehetséges esetek számát jelenti. Az így kifejezett valószínűségeket egyszerű v. abszolút valószínűségekné nevezzük.

$$\pi = \frac{k}{l}$$

π - abszolút valószínűség

k - kedvező esetek száma

l - összes lehetséges esetek száma

Pé: mennyi annak a voss., hogy egy kockával 5-mel kisebb számot dobunk?

$$l = 6, \quad k = 4 \rightarrow \pi = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,6$$

Az egyszerű valószínűségeket mindig valódi törtként fejezük ki. Ha a voss.-t kifejező tört értéke az egyszerű, racionális:

$$\pi = \frac{k}{l} = 1 \rightarrow k = l$$

akkor a valószínűség bizonyossággal való.

Ebben az esetben az összes lehetséges eset kedvező is.

Pé: kockával 7-mel kisebb számot dobni.

Ha ellenben a voss. értéket kifejező tört értéke 0:

$$\pi = \frac{k}{l} = 0 \rightarrow k = 0$$

azaz kedvező eset egyáltalán nem fordul elő a voss.-ig tehát lehetetlenséggel való.

Amikor hogy $\pi \approx \frac{1}{2}$ az esemény bekövetkezésének valószínűsége, bizonytalanság, ill. valószínűtlenség nevezzük. A valószínűtlenséget tehát nem ellentét a valószínűsége, hanem annak csak alacsonyabb fokozata.

Pé: Kockával 1-dobásra járó számot dobunk - bizonytalan,
"- 5-mel kisebb számot dobunk - valószínű,
hozzá 2-4 dobunk - valószínűtlenség.

Ha mely esemény l eset közül k kedvező esetben bekövetkezik, akkor $l-k$ esetben az ún. kedvezőtlen esetekben, nem következnek be. A be nem következés valószínűsége tehát $\pi_1 = \frac{l-k}{l}$

Mégeg az eredeti mennyiség ellentett mennyiségére
vesszük.

$$r + r_1 = 10 + 1 - 10 = 1 \quad r_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 1 - 10$$

Az ellentett mennyiség összege az egység.

$$1) \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{y}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{y}{3y+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{6y+2+y}{3y+1}} = 1 + \frac{3y+1}{7y+2} = \frac{7y+2+3y+1}{7y+2} = \frac{10y+3}{7y+1}$$

$$2) \quad \frac{\frac{x}{4} - \frac{x-1}{5}}{\frac{x+1}{6} - \frac{x-1}{10}} = \frac{\frac{5x-4x+4}{20}}{\frac{10x+10-6x+6}{60}} = \frac{\frac{x+4}{20}}{\frac{4x+16}{60}} = \frac{60(x+4)}{20 \cdot 4(x+4)} = \frac{3}{4}$$

$$3) \quad \frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 - \frac{1+b^2}{b}}{\frac{1}{b^2} - \frac{2}{b} + 1} = \frac{\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2-b^2}}{\frac{a^2-b^2 - a^2 - b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{\frac{2b-1-b^2}{b}}{\frac{1-2b+b^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)/(a^2+2ab+b^2 - a^2+2ab-b^2)}{(a^2-b^2)/(a^2-b^2-a^2-b^2)} \cdot \frac{b^2(2b-1-b^2)}{b(1-2b+b^2)} =$$

$$= \frac{4ab}{-2b^2} \cdot \frac{b \cdot -(1+b)^2}{(1-b)^2} = \frac{-4ab^2}{-2b^2} = 2a$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7}-2} &= \frac{\sqrt{7}-5}{2} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{16-11} + \frac{(3-\sqrt{7})}{9-7} - \frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \frac{\sqrt{7}-5}{2} \\ &= \frac{20+5\sqrt{11}}{5} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} - \frac{6\sqrt{7}+12}{3} = \frac{\sqrt{7}-5}{2} = \frac{120+30\sqrt{11}+45-15\sqrt{7}-60\sqrt{7}-120-15\sqrt{7}+75}{30} \\ &= \frac{30\sqrt{11}-90\sqrt{7}+120}{30} = \sqrt{11}-3\sqrt{7}+4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt[3]{Vx} \cdot \sqrt[6]{x^5}}{(\sqrt{x} \sqrt{x})^{-2}}$$

Magának v.

$$x + \frac{4x-7}{9} = \frac{x}{6} - \frac{10}{3} \quad / 18$$

$$18x + 8x - 14 = 3x - 60$$

$$23x = -46$$

$$x = -2$$

magának v. (kib.)
homb.

V.

$$|x-4| \leq 3$$

$$x-4 \geq 0 \rightarrow |x-4| = x-4$$

$$x-4 \leq 3$$

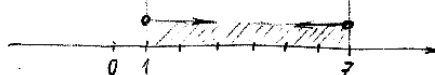
$$x \leq 7$$

$$x-4 < 0 \rightarrow |x-4| = 4-x$$

$$4-x \leq 3$$

$$-x \leq -1$$

$$x \geq 1$$



$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$x-2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$x < 1$$

$$x < 2$$

A teljes és vártólagos valószínűség

A letelepítés esetek száma l és azok közül több egymást kizáró "kedvező" esetek száma $k_1, k_2, k_3, \dots$, akkor annak valószínűsége, hogy a "kedvező" esetek valamelyike bekövetkezik:

$$P = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \dots}{l} = \frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{l} + \frac{k_3}{l} + \dots +$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

Annak valószínűsége tehát, hogy több egymást kizáró "kedvező" eset közül valamely bekövetkezik úgy kegyeljük meg, hogy az egyes "kedvező" esetek valószínűségének összegét vesszük.

Az egymást kizáró esetek valószínűségét teljes P valószínűségnek is nevezzük.

pl.: Mi a valószínűsége, hogy 2 kockával összesen 6-a 7-et 8-at dobunk?

$$l = \sigma_6^{1,2} = 8^2 = 36$$

6	$k_1 = 5$	4	$k_2 = 6$	8	$k_3 = 5$
1,5		1,6		1,6	
2,4		2,5		3,5	
3,3		3,4		4,4	
4,2		4,3		5,3	
5,1		5,2		6,2	
		6,1			

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{l} + \frac{k_3}{l}$$

$$P = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Ha viszont azt keressük, hogy mi a n_2 -e annak, hogy több befizetendő "kedvező" eset kívül az egész előtt lesz be, akkor az n_2 -et, akkor a n_2 -et relatív n .

A vizsgálatos n_2 mértékének megállapításánál tulajdonképpen csak az esemény, melyek nem kedvezőek, figyelmen kívül is hagyhatjuk, mert ezek az eredmények befizetése nélkül.

Mivel az egyes kedvező esetek száma $k_1 + k_2 + k_3 + \dots$ az n_2 -e, hogy $n_2 = k_1$ eset előtt kívül, kevés be:

$$n = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + k_3 + \dots}$$

hogy ezt az eredményt is az egyes esetek arányával kifejezhetjük, elvesszük a két valószínűségünk és a n_2 -jének minden tagját a lehetséges esetek számával, akkor

$$n = \frac{\frac{k_1}{l}}{\frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{l} + \frac{k_3}{l} + \dots} = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} = n$$

A vizsgálatos n_2 tehát a "hiányos kedvező" eset egyenlő n_2 -jének és az egyes kedvező esetek egyenlő n_2 -jével alkotott arányban kifejezhető.

pl.: mi a n_2 annak, hogy 2 kockával előtt dobunk 7-et, mint 6-ot v. 8-at?

$$\begin{aligned} l &= 36 \\ k_6 &= 5 \\ k_7 &= 6 \\ k_8 &= 5 \end{aligned} \quad n = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{16}{36}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

A n_2 számítás elméletét Kolmogorov szov. matematikus 1933-ban megjelent könyvében fejtette le.

Egy urnában 12 fekete és bizonyos számú fekete golyó van.
 Mennyi a fekete golyók száma, ha annak valószínűsége,
 hogy feketét húzunk: $\frac{2}{5}$

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ fekete golyó} \quad - \text{kedvező eset} \\ \text{lehető eset} \quad x+12 \end{array} \right\} \frac{x}{12+x} = \frac{2}{5}$$

$$5x = 24 + 2x$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

$y = x^2 - 6x + 5$ par. ág és az x teng. ált. berak. nkt. ter. $(0; 6)$

$y = \frac{x^2}{2} + 2$ p. és az $x - 2y + 10 = 0$ egy. ált. hat. ter.

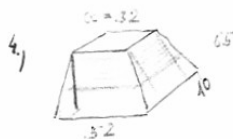
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ h. az x t. körül való forg. szám test. köbt.
 $(a; 2a)$ $[\frac{4}{3}\pi ab^2]$

$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$ ell. az x t. k. v. f. sz. t. köbtartalma
 $[\frac{4}{3}\pi ab^2]$

Bölygő. Geo. II. 147/2
148/3
154/2

Egy vízgyűjtő medence

- 4.) Csőcsigula alakú 65cm magas négyzetes fenékűnek ide 32cm, felülről 52cm. Mennyit nyom a bennelévő föld, ha a földet 50cm magasságig töltik meg. (1m³ f. súly 1400 kps.). [112]
5.) Öntőgyárból készült szabályos négyoldalú gúla súly 1012,2 kps, alapéle 45cm. Mekkora a magassága. $P = 7,5$. [19,99 dm]
6.) Egy szabályos négyoldalú, homokból faragott gúla súly 4620 kps, magassága 2,4 dm, alapéle 7 dm -rel hosszabb, mint az oldaléle. Mekkora az élek és az oldalfelület. [a 48,06 dm ; σ 41,06 dm ; O_f 3200 dm²]



$$65 : 10 = 50 : x$$

$$x = \frac{50 \cdot 65}{10} = \frac{100}{13} = \frac{25}{3} = 8,3 = 8,3$$

$$b = 32 + 2 \cdot 8,3 = 32 + 16,6 = 48,6$$

$$l = 32 + 2 \cdot 8,3 = 32 + 16,6 = 48,6$$

$$V = \frac{m}{3} (A_b + \sqrt{A_b \cdot A_t} + A_t)$$

$$V = 21,7 (2250 + 1100 + \sqrt{2475000})$$

$$V = 21,7 (3350 + 1573) = 21,7 \cdot 4923$$

$$V = 106500 \text{ cm}^3 = 0,1 \text{ m}^3$$

$$G = P \cdot V = 1400 \cdot 0,1 = 140 \text{ kps.}$$



$$Q = 1012,2 \text{ kps.}$$

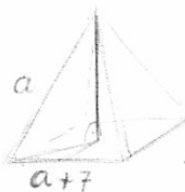
$$P = 7,5$$

$$m = ?$$

$$V = \frac{Q}{P} = \frac{1012,2}{7,5} = 136 = \frac{m}{3} (A_b)$$

$$m = \frac{3 \cdot 136}{45^2} = \frac{408}{2025} = 0,2 \text{ dm}$$

6.)



$$Q = 4620 \text{ kps}$$

$$m = 2,4 \text{ dm}$$

$$a^2 = 2,4^2 + \frac{\sqrt{2} \cdot (a+7)}{2}$$

$$2a^2 - 2,576 - \sqrt{2}a + 7 = 0$$

$$2a^2 - a\sqrt{2} - 11,52 - 7,17 = 0$$

$$2a^2 - a\sqrt{2} - 21,39 = 0$$

$$P = 19,27$$

$$V = \frac{Q}{P} = \frac{4620}{19,27} = 240 \text{ dm}^3$$

$$A_b = \frac{3V}{m} = \frac{720}{2,4} = 3035$$

$$a = \sqrt{A_b} = 55 \quad \sigma = 48 \text{ dm}$$

$$\begin{array}{r} 2,4^2 = 5,76 \\ 4,16 \\ 16 \\ \hline 111,7 \\ 9,87 \\ \hline 11,52 \\ 21,39 \end{array}$$

$$a_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 89,56}}{4} = \frac{14,1 \pm 9,5}{4}$$

$$a = 11 \text{ dm}$$

$$= \frac{4620}{2,4} = 1925 \text{ dm}^3$$

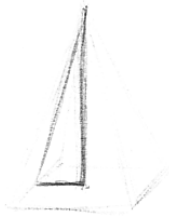
$$= \frac{15145}{2,4} = 6310$$

$$a = 46,4 \quad \sigma = 39,4 \text{ dm}$$

$$V = \frac{m}{3} A_b$$

$$a_1 = 48,06 \text{ dm}$$

$$m = 2,4 \text{ dm}$$



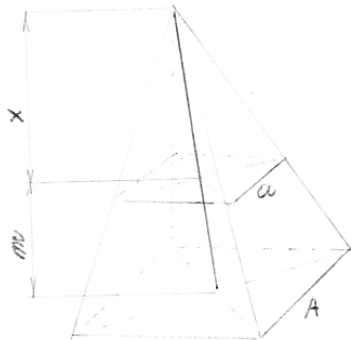
$$m^2 + (a/2)^2 = \sigma_1^2$$

$$5,76 + 576 = \sigma_1^2$$

$$\sqrt{581,76} = \sigma_1$$

$$\sigma_1 = 24,1$$

$$Q_f = 4 \cdot a \cdot \sigma_1 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 48 \cdot 24 = 2304 \text{ dm}^2$$



A csomagtűz és csomagtűz köbhasadéka

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \frac{(m+x) \cdot A_t}{3} - \frac{x \cdot a_t}{3}$$

$$A_t : a_t = A^2 : a^2$$

$$A^2 : a^2 = (m+x)^2 : x^2$$

$$\sqrt{A_t} : \sqrt{a_t} = (m+x) : x$$

$$x \cdot \sqrt{A_t} = m\sqrt{a_t} + x\sqrt{a_t}$$

$$x = \frac{\sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}$$

$$V = \frac{\left(m + \frac{\sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}\right) A_t - \frac{\sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}} a_t}{3}$$

$$V = \frac{\frac{A_t \cdot m \cdot (\sqrt{A_t} + \sqrt{a_t}) + A_t \sqrt{a_t} \cdot m - a_t \sqrt{a_t} \cdot m}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}}{3}$$

$$V = \frac{m}{3} \cdot \frac{A_t \sqrt{A_t} - A_t \sqrt{a_t} + A_t \sqrt{a_t} - a_t \sqrt{a_t}}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}$$

$$V = \frac{m}{3} \cdot \frac{\sqrt{A_t}^3 - \sqrt{a_t}^3}{\sqrt{A_t} - \sqrt{a_t}}$$

$$A^3 - B^3 = A - B(A^2 + AB + B^2)$$

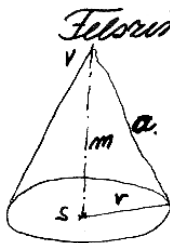
$$V = \frac{m}{3} \cdot (A_t + \sqrt{A_t \cdot a_t} + a_t)$$

A kúp.

Kúpfelületet is lehet olyan egyenes, amely egy adott görbe mentén mozog oly módon, hogy közben egyik pontja állandóan rögzített maradjon. Ezt az egyenest minden helyüttön alkotóvá nevezzük.

A kúp olyan test, amelyet egy adott görbét kúpfelület és egy a kúpfelület minden alkotóját átméltató sík határol. A csúcsot is az alap középpontjait összekötő egyenes a kúp tengelye. A csúcsnak az alaplót való távolsága a kúp magassága.

Ha a kúp tengelye merőleges az alapsíkra, akkor a kúp egyenes, ellenkező esetben ívelt. Az olyan egyenest kúpot, melynek tengelyét tartalmazó keresztmetszete egyenlő oldalú háromszög, egyenlő oldalú kúpnak nevezzük.



Felírás: az egyenes körkúp felírását úgy kapjuk meg, hogy az alaplórútlók keresztmetszete a palást területét:

$$F = A_t + P.$$

A palást, lefeléve, olyan körlemez, melyre a kúp alapsíkjának kerületével, sugara pedig az alkotó hosszával egyenlő. Tehát a palást területe:

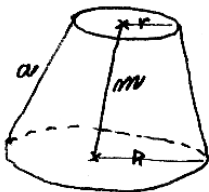
$$P = \frac{1}{2} \pi r \cdot a = \pi r$$

$$F = \pi r \cdot r + r^2 \pi = \pi r(r + a) = F$$

Körkúp térfogata: - 1 megkapjuk, ha az alaplórútlót és magasság szorzatát elosztjuk hárommal:

$$V = \frac{A_t \cdot m}{3} = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3} = V$$

A csomkakúp. Ha a kúpot az alappal párhuzamos síkkal metszük két testet kapunk. A kúpnak az alap és a párhuzamos körök közé eső része a csomkakúp, a másik része a "kiegészítő" kúp.



Az egyenes csomkakúp felírását megkapjuk, ha az alap és fedőlap kerületének keresztmetszete a palást területét:

$$F = A_t + A_f + P$$

$$F = R^2 \pi + r^2 \pi + P$$

A palánál lefejtve körgyűrűsített, mely két vé-
gön alul ill. felső alapnak körülete ($2R\pi$; $2r\pi$) is
szelvénye a csomakúp oldala (a). Tehát körülete:
$$P = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot a = \pi a \cdot (R+r)$$

$$F = R^2\pi + r^2\pi + \pi a(R+r)$$

$$F = R^2\pi + r^2\pi + \pi aR + \pi ar$$

$$F = \pi [R^2 + r^2 + a(R+r)]$$

A csomakúp térfogatának:

$$V = \frac{\pi \cdot a}{3} [R^2 + Rr + r^2] \quad \text{levegőben}$$

Példák: 1. Egy egyenes csomakúp aljának súlya 444,6 kg.
fajlagos: $7,8 \text{ g/cm}^3$. Alaphőmérséklet átmérője 4 dm. Mekkora
a felület? [$98,81 \text{ dm}^2$]

2. Számítsuk ki, hogy egy körös alakú test
elkészítéséhez hány dm^2 levegő szükséges. Hány l víz fele-
tele.

3. A forg. kúp magassága 5,7 cm, az alkató
az alap sugarával $\alpha = 42^\circ 40'$ szögben áll. Hat. meg a kúp
térfogatát.

4. Geo. II. 189 - 198 1-7 p.

11. Egy sík alap 8 m^2 , az egyenes körkúp aljának
sávon alaphőmérséklet átmérője 2 l m. Milyen magas a sávon?
[$2,837 \text{ m}$]

12. Egy dombot körüli egyenes körkúp sugara
936,86 kg. Nyílásszöge $64^\circ 14'$. Mekkora a kúp felülete,
(fajlagos 114)? [$121,7 \text{ dm}^2$]

13. A körüli kúp egyenes körkúp aljának,
mely alkató az alapjal $31^\circ 00'$ szögben áll.
Milyen magas és milyen az a kúp felület, amellyel
15 m^3 kúp van. [$4,73 \text{ m}$, $2r = 5,76 \text{ m}$]

14. Egy egyenes - csomakúp aljának vízszintes
felső átmérője 102 cm, az alul átmérője 84 cm.
Magassága 72 cm. Hány l víz fele tele? [$490,6 \text{ l}$]

15. Egy parkban 5 egyenlő csomakúp aljának
vízszintes körülete. Az alaphőmérséklet sugara 5,2 m,
a fedőlap sugara 4,8 m, magassága 0,4 m. Hány
 m^3 földet kell hozni? [$157,13$]

16. Egy egyenes csomakúp aljának körülete
alaphőmérséklet átmérője 26 cm, felső körülete átmérője 42 cm,
a magassága 38 cm.

Mennyi víz fele tele, mennyi földet kell az
elkészítéshez? [358 ; 50 dm^2]

1,

$$\begin{aligned} Q &= 444,6 \text{ kg} \\ \rho &= 7,8 \text{ kg/dm}^3 \\ r &= 2 \text{ dm} \\ F &= ? \end{aligned}$$

$$F = r^2 \pi + 2r\pi \cdot 0,5 = r\pi(r + a)$$

$$V = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3} \rightarrow m = \frac{3V}{r^2 \pi}$$

$$V = \frac{Q}{\rho} = \frac{444,6}{7,8} = \frac{444,6}{7,8} = 57 \text{ dm}^3$$

$$m = \frac{3V}{r^2 \pi} = \frac{171}{4\pi} = \frac{171}{12,56} \approx 13,6$$

$$a = \sqrt{13,6^2 + 2^2}$$

$$a = \sqrt{185,04 + 4} = \sqrt{189,04} = 43,5 \approx \sqrt{189} \approx 13,75$$

$$F = r\pi(r + a) = 2 \cdot 3,14(2 + 43,5) = 2 \cdot 3,14 \cdot 45,5 = 86$$

2,

3,



$$V = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3}; \quad \lg x = \frac{5,7}{r} \rightarrow r = \frac{5,7}{\lg x} = \frac{5,7}{\lg 0,2} \approx 6,2$$

$$V = \frac{382\pi \cdot 5,7}{3} \approx 230 \text{ cm}^3$$

11,

$$\begin{aligned} F &= 8 \text{ m}^2 \\ r &= 1,1 \text{ m} \\ m &= ? \end{aligned}$$

$$F = r\pi r + r\pi a \rightarrow a = \frac{F - r^2 \pi}{r\pi} = \frac{8 - 3,85}{3,14} = \frac{4,15}{3,14} \approx 1,2$$

$$m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{1,44 - 1,21}$$

$$F = r\pi \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{r\pi} = \frac{8}{3,14} \approx 2,3$$

$$m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{5,29 - 1,21} = \sqrt{4,08} \approx 2,1$$

12,

$$\begin{aligned} Q &= 936,86 \\ \gamma &= 64^\circ 41' \\ \rho &= 11,4 \\ F &= ? \end{aligned}$$

$$F = r\pi(r + a)$$

$$V = \frac{Q}{\rho} = \frac{936,86}{11,4} \approx 82,3 \text{ kg}$$

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} \rightarrow r^2 = \frac{3V}{\pi m}$$

$$\lg \frac{r}{m} = \frac{r}{m} = 0,63 \rightarrow r^2 = m^2 \cdot 0,397$$

$$r^2 = r^2 = \frac{78,3}{m} = m^2 \cdot 0,397$$

$$m^3 = \frac{78,3}{0,397} = 198,95$$

$$m = \sqrt[3]{198,95} \approx 5,85 \text{ km}$$

$$r = 0,63 \cdot m$$

$$r = 0,63 \cdot 5,85 \approx 3,68$$

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{5,85^2 + 3,68^2}$$

$$a \approx \sqrt{34,2 + 13,6} = \sqrt{47,8} \approx 6,9$$

$$F = r\pi(r + a) \approx 3,68 \cdot 3,14 \cdot 10,58 \approx 122 \text{ dm}^2$$

13, $\alpha = 31^\circ$ $V = 15 \text{ m}^3$



$$V = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3} \rightarrow r^2 m = \frac{3V}{\pi} = \frac{45}{\pi} = 14,18 \rightarrow m = \frac{14,18}{r^2}$$

$$\lg L = \frac{m}{r} \quad \lg 31^\circ = \frac{m}{r} \approx 0,6 \rightarrow m = 0,6r$$

$$0,6r = \frac{14,18}{r^2}$$

$$\frac{14,18}{0,6} = r^3 \approx 23,95 \rightarrow r \approx 2,88 \text{ m} \rightarrow \underline{\underline{r = 2,88 \text{ m}}}$$

$$m = 0,6r = 1,73 \text{ m} = \underline{\underline{m}}$$

14, $\phi_1 = 102 \text{ cm}$
 $\phi_2 = 84 \text{ cm}$
 $m = 72 \text{ cm}$
 $V = ?$

$$V = \frac{m\pi}{3} [R^2 + Rr + r^2]$$

$$V = \frac{72 \cdot \pi}{3} [51^2 + 51 \cdot 42 + 42^2] \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V = 24\pi (2600 + 1762 + 2140)$$

$$V = 24\pi \cdot 6502 \approx 49000 \text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{490 \text{ l} = V}}$$

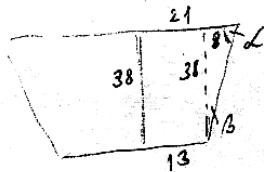
15, 5 dlb
 $d_1 = 5,2 \text{ m}$
 $d_2 = 4,8 \text{ m}$
 $m = 0,4 \text{ m}$
 $V = ?$

$$V' = \frac{m\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

$$V = \frac{5 \cdot 0,4 \cdot \pi}{3} (6,75^2 + 5,75 \cdot 6,24) \approx \frac{2 \cdot \pi}{3} (18,74) \approx 39,3 \text{ m}^3$$

16, $d_1 = 42 \text{ cm}$
 $d_2 = 26 \text{ cm}$
 $m = 38 \text{ cm}$

$V = ?$
 $F = ?$



$$V = \frac{38 \cdot \pi}{3} (440 + 169 + 271,5) \approx \frac{38 \cdot \pi}{3} \cdot 880,5 \approx 3520 \text{ cm}^3$$

$$\underline{\underline{V = 35 \text{ l}}}$$

$$F = \pi [R^2 + r^2 + a(R+r)]$$

$$\lg B = \frac{8}{38} = 0,21 \quad \text{mid} = \frac{\lg L}{\sqrt{1 + \lg^2 L}}$$

$$\text{mid} B = \frac{0,21}{\sqrt{1 + 0,21^2}} \approx \frac{0,21}{\sqrt{1,0441}} \approx \frac{0,21}{1,0218} \approx 0,205$$

$$\text{mid} B = \frac{8}{\sigma} = 0,175 \rightarrow \sigma = \frac{8}{0,175}$$

$$\sigma = \sqrt{38^2 + 8^2} = \sqrt{1444 + 64} = \sqrt{1508} \approx 38,92$$

$$F = 3,14 (440 + 169 + 38,9 [34]) = 3,14 (440 + 169 + 1320)$$

$$(F = 3,14 \cdot 1929 \approx 6)$$

$$\underline{\underline{F = 3,14 \cdot 1489 \approx 4680 \text{ cm}^2 \approx 42 \text{ dm}^2 = F}}$$

$$V_k = \frac{m}{3} [A_k + \sqrt{A_k a_k} + a_k] \quad / \quad A_k = R_k^2 \quad a_k = r^2 \pi$$

$$V_{cs.k} = \frac{m}{3} (R^2 \pi + \sqrt{R^2 r^2 \pi^2} + r^2 \pi)$$

$$\underline{V_{cs.k} = \frac{\pi \cdot m}{3} (R^2 + Rr + r^2)}$$

Gömb

1968. II. 1

Gömbfelület akkor kezelhető, ha egy felület álműve körül addig forgatunk, míg eredeti helyzetébe vissza nem tér. A gömbfelülettel kapott testet gömbnek nevezzük.

Az a pont, melyről a gömbfelületnek minden egyes pontja egyenlő távolságra van, a gömb középpontja.

A gömbfelület középpontját való távolsága a gömb sugara.

A gömbfelület két pontját összekötő egyenes darab a gömb húra. A középponton átmenni" húr a gömb átmérője. Ennek végpontjai a gömbfelület átlépőpontjai.

A gömbnek minden síkmetsete kör. Ennek sugara annál nagyobb, minél közelebb van a húr a gömb középpontjához.

Ha a sík érintkező a gömb középpontján, akkor kapjuk a legnagyobb sugarú kört, melykel jótévedésnek nevezünk. Ennek sugara a gömbfelület sugarával egyenlő és középpontja egybeesik a gömbfelület középpontjával.

A gömb felülete: $F = 4r^2\pi$

A gömb felülete egy körre körültekintő négyzetével egyenlő.

Térfogata: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

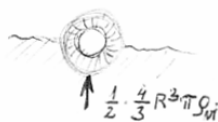
A gömb kötérszáma a gömb felületének és a sugár harmadának szorzatával egyenlő.

P. 1 40cm átmérőjű, belül üres vasgolyó felülete mekkora a terület. Mekkora a golyó térfogata, ha a vas sűrűsége 7,4 g/cm³.

Adm. ha a golyó külső felület is.

- [0,45 cm 50,272 dm³]
- 2.) Leírni ki 1 tkp súlyú sárgarézgömb átmérőjét, ha fajtsúlya 8,5 p/cm³! [d = 61 mm]
- 3.) Mekkora a terület annak a körmek, amelyet egy r sugarú gömbtől melo ki egy olyan sík, mely a gömb középpontjától fele akkora távolságra van, mint a gömb sugarának hosszúsága. [3/4 · r²π]
- 4.) Mekkora a gömb síkfelületének sugara, ha a gömb sugara 3,49 cm, a mérőszálnak a gömb középpontjától való távolsága 1,8 cm. [2,99 cm]
- 5.) Mekkora területet ter ki a földön a sárgarézöld. r = 6370 km. A sárgarézöld a felszín 1/3 része. [170 · 10⁶ km²]
- 6.) Hány %-al csökkent a csapágygolyó felülete, ha az átmérője a kopás következtében 0,8 mm-rel rövidebb lett és eredetileg 12 mm volt. [13%]
- 7.) A vasbidoz cm²-esek súlyú 1/2 tkp. Mekkora a kettő közül a belőle készült üveggyömbnek, ha a vízben úszik! [r = 1/4 dm]
- 8.) Hány csepp kőd fűződik 1 cm³ vízből, ha egy ködcsepp átmérője 3 · 10⁻³ mm.

1.) $F = 4r^2\pi = 4 \cdot \pi \cdot 20^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 400 = 5030 \text{ cm}^2 = 50 \text{ dm}^2$



$$\frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi \rho_{\text{szu}}$$

$$\frac{4}{3}\pi \rho_{\text{szu}} (R^3 - r^3) = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho_{\text{vi}}$$

$$\frac{4}{3} \cdot 7,4 (20^3 - r^3) = \frac{4}{3} \cdot 20^3 \cdot 1$$

$$2 \cdot 7,4 \cdot 8000 - 2 \cdot 7,4 \cdot r^3 = 8000$$

$$118500 - 8000 = 14,8 r^3$$

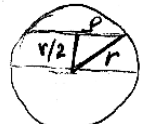
$$110500 = 14,8 r^3$$

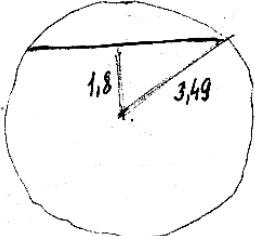
$$r^3 = 7450 \rightarrow r = 19,5$$

2.) $V = \frac{4}{3}r^3\pi \quad Q = V\rho = \frac{4}{3}r^3\pi\rho \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3Q}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10 \text{ kg} \cdot \text{dm}^3}{4\pi \cdot 8500 \text{ kg}}}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{107000}} = \sqrt[3]{0,00003} = 0,31 \text{ dm}$$

d = 62 mm.

3. 
$$\rho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4r^2 - r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$
$$T = r^2 \pi = \rho^2 \pi = \frac{3r^2}{4} \pi$$

4. 
$$\rho = \sqrt{3.49^2 - 1.8^2} = \sqrt{12.2 - 3.24} = \sqrt{9}$$
$$\rho = 3$$

5. $F = 4r^2 \pi = 4 \cdot \pi \cdot 6370^2 \text{ km}^2 = 4.314 \cdot 40450000 \approx 507500000 \text{ km}^2$
 $F_{02} = F/3 = 170900000 \text{ km}^2$

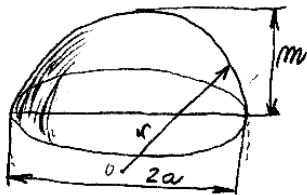
6. $F_1 = 4r_1^2 \pi = 4 \cdot 12^2 \cdot \pi$
 $F_2 = 4r_2^2 \pi = 4 \cdot 11.2^2 \cdot \pi$
 $F_1 : 100 = F_2 : x$
 $F_1 \cdot x = 100 F_2$
 $x = \frac{100 F_2}{F_1} = \frac{100 \cdot 4 \cdot 11.2^2 \cdot \pi}{4 \cdot 12^2 \cdot \pi}$
 $x \approx \frac{100 \cdot 11.44}{144} \approx \frac{11440}{144} \approx 78\%$
 $\Delta = 100 - x \approx 100 - 78 = 22\%$

7. $F_p = F_q$
 $\frac{4}{3} R^3 \pi \cdot \rho_0 = \frac{4}{3} R^2 \pi \cdot \frac{1}{12}$
 $\frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{1}{3} R^2 \pi$
 $4R^3 = R^2 \cdot 1$
 $4R = 1$
 $R = 1/4 \text{ dm}$

8. $V = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \pi \cdot 0.003^3 \text{ mm}^3 = 4 \pi \cdot 0.001 = \pi \cdot 0.004 \approx 0.01256 \text{ mm}^3$
 $\alpha = \frac{V^*}{V} = \frac{1000}{0.01256} \approx \frac{100000000}{1256} \approx 79500$

A gömb részei

Gömbrelel: A gömbnek mely síkkal lemetezett része a gömbrelel v. gömbreghmentum.
A gömbrelelet a körlelap is a lemetezett gömbfelület - a gömbív vagy -kúpíve.

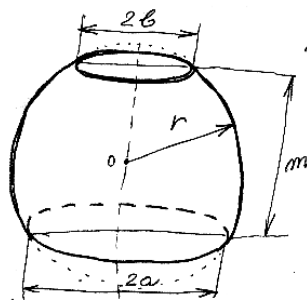


$$F_{gr} = \pi(2rm + a^2) = \pi m(4r - m)$$

$$V_{gr} = \frac{\pi m^2}{3}(3r - m)$$

$$F_s = 2\pi r m$$

Gömbkúp v. gömbkorong: A gömb két párhuzamos síkkal kimetszett része a gömbkúp v. gömbrelel.
A gömbfelületnek a két párhuzamos sík közé eső része a gömbív.



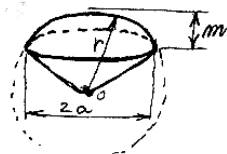
$$F_{gk} = \pi(2rm + a^2 + b^2)$$

$$V_{gk} = \frac{\pi m}{6}(3a^2 + 3b^2 + m^2)$$

$$F_{gö} = 2\pi r m \quad [(m = \sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - b^2})]$$

Gömbcikk

A gömbnek az a része, amely egy gömbrelelel és egy olyan kúpból van összeállítva, amelynek alapja a gömbrelel alapjaival, csúcsa pedig a gömb középpontjával esik egybe, a gömbcikk v. gömbkúplet.



$$F_{gc} = \pi r(2m + a)$$

$$[(a^2 = 2rm - m^2)]$$

$$V_{gc} = \frac{2}{3}\pi r^2 m = \frac{1}{6}\pi d^2 m$$

Egy gömböt a középpontjától 45 cm távolságra egy síkkal metszünk. Mekkora a keletkező gömbüreg felülete, ha a gömb kör sugarát 3,6 m.

Hány m² súlyos rézhézag egy egytornyútor, ha az olyan gömbüregnek lekinthető, melynek magassága 3,4 m, és alapkörének sugara 6 m.

$$149,4 \text{ m}^2$$

Milyen magas az a gömb, amelynek felülete a gömb felületének megegyezik?

$$m = \frac{r}{2}$$

Egy gömbrelet alapkörének átmérője megegyezik a magassággal. Mekkora a gömb sugara, ha a gömbrelet térfogata 200 cm³?

Egy kétféle domború üveglencse átmérője 8 cm, vastagsága a közepén 7,3 mm, az üveglencsét becsát két gömbrelet egybevágó. Mekkora a lencse súlya, ha az üveg fajátlya 2,6?

$$47,83 \text{ g}$$

Egy 20 cm sugarú gömböt középpontjának ugyanazon az oldalán két párh. síkkal metszünk 9 és 15 cm távolságra egymástól. Mekkora a keletkező gömbrelet felülete és térfogata?

$$23,08 \text{ dm}^2$$

$$4,769 \text{ dm}^3$$

Egy 5 cm sugarú 45°-os középponti szögű körívekkel az egyik sugara körül megforgatunk. Mekkora lesz a keletkező gömbcsikk térfogata?

$$76,67 \text{ cm}^3$$

Mekkora a gömbcsikk felülete és térfogata, ha:

$$15,435 \text{ dm}^2$$

a gömb sugara 19 cm, a középponttól való magassága 6 cm.

$$4,537 \text{ dm}^3$$